# 仓库容量有限条件下的随机存贮管理问题

**摘要：**本文讨论了仓库容量有限条件下的随机存贮管理问题。首先建立了一个理论模型，根据题目要求写出平均费用的函数，该函数是关于订货点 L 和缺货天数 X 的函数，因为缺货天数 X 是一随机变量，这里给出了 X 为离散型和连续型两种模型，分三种情况讨论了各自的损失费用，然后得出期望平均费用函数 $E[f(L,X)]$，经过 Maple 软件的辅助，对 L 进行求导，令 $\frac{dE[f(L,X)]}{dL}=0$ 从而得出求解最优订货点 $L^*$ 的方程。由于计算量太过庞大，所以在建立理论模型之后，本文还给出了一种比较实用的求解全局最优的遍历搜索算法，应用于问题 2 中求解出了三种商品各自的最佳订货点。经 SPSS 验证可知，问题 2 中给出的 3 种商品的缺货天数 X 不符合一些常见连续型的概率分布，故在求解时将 X 看做离散型的随机变量，采用频率替换的方法，计算出各自的 P(X) ，经遍历搜索找到最佳订货点。在问题 3 中，类似问题 1 的解法，求出计算最佳订货点 $L_i^*$ 的理论模型，同时为便于问题 4 的求解，依然采用解决问题 2 的遍历算法，经 Matlab 编程求解得出问题 4 的最佳订货点 $L^*$、$Q_{0i}$ 和 $Q_i$。问题 5 中假定商品的销售量是离散变化的，采用马氏链模型，在问题 2 的基础上补充假设条件，给出了单品种商品随机存贮模型，这一模型结合实际可以加以推广。

本文分为三个部分：第一部分是问题重述；第二部分是给出随机存贮问题的数学模型和一个搜索算法，通过计算机编程，应用于问题 2 和 4 中，从而给出了实际问题的最优解。第三部分为模型的评价和推广。

**关键字：**随机存贮，K－S 检验，频率替换，遍历搜索，马氏链模型

# 一、问题重述

工厂生产需定期地定购各种原料，商家销售要成批地购进各种商品。无论是原料或商品，都有一个怎样存贮的问题。存得少了无法满足需求，影响利润；存得太多，存贮费用就高。因此说存贮管理是降低成本、提高经济效益的有效途径和方法。本问题主要考虑的是在销售速率固定，交货时间为一随机变量的情况下，商场如何确定最优的订货点$L^*$来使的其总的损失费用达到最低。

# 二、数学建模和问题求解

## （一）问题 1：

**1.1 模型假设：**

1．供货量充足

2．每次订货的时候存贮量 q 刚好是 L。

**1.2 符号说明：**

$c_1$：每次进货的订货费

$c_2$：使用自己的仓库存贮商品时，单位商品每天的存贮费用

$c_3$：使用租用的仓库存贮商品时，单位商品每天的存贮费用

$c_4$：缺货情况下，单位商品每天的损失费用

$X$：交货时间，是一个随机变量

$Q_0$：自己的仓库用于存贮商品的最大容量

$Q$：到货时商品的存贮量

$q$：商品的存贮量

$L$：订货点，即订货时商品所剩下的存贮量

$L^*$：最优订货点，即使总损失费用达到最低的订货点

$f(L,X)$：一个订货周期内的平均总损失费用，是关于$L$和$X$的函数

$p(X)$：交货时间的概率密度函数

**1.3 解题思路：**

假设随机变量$X$（交货时间）的密度函数已知为$p(x)$。考虑某个周期内平均每天的损失费用设为$g(L)$，求其最小时$L$的取值$L^*$。因为$L \le Q_0$和$L > Q_0$时$g(L)$的表达式是不同的，所以分三步来求$L^*$。

（1）当$L \le Q_0$时，求出$L_1^* = L_1(p(x))$，使得$g(L_1^*) = \min(g(L), \forall L \le Q_0)$。

（2）当$L > Q_0$时，求出$L_2^* = L_2(p(x))$，使得$g(L_2^*) = \min(g(L), \forall L > Q_0)$最小。

（3）$L^* = \begin{cases} L_1^* & g(L_1^*) \le g(L_2^*) \\ L_2^* & g(L_1^*) > g(L_2^*) \end{cases}$

**1.4 具体步骤**

第一步：考虑$L \le Q_0$时一个周期内平均每天的损失费用$f(L,X)$。

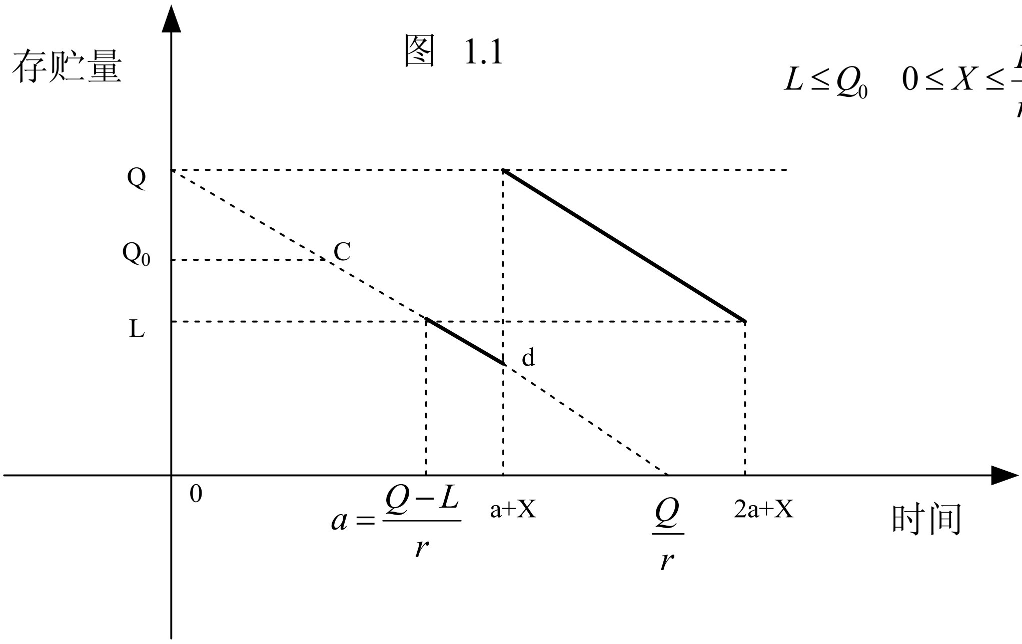
因为在一个周期内可能会发生$0 \le X \le \frac{L}{r}$（会发生缺货）或$X > \frac{L}{r}$（不会缺货）的情况。分别考虑得到费用函数为：

$$f(L,X) = \begin{cases} \dfrac{A - \dfrac{c_2 r}{2}(X - \dfrac{L}{r})^2}{X + \dfrac{Q-L}{r}} & 0 \le X \le \dfrac{L}{r} \\ \dfrac{A + c_4 r(X - \dfrac{L}{r})}{X + \dfrac{Q-L}{r}} & X > \dfrac{L}{r} \end{cases}$$

其中$A = c_1 + \dfrac{c_2 Q^2}{2r} + \dfrac{(c_3 - c_2)(Q - Q_0)^2}{2r}$

现在来具体解释$f(L,X)$：

（1） 当$0 \le X \le \frac{L}{r}$时




见图 1.1：设在 0 时刻，存贮量为$Q$；在$a$时刻存贮量降为$L$，开始订货（易知$a = \frac{Q-L}{r}$）。在$X+a$时刻货到，在$X+2a$存贮量又降为$L$。以$[a \quad X+2a]$为一个周期，求其费用。由图易知，$[a \quad X+2a]$周期内的费用等于$[0 \quad a+X]$的费用，所以只需求$[0 \quad a+X]$的费用，其值为$c_1 + c_3 \times S(Q\,Q_0\ c) + c_2 \times S(0 \quad Q_0 \quad c \quad a+X)$（注：$S(Q\,Q_0\ c)$表示$(Q\,Q_0\ c)$围成的面积）。易证

$$c_1 + \times c_3 \times S(Q\,Q_0\ c) + c_2 \times S(0 \quad Q_0 \quad c \quad a+X) =$$

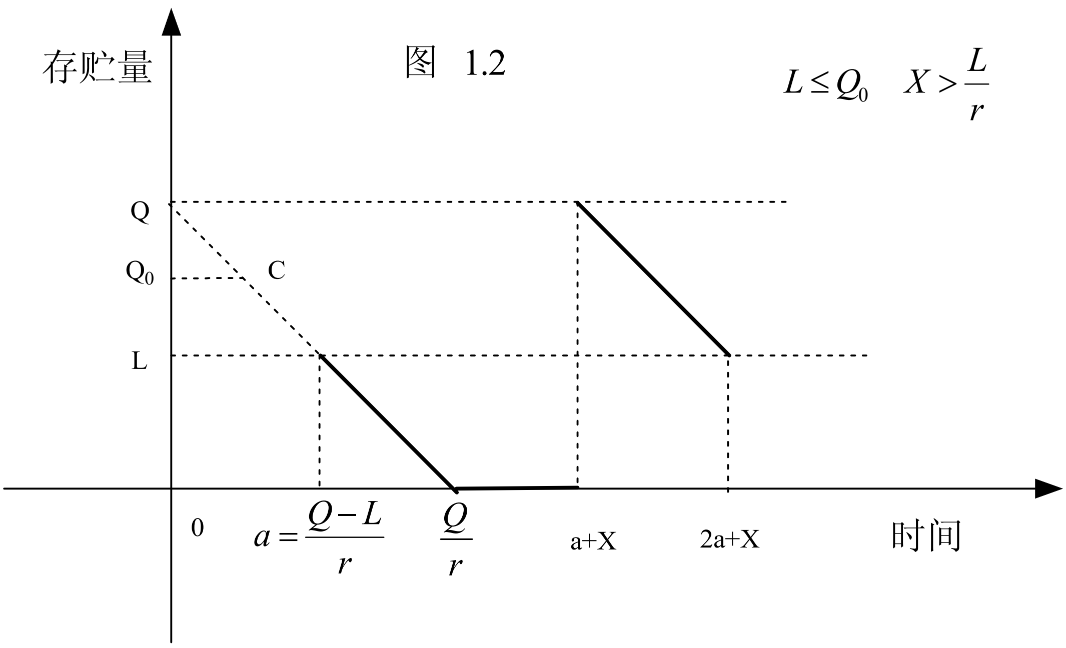
$$c_1 + c_2 \times S(0 \quad Q \quad \frac{Q}{r}) + (c_3 - c_2) \times S(Q \quad Q_0 \quad c) - c_2 \times S(d\ \ a+X \quad \frac{Q}{r})$$

$$= c_1 + c_2 \int_0^{\frac{Q}{r}} rtdt + (c_3 - c_2)\int_0^{\frac{Q-Q_0}{r}} rtdt - c_2 \int_0^{\frac{L}{r}-X} rtdt$$

$$= A - \frac{c_2 r}{2}(X - \frac{L}{r})^2$$

所以这个周期内的平均每天的费用为$\dfrac{A - \frac{c_2 r}{2}(X-\frac{L}{r})^2}{X + \frac{Q-L}{r}}$。

（2）当$X > \frac{L}{r}$时




见图 1.2，考虑$[0 \quad a+X]$之间的费用，其值为

$c_1 + c_3 \times S(Q\,Q_0\;\,c) + c_2 \times S(0 \quad Q_0 \quad c \quad \frac{Q}{r}) + c_4 r(X - \frac{L}{r})$。易证：

$c_1 + c_3 \times S(Q\,Q_0\;\,c) + c_2 \times S(0 \quad Q_0 \quad c \quad \frac{Q}{r}) + c_4 r(X - \frac{L}{r}) =$

$c_1 + c_2 \times S(0, Q \quad \frac{Q}{r}) + (c_3 - c_2) \times S(Q\,Q_0\;\,c) + c_4 r(X - \frac{L}{r}) = A + c_4 r(X - \frac{L}{r})$

所以这个周期内的平均每天的费用为$\dfrac{A + c_4 r(X - \frac{L}{r})}{X + \frac{Q-L}{r}}$

要求$L^*$使得平均每天费用的期望值最小，即满足：

$E[f(L_1^*, X)] = \min E[f(L, X)] \quad (\forall L \le Q_0)$

（1）若$X$为离散型：

$E[f(L,X)] = \sum_i f(L, x_i) P(x_i)$，这是一个关于$L$的函数，在$P(x_i)$ 已知的情况下，令$\dfrac{dE[f(L,X)]}{dL}$=0，可求得$L_1^*$

（2）若$X$为连续型则

$$E[f(L,X)] = \int_0^{\infty} f(L,x) p(x) dx = \int_0^{\frac{L}{r}} f(L,x) p(x) dx + \int_{\frac{L}{r}}^{\infty} f(L,x) p(x) dx$$

$$=\int_0^{\frac{L}{r}}[\frac{A-\frac{c_2 r}{2}(x-\frac{L}{r})^2}{x+\frac{Q-L}{r}}]p(x)dx+\int_{\frac{L}{r}}^{\infty}[\frac{A+c_4 r(x-\frac{L}{r})}{x+\frac{Q-L}{r}}]p(x)dx$$

这是一个关于 $L$ 的函数，令 $\frac{dE[f(L,X)]}{dL}$=0，即可求得 $L_1^*$。

通过 Maple 求 $\frac{dE[f(L,X)]}{dL}$ 有

$$\frac{dE[f(L,X)]}{dL}=\int_0^{\frac{L}{r}}\frac{c_2(x-\frac{L}{r})p(x)}{x+\frac{Q-L}{r}}+\frac{[c_1+\frac{c_2Q^2}{2r}+\frac{(c_3-c_2)(Q-Q_0)^2}{2r}-\frac{1}{2}c_2 r(x-\frac{L}{r})^2]p(x)}{[x+\frac{Q-L}{r}]^2 r}dx$$

$$+\int_{\frac{L}{r}}^{\infty}-\frac{c_4 p(x)}{x+\frac{Q-L}{r}}+\frac{[c_1+\frac{c_2Q^2}{2r}+\frac{(c_3-c_2)(Q-Q_0)^2}{2r}+c_4 r(x-\frac{L}{r})]p(x)}{(x+\frac{Q-L}{r})^2 r}dx \quad \textbf{(1.1)}$$

则最优订货点 $L_1^*$ 就是代入 **(1.1)** 中使之值为 0 的 $L$ 值。

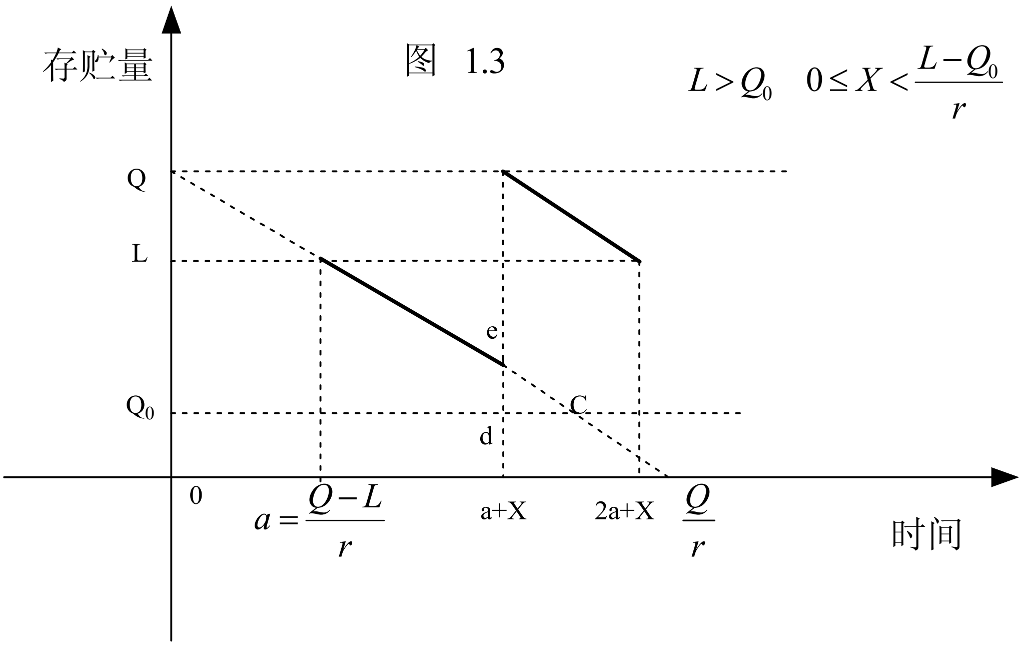
第二步：考虑 $L>Q_0$ 时一个周期内平均每天的费用 $f(L,X)$。

$$f(L,X)=\begin{cases}\dfrac{A-\frac{c_2 r}{2}(X-\frac{L}{r})^2-\frac{(c_3-c_2)r}{2}(X-\frac{L-Q_0}{r})^2}{X+\frac{Q-L}{r}} & (0\le X\le\frac{L-Q_0}{r})\\[2ex] \dfrac{A-\frac{c_2 r}{2}(X-\frac{L}{r})^2}{X+\frac{Q-L}{r}} & (\frac{L-Q_0}{r}<X\le\frac{L}{r})\\[2ex] \dfrac{A+r(X-\frac{L}{r})}{X+\frac{Q-L}{r}} & (X>\frac{L}{r})\end{cases}$$

其中 $A=c_1+\frac{c_2Q^2}{2r}+\frac{(c_3-c_2)(Q-Q_0)^2}{2r}$

现在来具体解释 $f(L,X)$：

（1） 当$0 \le X \le \dfrac{L - Q_0}{r}$时




见图 1.3，同理考虑$[0 \quad a+X]$的费用，其值为

$c_1 + c_3 \times S(Q\,Q_0\ d\quad e) + c_2 \times S(0\quad Q_0\ \ d\quad a+X)$。易证：

$$c_1 + c_3 \times S(Q\,Q_0\ d\quad e) + c_2 \times S(0\quad Q_0\ \ d\quad a+X) =$$

$$c_1 + c_2 \times S(0, Q\ \ \frac{Q}{r}) + (c_3 - c_2) \times S(Q\,Q_0\ c) - c_2 \times S(e\quad a + x\ \ \frac{Q}{r}) - (c_3 - c_2) \times S(e\ d\ c)$$

$$= A - c_2 \int_0^{\frac{L}{r} - X} rtdt - (c_3 - c_2) \int_0^{\frac{L-Q_0}{r} - X} rtdt$$

$$= A - \frac{c_2 r}{2}(X - \frac{L}{r})^2 - \frac{(c_3 - c_2)r}{2}(\frac{L - Q_0}{r} - X)^2$$

所以这个周期内的平均每天的费用为$\dfrac{A - \frac{c_2 r}{2}(X - \frac{L}{r})^2 - \frac{(c_3 - c_2)r}{2}(\frac{L-Q_0}{r} - X)^2}{X + \frac{Q-L}{r}}$

（2） 当$\dfrac{L - Q_0}{r} < X \le \dfrac{L}{r}$和$X > \dfrac{L}{r}$时候的情况，参看图 1.4 和 1.5，类似于第一步里的情形，即可得到其平均每天的费用函数。

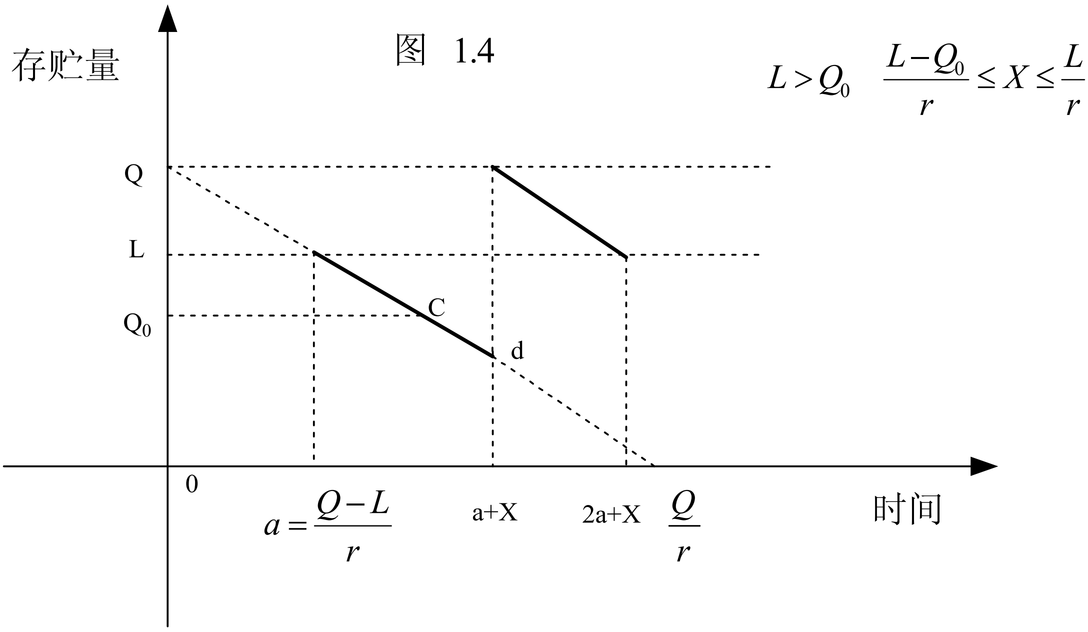


图 1.4

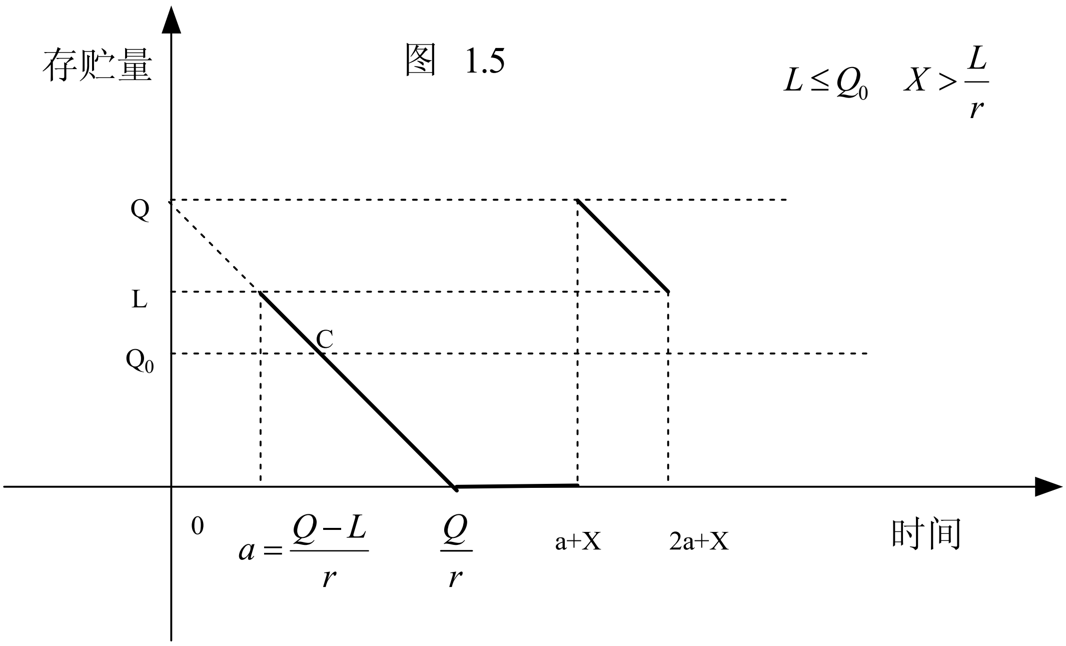


图 1.5

要求 $L_2^*$ 使得平均每天费用的期望值最小，即要满足：

$E[f(L_2^*, X)] = \min E[f(L, X)] \quad (\forall L > Q_0)$

（1）若 $X$ 为离散型：

$E[f(L,X)] = \sum_i f(L, x_i)P(x_i)$，这是一个关于 $L$ 的函数，在 $P(x_i)$ 已知的情况下，令 $\frac{dE[f(L,X)]}{dL}$=0，可求得 $L_2^*$。

（2）若 $X$ 为连续型：

$$E[f(L,X)]=\int_0^{\infty} f(L,x)p(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{L-Q_0}{r}} f(L,x)p(x)dx+\int_{\frac{L-Q_0}{r}}^{\frac{L}{r}} f(L,x)p(x)dx+\int_{\frac{L}{r}}^{\infty} f(L,x)p(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{L-Q_0}{r}} \frac{A-\frac{c_2 r}{2}(x-\frac{L}{r})^2-\frac{(c_3-c_2)r}{2}(\frac{L-Q_0}{r}-x)^2}{x+\frac{Q-L}{r}} p(x)dx$$

$$+\int_{\frac{L-Q_0}{r}}^{\frac{L}{r}} \frac{A-\frac{c_2 r}{2}(x-\frac{L}{r})^2}{x+\frac{Q-L}{r}} p(x)dx+\int_{\frac{L}{r}}^{\infty} \frac{A+c_4(x-\frac{L}{r})}{x+\frac{Q-L}{r}} p(x)dx$$

这是一个关于 $L$ 的函数。

令 $\frac{dE[f(L,X)]}{dL}$=0，即可求得 $L_2^*$。

通过 Maple 求 $\frac{dE[f(L,X)]}{dL}$ 有

$$\frac{dE[f(L,X)]}{dL}=\int_0^{\frac{L-Q_0}{r}} \frac{[c_2(x-\frac{L}{r})-(c_3-c_2)(\frac{L-Q_0}{r}-x)]p(x)}{x+\frac{Q-L}{r}}$$

$$+\frac{[c_1+\frac{c_2Q^2}{2r}+\frac{(c_3-c_2)(Q-Q_0)^2}{2r}-\frac{1}{2}c_2r(x-\frac{L}{r})^2-\frac{1}{2}(c_3-c_2)r(\frac{L-Q_0}{r}-x)^2]p(x)}{[x+\frac{Q-L}{r}]^2 r}dx$$

$$+\int_{\frac{L-Q_0}{r}}^{\frac{L}{r}} \frac{c_2(x-\frac{L}{r})p(x)}{x+\frac{Q-L}{r}}+\frac{[c_1+\frac{c_2Q^2}{2r}+\frac{(c_3-c_2)(Q-Q_0)^2}{2r}-\frac{1}{2}c_2r(x-\frac{L}{r})^2]p(x)}{[x+\frac{Q-L}{r}]^2 r}dx$$

$$+\int_{\frac{L}{r}}^{\infty}-\frac{c_4p(x)}{x+\frac{Q-L}{r}}+\frac{[c_1+\frac{c_2Q^2}{2r}+\frac{(c_3-c_2)(Q-Q_0)^2}{2r}+c_4r(x-\frac{L}{r})]p(x)}{(x+\frac{Q-L}{r})^2 r}dx \quad \textbf{(1.2)}$$

则最优订货点 $L_2^*$ 就是代入 **(1.2)** 中使之值为 0 的 $L$ 值。

第三步：

$$L^* = \begin{cases} L_1^* & E[f(L_1^*, X)] \le E[f(L_2^*, X)] \\ L_2^* & E[f(L_1^*, X)] > E[f(L_2^*, X)] \end{cases}$$

## （二）问题 2：

### 2.1 缺货天数的数据分析

这里首先要找出缺货天数 $X$ 服从何种分布，下面根据题目给出的到货天数的记录判断 $X$ 服从的分布。

我们采用单样本的 **K－S** 检验，它是一种拟合优度的非参数检验方法，利用样本的数据推断总体是否服从某一理论分布，它适用于探索连续型随机变量的分布形态。它可以将一个变量的实际频数分布与正态分布、均匀分布和指数分布进行比较。

这里以商品三的缺货天数为例来检验 $X$ 是否服从上述三种连续型分布。

**One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test**

| | | VAR00002 |
|---|---|---|
| N | | 61 |
| Normal Parameters [a,b] | Mean | 1.9508 |
| | Std. Deviation | 1.16084 |
| Most Extreme Differences | Absolute | .254 |
| | Positive | .254 |
| | Negative | -.206 |
| Kolmogorov-Smirnov Z | | 1.981 |
| Asymp. Sig. (2-tailed) | | .001 |

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

**One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test 2**

| | | VAR00002 |
|---|---|---|
| N | | 61 |
| Uniform Parameters [a,b] | Minimum | 1.00 |
| | Maximum | 6.00 |
| Most Extreme Differences | Absolute | .570 |
| | Positive | .570 |
| | Negative | -.016 |
| Kolmogorov-Smirnov Z | | 4.456 |
| Asymp. Sig. (2-tailed) | | .000 |

a. Test distribution is Uniform.

b. Calculated from data.

**One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test 3**

| | | VAR00002 |
|---|---|---|
| N | | 61 |
| Exponential parameter. [a,b] | Mean | 1.9508 |
| Most Extreme Differences | Absolute | .401 |
| | Positive | .129 |
| | Negative | -.401 |
| Kolmogorov-Smirnov Z | | 3.132 |
| Asymp. Sig. (2-tailed) | | .000 |

a. Test Distribution is Exponential.

b. Calculated from data.

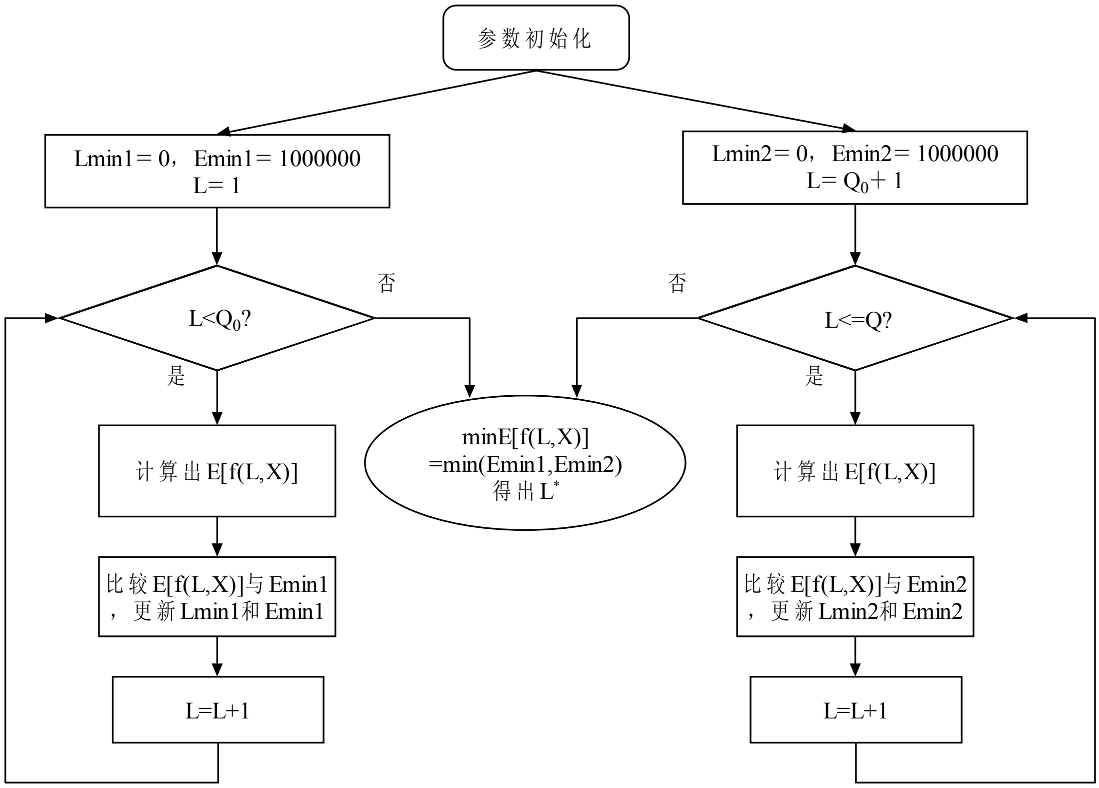
上面三张表分别体现的是检验缺货天数 $X$ 是否服从正态分布、均匀分布和指数分布，上述三表中的相伴概率值分别为 0.001，0.000 和 0.000，均小于 0.05，说明 $X$ 不服从上述三种连续型分布。

因此在这里我们就假定 $X$ 不是连续型的随机变量，另一方面，当我们假定 $X$ 是一离散型的随机变量时，可以大大简化实际问题的求解难度。

## 2.2 程序实现

考虑到问题 2 中 $L$ 是正整数，当 $0 < L \le Q_0$，则 $L$ 可能的取值最多为 $Q_0$ 个，则对每个 $L$ 的可能取值求其 $E[f(L\ ,X)]$，计算 $Q_0$ 次就可得到 $L_1^*$。这比 $\dfrac{dE[f(L,X)]}{dL}$=0，来求得 $L_1^*$ 更方便。

具体流程如下图：




其中 Lmin1 用来存储 $L_1^*$ 的值，Emin1 用来存储 $E[f(L_1^*,X)]$ 的值；Lmin2 用来存储 $L_2^*$ 的值，Emin2 用来存储 $E[f(L_2^*,X)]$ 的值。

对于商品一，我们通过连续的 36 次订货到达时间天数的数据得到：

| 到达天数 X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 出现频率 P(X) | $\frac{2}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{15}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

通过上述算法我们得出 $\min E[f(L,X)]=3.3878$， $L^*=36$。

对于商品二，我们通过连续的 43 次订货到达时间天数的数据得到：

| 到达天数 X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 出现频率 P(X) | $\frac{2}{43}$ | $\frac{23}{43}$ | $\frac{12}{43}$ | $\frac{5}{43}$ | $\frac{1}{43}$ |

通过上述算法我们得出$\min E[f(L,X)]=4.7353$，$L^*=45$。

对于商品三，我们通过连续的 61 次订货到达时间天数的数据得到：

| 到达天数 X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 出现频率 P(X) | $\frac{27}{61}$ | $\frac{20}{61}$ | $\frac{8}{61}$ | $\frac{3}{61}$ | $\frac{2}{61}$ | $\frac{1}{61}$ |

通过上述算法我们得出$\min E[f(L,X)]=10.55$，$L^*=34$。

## （三）问题 3

### 3.1 模型假设：

1．各种商品的订货时间是相同的，而且到货时间也是相同的；

2．供货量充足，保证到货后商品存贮体积能够补充到固定值$Q$，同时各种商品的存贮体积都能补充到各自的固定值$Q_i$；

3．商品的每天的销售是一个连续的状态，而不考虑成离散的状态。

### 3.2 符号说明：

$m$：商品的种类数

$r_i$：第$i$种商品的销售速率

$c_1$：每次进货的订货费，与商品的数量和品种无关

$c_{2i}$：第$i$种商品在使用自己的仓库存贮商品时，单位体积商品每天的存贮费用

$c_{3i}$：第$i$种商品在使用租用的仓库存贮商品时，单位体积商品每天的存贮费用

$c_{4i}$：第$i$种商品在缺货情况下，单位体积的商品每天的损失费用

$X$：到货时间，是一个随机变量，$m$种商品的交货时间都相同

$Q_{0i}$：第$i$种商品自己的仓库的体积容量

$Q_i$：第$i$种商品到货时存贮量补充到的固定体积

$Q_0$：自己的仓库用于存贮$m$种商品的总体积容量

$Q$ ：$m$ 种商品到货时存贮量补充到的总固定体积

$q$ ：$m$ 种商品的存贮量总体积

$L$ ：订货点，即 $m$ 种商品订货时商品所剩下的存贮量总体积

$L^*$ ：最优订货点，即使总损失费用达到最低的订货点

$L_i^*$ ：总损失费用达到最低时第 $i$ 种商品的订货点，且有 $L^* = \sum_{i=1}^{m} L_i^*$

$f_i(L_i, X)$ ：第 $i$ 种商品在一个订货周期内的平均总损失费用，是关于 $L_i$ 和 $X$ 的函数

$f(L, X)$ ：$m$ 种商品在一个订货周期内的平均总损失费用，有 $f(L, X) = \sum_{i=1}^{m} f_i(L, X)$

$p(x)$ ：到货时间 $X$ 的概率密度函数

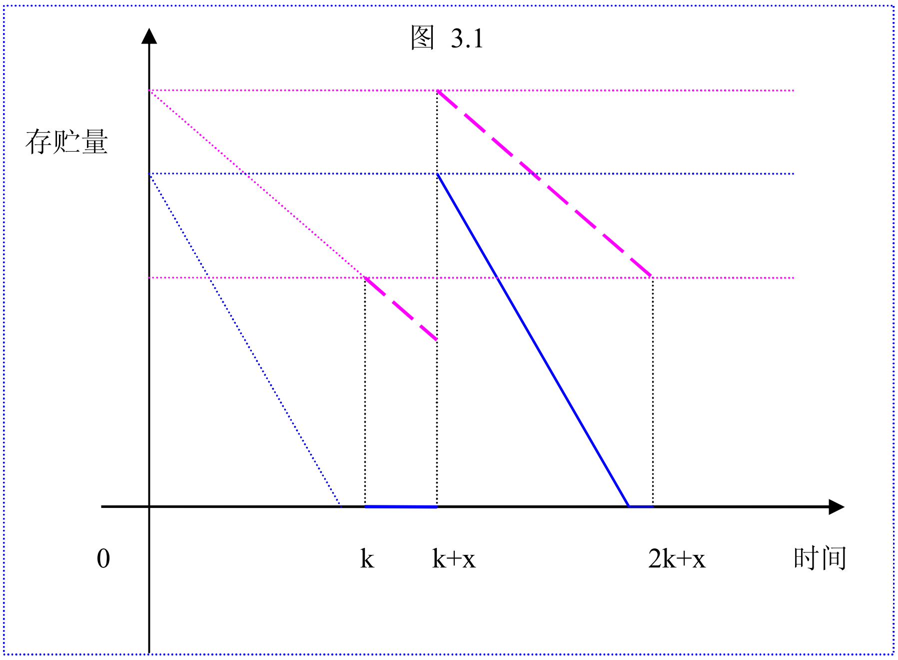
$E[f(L, X)]$ ：$m$ 种商品在一个订货周期内的平均总损失费用的期望

**3.4 模型建立：**

问题 3 是讨论多种商品需要订货的问题。但由于所有商品每次订货都是在同一时间从同一供应站订货，所以可以以问题 1 中的单一商品存贮模型为基础，建立多种商品的随机存贮模型。但必须注意，问题 1 模型的考虑是以商品的数量为基准的，而问题 3 的模型是以商品的体积为基准考虑。

先说明当 $L$ 固定，$Q_i$ 固定时候，任意次当存贮量 $q$ 降到 $L$ 时即任意次开始订货的时候，此时每种商品的存贮量 $L_i$ 是固定不变的。

解释如下：




见图 3.1：设 $t=0$ 时所有商品的存贮量为 $Q_i$，经过 $k$ 时间，总商品存贮量首次降到 $L$，此时各商品的存储量为 $L_i=\max(-r_i k+Q_i,0)$，开始订货。过了 $x$ 时间，货到，各商品的存贮量又为 $Q_i$，则以 $x$ 时刻为起点，经过 $k$ 时间总商品的存贮量将首次到达 $L$，此时各商品的存储量为 $L_i$，由图易知对于同一商品 $L_i$ 不变。

因为各种商品的订货时间是相同则可得到：

$$\begin{cases} \dfrac{Q_1-L_1}{v_1 r_1}=\dfrac{Q_2-L_2}{v_2 r_2}=\ldots=\dfrac{Q_i-L_i}{v_i r_i}=k \quad（当L_i>0时） \\ \dfrac{Q_i-L_i}{v_i r_i}\le k（当L_i=0时） \end{cases}$$

所以 $k=\max\left(\dfrac{Q_i-L_i}{r_i}\right) \quad 1\le i\le m$

针对 $L_i$ 的不同取值范围，分三情况进行讨论。

情况 1：当 $L_i=0$ 时，其费用 $f_i(L_i,X)$ 函数如下：

$$f_i(L_i,X)=\frac{\dfrac{c_{2i}Q_i^2}{2v_i r_i}+\dfrac{(c_{3i}-c_{2i})(Q_i-Q_{0i})^2}{2v_i r_i}+c_4 v_i r_i X}{k+X}$$

情况 2：当 $L_i\le Q_{0i}$ 时，参照第一个问题，其费用 $f_i(L_i,X)$ 函数如下，

$$f_i(L_i,X)=\begin{cases}\dfrac{A_i+c_{4i}v_ir_i(X-\dfrac{L_i}{v_ir_i})}{X+\dfrac{Q_i-L_i}{v_ir_i}} & X>\dfrac{L_i}{v_ir_i}\\ \dfrac{A_i-\dfrac{1}{2}c_{2i}v_ir_i(X-\dfrac{L_i}{v_ir_i})^2}{X+\dfrac{Q_i-L_i}{v_ir_i}} & X\le\dfrac{L_i}{v_ir_i}\end{cases} \quad \textbf{(3.1)}$$

其中 $A_i=c_1+\dfrac{c_{2i}Q_i^2}{2v_ir_i}+\dfrac{(c_{3i}-c_{2i})(Q_i-Q_{0i})^2}{2v_ir_i}$

情况 2：当 $L_i>Q_{0i}$ 时：

$$f_i(L_i,X)=\begin{cases}\dfrac{A_i-\dfrac{c_{2i}v_ir_i}{2}(X-\dfrac{L_i}{v_ir_i})^2-\dfrac{(c_{3i}-c_{2i})v_ir_i}{2}(\dfrac{L_i-Q_{0i}}{v_ir_i}-X)^2}{X+\dfrac{Q_i-L_i}{v_ir_i}} & 0\le X\le\dfrac{L_i-Q_{0i}}{v_ir_i}\\ \dfrac{A_i-\dfrac{c_{2i}v_ir_i}{2}(X-\dfrac{L_i}{v_ir_i})^2}{X+\dfrac{Q_i-L_i}{v_ir_i}} & \dfrac{L_i-Q_{0i}}{v_ir_i}<X\le\dfrac{L_i}{v_ir_i}\\ \dfrac{A_i+c_{4i}v_ir_i(X-\dfrac{L_i}{v_ir_i})}{X+\dfrac{Q_i-L_i}{v_ir_i}} & X>\dfrac{L_i}{v_ir_i}\end{cases} \quad \textbf{(3.2)}$$

$$f(L,X)=\sum_{i=1}^{m}f_i(L_i,X)$$

则原题化为求 $L^*$ 满足：

$$E[f(L^*,X)]=\min E[f(L,X)]=\int_0^\infty\sum_{i=1}^{m}f_i(L_i,x)p(x)dx$$

且这个多种商品的随机存贮模型同时满足下列几个约束条件：

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
\sum_{i=1}^{m} Q_{0i} = Q_0 \\
\sum_{i=1}^{m} Q_i = Q \\
\sum_{i=1}^{m} L_i = L \\
\frac{Q_1 - L_1}{v_1 r_1} = \frac{Q_2 - L_2}{v_2 r_2} = \ldots = \frac{Q_i - L_i}{v_i r_i} = k \text{（当} L_i > 0 \text{时）} \\
\frac{Q_i - L_i}{v_i r_i} \le k \text{（当} L_i = 0 \text{时）}
\end{cases}
$$

但由于 $X$ 的分布未知，同时 $Q_i$ 和 $Q_{0i}$ 都是未知量；而且在问题 1 的单品种存贮模型中我们知道 $L^*$ 的求解是十分困难的。所以对于多品种商品的存贮问题，直接解上面的模型是十分困难的。同时 $L_i = 0$ 情况的存在，增加了其求解难度。因此在实际问题的解决中，我们可以用上面的模型作为基础，并假设 $L_i > 0$ 对任意的 $i$ 都成立，即排除 $L_i = 0$ 的情况，通过计算机编程，建立类似于问题 2 中的合适算法求解上述模型。在问题 4 的解决中我们可以看到这样的解题思路。

## （四）问题 4：

### 4.1 问题分析

由于货物到达商场的时间 $X$ 是整数，所以可以认为 $X$ 服从 1 天到 3 天之间的均匀分布实际上是一种离散分布，等价于 $P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = \frac{1}{3}$。问题 2 中原来的商品单价是以商品的个数为单位考虑的；而要利用问题 3 中的多品种商品存贮模型，则必须以商品的体积为单位进行考虑，所以我们对问题 2 中损失费用的单价进行转化处理，将它除以每单位商品的体积得到模型所需要的单价，如下表：

| | $c_{2i}$ | $c_{3i}$ | $c_{4i}$ |
|---|---|---|---|
| 商品一 $(i=1)$ | 0.2 | 0.4 | 19 |
| 商品二 $(i=2)$ | 0.75 | 1 | 37.5 |
| 商品三 $(i=3)$ | 0.6 | 0.8 | 12.5 |

由于每种商品的个数是有限的，所以我们可以参照问题 2 中的求解办法，采用遍历搜索算法。但是由于$Q_i$和$Q_{0i}$都是未知量，这对于我们利用（**3.1**）以及（**3.2**）进行遍历搜索的求解增加了很大难度。所以我们可以对$Q_i$和$Q_{0i}$也进行遍历搜索，对于搜索的每一个$Q_i$和$Q_{0i}$，作为已知参数，然后利用问题 2 的模型求解$L^*$。

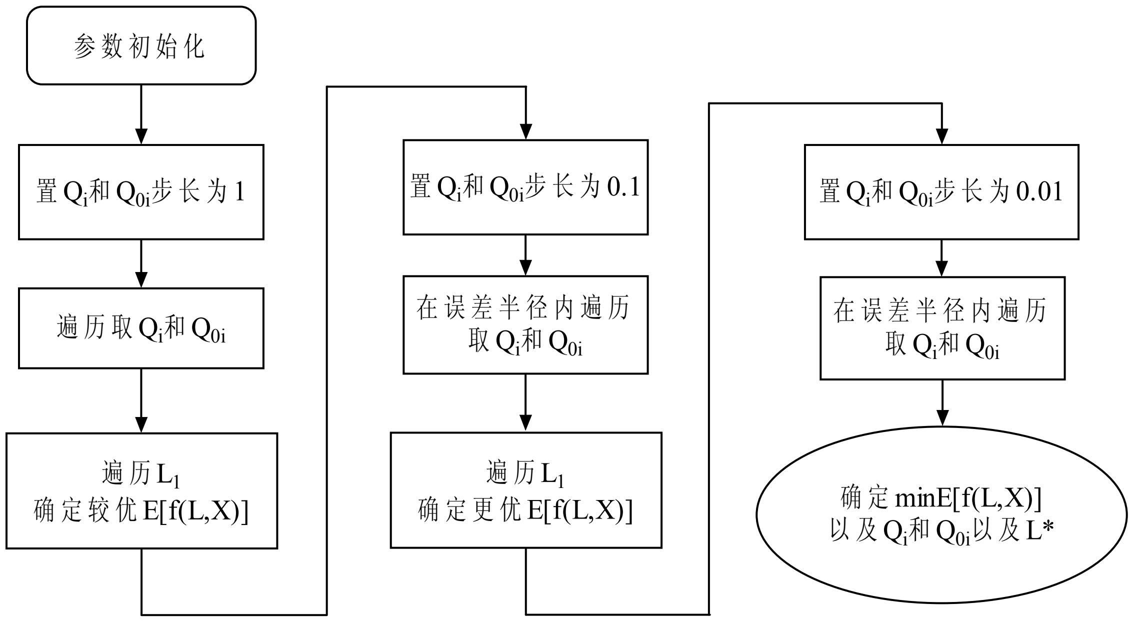
**4.2 优化的$Q_i$和$Q_{0i}$的遍历搜索算法：**

在这个问题中，$Q_i$和$Q_{0i}$ $(i=1,2,3)$ 总共有六个参数，那么在算法中就起码有六次嵌套的循环。$Q_i < Q = 10$，所以如果以 0.01 为循环的步长，那么光一个$Q_i$的搜索就有 1000 次循环，$Q_i$和$Q_{0i}$总共的循环次数大约 10 的 36 次方，运算的次数和时间是非常惊人的，也让计算机无法承受。因此，我们对遍历搜索算法进行改进。先使步长为 1，则总循环次数不超过 10 的 6 次方，通过对$Q_i$和$Q_{0i}$进行遍历，然后再遍历$L_i^*$，求得较优的$E[f(L,X)]$以及确定对应的$Q_i$和$Q_{0i}$。由于是以步长 1 进行遍历搜索，所以$Q_i$和$Q_{0i}$的误差半径不超过 1。然后我们再取步长为 0.1，对$Q_i$和$Q_{0i}$在 1 的误差半径的范围内进行遍历搜索，则每一重的循环次数不超过 20，求得更优的$E[f(L,X)]$以及确定对应的$Q_i$和$Q_{0i}$。由于第二次是以步长 0.1 进行遍历搜索，所以$Q_i$和$Q_{0i}$的误差半径不超过 0.1。最后又以步长 0.01 对$Q_i$和$Q_{0i}$在 0.1 的误差半径的范围内进行遍历搜索，同样每次循环次数不超过 20，这样我们最后求得了$\min E[f(L,X)]$以及确定对应的$Q_i$，$Q_{0i}$以及$L^*$。

**4.3 $L^*$的遍历搜索求解：**

在进行$Q_i$和$Q_{0i}$的每一次遍历取值以后，我们可以对每一个$L_i$进行遍历求解。因为我们有等式$\dfrac{Q_i - L_i}{v_i r_i} = k \quad i = 1,2,..m$，所以我们实际上只需要对$L_1$进行遍历，而$L_2$和$L_3$都可以通过这个等式确定。通过循环比较可以求得最优解$\min E[f(L,X)]$以及$L^*$。

大致的算法流程如下图：




通过 matlab 编程求解，最后解得 $E[f(L^*,X)]=\min E[f(L,X)]=17.494$，$L^*=7.3333$，$L_1^*=1.55$，$L_2^*=1.8$，$L_3^*=3.9833$，$Q_1=2.05$，$Q_2=2.30$，$Q_3=5.65$，$Q_{01}=1.27$，$Q_{02}=1.68$，$Q_{03}=3.05$。

## (五) 问题 5:

### 5.1 问题假设:

为了方便讨论，我们只考虑一种商品的随机存贮模型。并在问题 1 的基础上补充了以下假定：

1. 订货情况 $c_1=c(t)$，即 $c_1$ 是一个与 $t$ 有关的函数，而且具有周期性，周期为 $T$。
2. 一般来说，商品的销售速率 $\{R_t\}$ 是一个随机的马氏链过程，并且同样具有周期性，周期也为 $T$；因为 $\{R_t\}$ 具有马氏性，所以是一个在周期 $T$ 内时间、状态均为离散的随机转移过程。
3. $X$ 的概率分布 $P_X(x)$ 是离散的。

### 5.2 模型建立:

因为 $\{R_t\}$ 是马氏过程，所以 $P(R_{t+1}=r_{t+1}\mid R_1=r_1,\dots R_t=r_t)=P(R_{t+1}=r_{t+1}\mid R_t=r_t)$，

即$R_t$的分布只与上一时刻的$R_t$取值有关。

因为$R_t$的取值状态是离散的，所以$R_t$的分布是离散型的，并且取值的集合有限，设为$R$。则对于每一个$t$，$R_t$的分布为$P_{R_t}(r)$。

由于总损失费用与$c_1$有关，而$c_1 = c(t)$是跟时间$t$有关的；同时总损失费用也和$R_t$有关，所以可以设总损失费用函数为$f_t(L,R_t,X)$。

首先对$f_t(L,R_t,X)$关于$X$求期望$E_X[f_t(L,R_t,X)]=\sum_{x=0}^{\infty} f_t(L,R_t,x)P_X(x)$，再对$E[f(L_t,R_t,X)]$关于$R_t$求期望$E_{R_t}(E_X[f_t(L,R_t,X)])$，再令$g(L)=\min_{t\in T} E_{R_t}(E_X[f_t(L,R_t,X)])$。则模型的求解就化为求$L^*$使得$g(L^*)=\min g(L)$。

当然，这一模型只是建立了一个基本的理论框架基础，具体模型的建立必须结合实际的问题，同时在模型成功建立的例子上能否求解出$L^*$还必须结合问题的复杂性以及有关参数的分布和取值。

## 三、模型的评价和推广

本文建立了一个关于随机存贮的理论模型，为便于实际问题的求解，还另外给出了一个遍历搜索算法。前者具有一定的理论基础，后者采用前者的思想，全局寻优，给出了实际问题的最优解。在求解问题 2 时，由于遍历搜索的可行性，获得的是全局最优解。而在采用该算法在解决问题 4 时，由于商品品种较多，采取全局遍历搜索的算法会十分耗时而且难以实现，所以采用了修正步长的优化的遍历搜索算法，所以最终求得的结果是一接近全局最优的近似解，其结果的误差小于 0.01。这一方法可以推广到少量品种的随机存贮管理的情况。但是这一算法在随机存贮的商品品种较多的情况下运算量将非常大，要根据实际情况进行修改。

参考文献：

【1】陈有禄 罗秋兰．仓库容量有限条件下的一类存贮管理模型．数学的实践与认识，2004． 6

【2】周宏．订货点决策模拟研究．系统仿真学报，2004．1

【3】杜世田．多品种随机存贮模型的存贮策略．山东工业大学学报 2001．2

【4】陈同英．原木随机存贮策略的最优化问题．运筹与管理，2002．1

【5】姜启源著．数学模型（第二版）．北京：高等教育出版社，2002．6

【6】钱敏平 龚光鲁著．随机过程论．北京：北京大学出版社，1992．10

## 附录：

程序代码：

```
%求解问题 2  商品一
prob=[2/36 4/36 5/36 15/36 5/36 3/36 1/36 1/36];
r=12;
c1=10;
c2=0.01;
c3=0.02;
c4=0.95;
Q0=40;
Q=60;
A=c1+c2*Q^2/(2*r)+(c3-c2)*(Q-Q0)^2/(2*r);
Emin1=1000000;
Lmin1=0;
for L=1:Q0
    sum=0;
    for X=0:length(prob)-1
        if (X>L/r)
            temp=(A+c4*r*(X-L/r))/(X+(Q-L)/r)*prob(X+1);
        else
            temp=(A-c2*r/2*(X-L/r)^2)/(X+(Q-L)/r)*prob(X+1);
        end;
        sum=sum+temp;
    end;
    if (sum<Emin1)
        Lmin1=L;
        Emin1=sum;
    end;
end;

Emin2=1000000;
Lmin2=0;
for L=Q0+1:Q
    sum=0;
    for X=0:length(prob)-1
        if (X>L/r)
            temp=(A+c4*r*(X-L/r))/(X+(Q-L)/r)*prob(X+1);
        else
            temp=(A-c2*r/2*(X-L/r)^2)/(X+(Q-L)/r)*prob(X+1);
        end;
        sum=sum+temp;
    end;
```

```
        if (sum<Emin2)
                Lmin2=L;
                Emin2=sum;
        end;
end;

if (Emin1<Emin2)
        Emin=Emin1;
        Lmin=Lmin1;
else
        Emin=Emin2;
        Lmin=Lmin2;
end;
```

```
%求解问题 2 商品二
prob=[2/43 23/43 12/43 5/43 1/43];
r=15;
c1=10;
c2=0.03;
c3=0.04;
c4=1.5;
Q0=40;
Q=60;
A=c1+c2*Q^2/(2*r)+(c3-c2)*(Q-Q0)^2/(2*r);
Emin1=1000000;
Lmin1=0;
for L=1:Q0
    sum=0;
    for X=1:length(prob)
        if (X>L/r)
            temp=(A+c4*r*(X-L/r))/(X+(Q-L)/r)*prob(X);
        else
            temp=(A-c2*r/2*(X-L/r)^2)/(X+(Q-L)/r)*prob(X);
        end;
        sum=sum+temp;
    end;
    if (sum<Emin1)
        Lmin1=L;
        Emin1=sum;
    end;
end;

Emin2=1000000;
Lmin2=0;
for L=Q0+1:Q
    sum=0;
    for X=1:5
        if (X>L/r)
            temp=(A+c4*r*(X-L/r))/(X+(Q-L)/r)*prob(X);
        else if (X<=L/r & X>(L-Q0)/r)
            temp=(A-c2*r/2*(X-L/r)^2)/(X+(Q-L)/r)*prob(X);
              else
            temp=(A-c2*r/2*(X-L/r)^2-(c3-c2)*r/2*((L-Q0)/r-X)^2)/(X+(Q-L)/r)*prob(X);
              end;
        end;
        sum=sum+temp;
    end;
    if (sum<Emin2)
```

```
            Lmin2=L;
            Emin2=sum;
        end;
end;

if (Emin1<Emin2)
        Emin=Emin1;
        Lmin=Lmin1;
else
        Emin=Emin2;
        Lmin=Lmin2;
end;
```

```
%求解问题 2 商品三
prob=[27/61 20/61 8/61 3/61 2/61 1/61];
r=20;
c1=10;
c2=0.06;
c3=0.08;
c4=1.25;
Q0=20;
Q=40;
A=c1+c2*Q^2/(2*r)+(c3-c2)*(Q-Q0)^2/(2*r);

Emin1=1000000;
Lmin1=0;
for L=1:Q0
    sum=0;
    for X=1:length(prob)
        if (X>L/r)
            temp=(A+c4*r*(X-L/r))/(X+(Q-L)/r)*prob(X);
        else
            temp=(A-c2*r/2*(X-L/r)^2)/(X+(Q-L)/r)*prob(X);
        end;
        sum=sum+temp;
    end;
    if (sum<Emin1)
        Lmin1=L;
        Emin1=sum;
    end;
end;

Emin2=1000000;
Lmin2=0;
for L=Q0+1:Q
    sum=0;
    for X=1:6
        if (X>L/r)
            temp=(A+c4*r*(X-L/r))/(X+(Q-L)/r)*prob(X);
        else if (X<=L/r & X>(L-Q0)/r)
            temp=(A-c2*r/2*(X-L/r)^2)/(X+(Q-L)/r)*prob(X);
             else
            temp=(A-c2*r/2*(X-L/r)^2-(c3-c2)*r/2*((L-Q0)/r-X)^2)/(X+(Q-L)/r)*prob(X);
             end;
        end;
        sum=sum+temp;
    end;
```

```
    if (sum<Emin2)
        Lmin2=L;
        Emin2=sum;
    end;
end;

if (Emin1<Emin2)
    Emin=Emin1;
    Lmin=Lmin1;
else
    Emin=Emin2;
    Lmin=Lmin2;
end;
```

```
%求解问题 4
%参数初始化
r=[12 15 20];
%c 矩阵   行：c1,c2,c3,c4；列：商品 1，2，3
c=[10 10 10;
    0.01 0.03 0.06;
    0.02 0.04 0.08;
    0.95 1.50 1.25];
v=[0.05 0.04 0.1];
Q=zeros(1,3);
Q0=zeros(1,3);
L=zeros(1,3);
EL=zeros(1,3);
EQ=zeros(1,3);
EQ0=zeros(1,3);
EK=zeros(1,3);
LL=0;
TQ0=6;
TQ=10;

%X 的分布列
prob=[1/3 1/3 1/3];

%程序开始
Emin=100000000;
Lmin=0;
for Q1=1:1:10                                      %遍历 Q1
     Q(1)=Q1;
     for Q2=1:1:TQ-Q(1)                            %遍历 Q2
          Q(2)=Q2;
          for Q3=1:1:TQ-Q(1)-Q(2)                  %遍历 Q3
               Q(3)=Q3;
               for Q01=1:1:min(6,Q(1))             %遍历 Q0_1
                    Q0(1)=Q01;
                    for Q02=1:1:min([6,Q(2),TQ0-Q0(1)])         %遍历 Q0_2
                         Q0(2)=Q02;
                         for Q03=1:1:min([6,Q(3),TQ0-Q0(1)-Q0(2)])     %遍历 Q0_3
                              Q0(3)=Q03;
                              for K1=1:10:min(200,fix(Q(1)/v(1)))      %遍历商品一的数目
                                   L(1)=K1*v(1);
                     for K2=1:10:min(fix((Q-L(1))/v(2)),fix(Q(2)/v(2)))   %遍历商品二的数目
                                       L(2)=K2*v(2);
                     for K3=1:10:min(fix((Q-L(1)-L(2))/v(3)),fix(Q(3)/v(3)))   %遍历商品三的数目
                                            L(3)=K3*v(3);
```

```
LL=L(1)+L(2)+L(3);
total=0;                                %初始化期望
for i=1:3
    sum=0;

A=c(1,i)+c(2,i)*Q(i)^2/(2*v(i)^2*r(i))+(c(3,i)-c(2,i))*(Q(i)-Q0(i))^2/(2*v(i)^2*r(i));
    for X=1:3
     if (X>L(i)/(v(i)*r(i)))

temp=(A+c(4,i)*r(i)*(X-L(i)/(v(i)*r(i))))/(X+(Q(i)-L(i))/(v(i)*r(i)))*prob(X);
      else
    temp=(A-c(2,i)*r(i)/2*(X-L(i)/(v(i)*r(i)))^2)/(X+(Q(i)-L(i))/(v(i)*r(i)))*prob(X);
     end;
         sum=sum+temp;
    end;
    total=total+sum;
end;
if total<Emin
    EQ0=Q0;
    EQ=Q;
    EL=L;
    Emin=total;
    EK(1)=K1;
    EK(2)=K2;
    EK(3)=K3;
    Lmin=LL;
end;
                        end;
                    end;
                end;
            end;
        end;
    end;
  end;
 end;
end;
```