

# 全国第四届研究生数学建模竞赛



题号     B    

## 题目 机械臂运动路径规划的算法设计

### 摘 要：

本文首先采用刚体力学经典的坐标变换方法，得出机械臂指尖关于六个角度的函数关系。具体地讲，关节相对基点坐标系的位置可以表示成若干个仅和各旋转角相关的广义坐标变换矩阵的乘积。

对于第一类移动问题，我们发现若令转角  $G$  恒为 0，同时保持 DE 杆垂直向下，则其余的各个角度都可以由指尖的坐标来完全确定。由此我们设计出一种简单点到点算法。这种算法主要的特点是简便易操作。我们由此计算出第一个抓取工具的任务所需要 66 步指令。

对于曲线跟踪问题，我们设计了一种快速的避障跟踪算法。此算法具有广的应用范围，不仅能解决题目中跟踪圆台外侧曲线的问题，还可以跟踪存在于更为复杂的障碍物中的曲线。由于速度快，此算法可以在线计算。由此计算出圆台外部曲线任务需要的指令数为 1591 步，能够成功的保持机械臂在曲线的外围旋转而不会相碰。

对于障碍物较为复杂的情形，我们对比了目前比较热门的避障问题研究方法。最后结合本题的实际情况，借助了人工势场法的思想。通过引入目标点对机械手的“引力”和障碍物对机械手的“斥力”，设计出一种启发式避障寻优算法。这种算法的特点是能够从全局的角度寻优，从而能处理障碍物较为复杂的情形，也可根据需要设定不同的容许误差。当我们设定容许误差为 0.2 时，从初始位置出发完成四个焊接任务并返回初始点的总的指令步数为 389。

最后我们机械臂的可达空间，建立起连杆和旋转角的参数优化模型，并结合本文中所设计的算法，对机构的优化设计给出了 5 点建议。

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

参赛队号     1056108    

参赛学校     华南理工大学    

参赛队员姓名     10561081 朱猛    10561082 邓国兴    10561083 姜宇

## 机械臂运动路径规划的算法设计

**摘要:** 本文首先采用刚体力学经典的坐标变换方法, 得出机械臂指尖关于六个角度的函数关系。具体地讲, 关节相对基点坐标系的位置可以表示成若干个仅和各旋转角相关的广义坐标变换矩阵的乘积。

对于第一类移动问题, 我们发现若令转角  $G$  恒为 0, 同时保持 DE 杆垂直向下, 则其余的各个角度都可以由指尖的坐标来完全确定。由此我们设计出一种简单点到点算法。这种算法主要的特点是简便易操作。我们由此计算出第一个抓取工具的任务所需要 66 步指令。

对于曲线跟踪问题, 我们设计了一种快速的避障跟踪算法。此算法具有广的应用范围, 不仅能解决题目中跟踪圆台外侧曲线的问题, 还可以跟踪存在于更为复杂的障碍物中的曲线。由于速度快, 此算法可以在线计算。由此计算出圆台外部曲线任务需要的指令数为 1591 步, 能够成功的保持机械臂在曲线的外围旋转而不会相碰。

对于障碍物较为复杂的情形, 我们对比了目前比较热门的避障问题研究方法。最后结合本题的实际情况, 借助了人工势场法的思想。通过引入目标点对机械手的“引力”和障碍物对机械手的“斥力”, 设计出一种启发式避障寻优算法。这种算法的特点是能够从全局的角度寻优, 从而能处理障碍物较为复杂的情形, 也可根据需要设定不同的容许误差。当我们设定容许误差为 0.2 时, 从初始位置出发完成四个焊接任务并返回初始点的总的指令步数为 389。

最后我们根据机械臂的可达空间, 建立起连杆和旋转角的参数优化模型, 并结合本文中设计的算法, 对机构的优化设计给出了 5 点建议。

**关键词:** 齐次坐标变换; 避障问题; 路径规划; 曲线跟踪; 人工势场; 机械优化设计

## 目 录

1. 概述 .....	3
2. 问题分析 .....	3
3. 假设与符号约定 .....	4
3.1 基本假设以及假设说明 .....	4
3.2 符号约定 .....	4
4. 机械臂运动路径模型的建立 .....	5
4.1 机械臂坐标转换 .....	5
4.2 简单点到点运动模型 .....	6
4.2.1 约束自由度 .....	6
4.2.2 指令产生算法 .....	7
4.3 指尖曲线跟踪问题 .....	8
4.3.1 思路分析 .....	8
4.3.2 算法思想 .....	8
4.3.3 曲线跟踪算法描述 .....	9
4.4 机械臂避障模型及算法 .....	10
4.4.1 问题分析 .....	10
4.4.2 模型建立 .....	10
4.4.3 启发式避障算法描述 .....	12
5. 机械臂运动路径算法的应用 .....	12
5.1 简单点对点运动算法应用 .....	12
5.2 指尖曲线运动算法应用 .....	13
5.3 机械臂避障算法应用 .....	14
5.3.1 几何空间分析 .....	14
5.3.2 路径阶段划分 .....	14
5.3.3 数值仿真 .....	15
5.3.4 人工势场分析 .....	16
6. 机械臂参数优化模型 .....	17
6.1 问题分析 .....	17
6.2 机械臂参数优化模型建立 .....	17
6.3 机械臂参数优化的建议 .....	18
7. 算法的评价与改进 .....	18
7.1 简单点对点算法 .....	18
7.2 曲线跟踪避障算法 .....	19
7.3 启发式避障算法 .....	19
7.4 算法的改进与延伸 .....	19
8. 结束语 .....	20
参考文献 .....	21

## 1. 概述

六自由度的关节式机械人在当今工业界有广泛应用。它分别由六个旋转轴进行操纵，其末端可以灵活地在三维空间中运动。根据旋转的方向不同，旋转轴分为平行于连杆和垂直连杆的两类关节。题目中所给出的简化机械臂模型可以归类为由步进式电机进行操纵的设备，这种操纵的优点是稳定而可靠，但是缺点在于步长是离散化的，可能会对精度造成影响[1]，[2]，[3]。

本论文中，我们将会对题目中所给的特定的六自由度机械手臂设计一整套通用的算法。让它能够实现点到点移动，有障碍的曲线跟踪，和避障点对点移动三种基本功能。并能自动生成控制台所需要的指令序列。本文的全部程序都使用科学计算软件 MATLAB 进行编写。

最后我们会对模型的适用范围和准确性进行评价。

## 2. 问题分析

首先我们可以通过刚体力学经典的坐标变换方法，建立起机械臂末端关于各旋转角度的函数关系。关节相对基点坐标系的位置可以表示成若干个仅和各旋转角相关的广义坐标变换矩阵的乘积[4]。

对于第一类移动问题。我们先考虑最简单的情况，也就是在没有障碍物情形下的点对点移动算法。此时可以做这样的简化，即  $\theta_4 \equiv 0$ ，且保持 DE 杆垂直向下。这样的话，其余的各个角度可以由机械臂末端的对地面参考系的坐标来完全确定。接着我们需要设计一个产生控制代码的函数，可以根据两点间的位置直接得出所需要的控制代码，这个算法在后面几个问题的解决过程中都需要应用。

对于曲线跟踪问题，考虑实际应用，我们将设计一种快速的避障跟踪算法。此算法应当具有较广的适用范围，可以跟踪诸如存在于物体外部或内部的曲线，或者更复杂的曲线。

对于障碍物较为复杂时的情形，我们参考了目前比较热门的避障问题研究方法。最后结合本题的实际情况，选择人工势场法的思想。本文将会通过引入目标点对机械手的“引力”和障碍物对机械手的“斥力”，设计出一种启发式避障寻优算法。并制定出一种根据目标距离对步长的级别进行划分的规则来减小搜索时间。

最后我们通过研究机械臂的可达空间，建立优化模型，并给出调整臂长和转角限制的建议。

### 3. 假设与符号约定

#### 3.1 基本假设以及假设说明

- 此机械臂采用步进电机进行控制，假设控制电机的角度是绝对准确的。

目前工业界所用的一般的加工机床等设备都采用数字控制技术，在调整机器人运动时常用的是步进式电机带动，这种电机的优点在于可以稳定的准确运转到指定的角度，但是由于步长是预先设定好的，所以在加工时可能会有无法到达的角度，而产生误差[5]。

- 每次角度变化后，都能准确的停在下一个所需的角度的。不考虑每次转动时的惯性，以及所产生的加速度。

根据步进电机采用的电磁原理可以很明显的看出，每次电机转动后，都能停到指定的位置，如果由于惯性超过了指定角度，会在磁力的作用下反向运转回准确位置[6]。

- 简化起见，忽略机器臂末端所持工具的长度和形状，只将其作为一个点来考虑。

根据题目中所要求，我们不考虑末端所持工具的长度，或者可以假设工具长度忽略不计。另一方面题目也未说明所持工具的大小。所以我们只将其作为一个点来考虑。

- 每个指定发出后，在机器臂停稳在所要求的姿态位置时，才发出下一个控制指令。

如果机器臂没有停稳就发出下一个指定的话，显然会造成严重的误差。因此我们可以假设在操作过程中，完成指令所需的时间要小于指令周期的长度[7]。

#### 3.2 符号约定

表 1 主要符号

符号	意义
$\theta$	由 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ 组成的六维列向量，分别表示六个关节的角度
$C_x, C_y, C_z$	$C$ 点相对于地面坐标系的坐标
$D_x, D_y, D_z$	$D$ 点相对于地面坐标系的坐标
$E_x, E_y, E_z$	$E$ 点相对于地面坐标系的坐标
$O$	圆台上表面的中心点 (210,0,180)

## 4. 机械臂运动路径模型的建立

为了产生点到点的运动序列, 首先我们需要引入机器人学中的坐标变换方法来建立起关节的对地直角坐标和各旋转角度之间的函数关系[8]。

### 4.1 机械臂坐标转换

因为机械臂的连杆可看成是刚性的, 所以我们就可从刚体入手来描述它的位姿。刚体参考点的位置和刚体的姿态统称为刚体的位姿, 本论文中采用齐次变换法[8], [9]来转换处在不同坐标系中的各关节位置。

对于广义的连杆, 需要用两个参数来描述一个连杆, 即公共法线距离  $a_i$  和垂直于  $a_i$  所在平面内两轴的夹角  $\alpha_i$ ; 需要另外两个参数来表示相邻两杆的关系, 即两连杆的相对位置  $d_i$  和两连杆法线的夹角  $\theta_i$ 。一旦对全部连杆坐标系规定之后, 就能够按照下列顺序由两个旋转和两个平移来建立相邻两连杆  $i-1$  与  $i$  之间的相对关系。这种关系可由表示连杆  $i$  对连杆  $i-1$  相对位置的四个齐次变换来描述, 并定义为  $A_i$  矩阵。此关系式为

$$A_i = Rot(z, \theta_i) Trans(0, 0, d_i) Trans(a_i, 0, 0) Rot(x, \alpha_i) \quad (1)$$

机械手的末端即为连杆6的坐标系, 它与连杆  $i-1$  坐标系的关系可由  ${}^{i-1}T_6$  表示为

$${}^{i-1}T_6 = A_i A_{i+1} \dots A_6 \quad (2)$$

对于题中给出的特殊情形, 即用七条直线段表示机器人的七个连杆, 连杆之间用所谓的旋转关节连接。即得出广义变换矩阵中的  $a_i = L_{i,i-1}$ ,  $\alpha_i = 0$ ,  $d_i = L_{i,i-1}$ , 因此, 题中机械臂  $i$  关节坐标系相对于  $i-1$  关系坐标系的转换矩阵如下式

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_{AB} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) & -\cos\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta_3 - \frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\theta_3 - \frac{\pi}{2}\right) & 0 & L_{BC} \\ \sin\left(\theta_3 - \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta_3 - \frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} \cos\theta_4 & \sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_{CD} \\ -\sin\theta_4 & -\cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta_5 + \frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\theta_5 + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\left(\theta_5 + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta_5 + \frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} \cos\theta_6 & \sin\theta_6 & 0 & L_{DE} \\ -\sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因而，机械臂指尖坐标在  $\{A\}$  坐标系中即可如下转换：

$$T_6 = A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6 \quad (3)$$

以  $s_i, i \in 1 \rightarrow 6; c_i, i \in 1 \rightarrow 6$  简化表示  $\sin\theta_i, \cos\theta_i$ ，因此上式的计算结果如下：

$$E_x = \{-(s_1s_2s_3 - s_1c_2c_3)c_4 - c_1s_4\}s_5 + [s_1s_2c_3 + s_1c_2s_3]c_5\}l_{DE} \\ + (s_1s_2c_3 + s_1c_2s_3)l_{CD} + s_1s_2l_{BC} \quad (4)$$

$$E_y = \{-(c_1s_2s_3 - c_1c_2c_3)c_4 + s_1s_4\}s_5 + (c_1s_2c_3 + c_1c_2s_3)c_5\}l_{DE} \\ + (c_1s_2c_3 + c_1c_2s_3)l_{CD} + c_1s_2l_{BC} \quad (5)$$

$$E_z = \{-(c_2s_3 + s_2c_3)c_4 - s_4\}s_5 + (c_2c_3 - s_2s_3)c_5\}l_{DE} \\ + (c_2c_3 - s_2s_3)l_{CD} + c_2l_{BC} + l_{AB} \quad (6)$$

程序附件中的 robot.m 是我们编制的用六个角度来求指尖位置的函数。有了这一工具，我们就可以展开进行后面的分析。

## 4.2 简单点到点运动模型

### 4.2.1 约束自由度

我们注意到，当设定  $\theta_4 = 0$ ，则此时  $D$  的对地坐标可以唯一确定  $\theta_1, \theta_2$  和  $\theta_3$ ，如图：

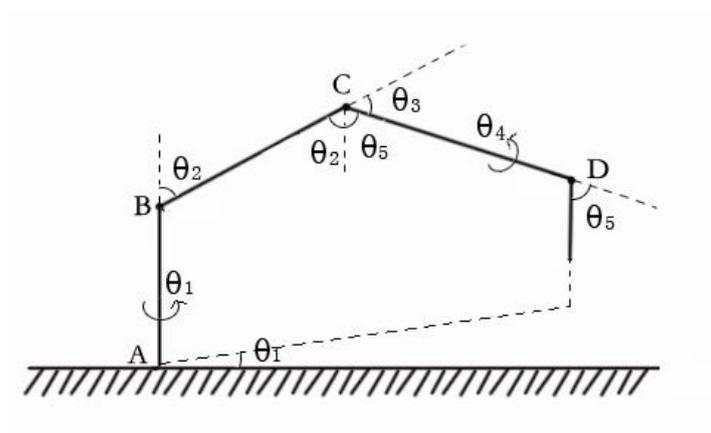


图 1 自由度受约束时的几何分析

由上图可见，此时机械臂位于同一个平面内，此平面与  $y$  轴的交角为  $\theta_1$ ，由此可推出如下表达式：

$$\begin{cases} \theta_1 = 90^\circ + \arctan \frac{x}{y} \\ \theta_2 = 90^\circ - \alpha - \beta \\ \theta_3 = 2\beta \end{cases} \quad (7)$$

其中：

$$\alpha = \arctan \left( \frac{D_z - L_{AB}}{\sqrt{D_x^2 + D_y^2}} \right) \quad (8)$$

$$\beta = \arccos \left( \frac{\sqrt{D_x^2 + D_y^2} + (D_z - L_{AB})^2}{L_{BC}} \right) \quad (9)$$

此时同时保持 DE 杆垂直向下，则有：

$$(D_x, D_y, D_z) = (E_x, E_y, E_z) - (0, 0, 65) \quad (10)$$

$$\theta_5 = \pi - \theta_3 - \theta_2 \quad (11)$$

由此可见，在这样的自由度约束下，指尖位置唯一的确定了个关节的姿态角角度。

#### 4.2.2 指令产生算法

上面的结果可以让我们方便的得到每个点的角度姿态，为了实现点到点的移动，我们还需要将起点和终点的姿态位置转换为操作指令去进行控制。由于该算法比较简单，为了节省篇幅，在此只给出大致思路，具体细节可见程序 generate\_code.m。

思路如下：

**Step1:** 产生单个角度起点到终点的控制序列，如果终点的位置减去起点位置大于 2（或小于 -2），则产生一指令 2（或 -2）；否则产生一指令，为所剩距离保留一位小数。然后将起点按指令前进一步。

**Step2:** 选出最长的控制序列， 将其余的控制序列后面补 0， 直到达到相同的长度。

**Step3:** 将增广的所有序列作为单独的列， 构成一个 6 列的矩阵。此矩阵即为操作指令。

### 4.3 指尖曲线跟踪问题

#### 4.3.1 思路分析

为实现曲线跟踪问题，我们可以按照前面建立的简单点对点算法来实现。但是考虑到实际问题中需要加工的曲线不会凭空存在，而总是存在于某个物体的表面或者周边。因而也就不可避免的存在机械臂和障碍物相碰撞的可能性。所以我们在设计曲线跟踪算法的时候，为了增强本算法的适用性，我们考虑让本算法能够具有一定的避障功能[10]。同时我们希望此算法的运算量不能太大，否则不适宜在线作业。

#### 4.3.2 算法思想

我们设计此算法主要的思想是：指尖的位置不能唯一的确定所有的转角，但是假如可确定  $D$  的位置。那么根据上面的讨论结果，我们能反求出机械手臂此刻的姿态角  $\theta_1^{(i+1)}$ ， $\theta_2^{(i+1)}$  和  $\theta_3^{(i+1)}$ 。然后再由这三个角的角度以及  $D_{i+1}$  和  $S_{i+1}$  的位置关系求出剩下的两个角度  $\theta_4^{(i+1)}$  和  $\theta_5^{(i+1)}$ 。下面我们具体分析：

由于采用的设备本身是数字控制的，因此很难处理连续的情形。我们不妨首先将曲线离散化，如图所示：

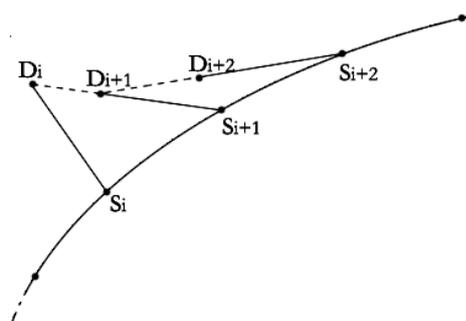


图 2 无障碍时的跟踪算法示意

上图中，我们将题目中曲线的参数  $S$  离散化为  $\{S_i\}$ 。假设我们已经知道了  $D_i$  的位置，那么我们需要根据  $D_i$  和  $S_{i+1}$  的位置求出最优且不受障碍影响的下一个  $D$  的位置  $D_{i+1}$ 。在没有障碍物的时候，我们可以从  $D_i$  到  $S_{i+1}$  做一条连线。然后在连线上找距离  $S_{i+1}$  为  $65mm$ ，且与  $D_i$  最近的点作为  $D_{i+1}$ 。下面我们考虑此连线上有障碍物的情形：

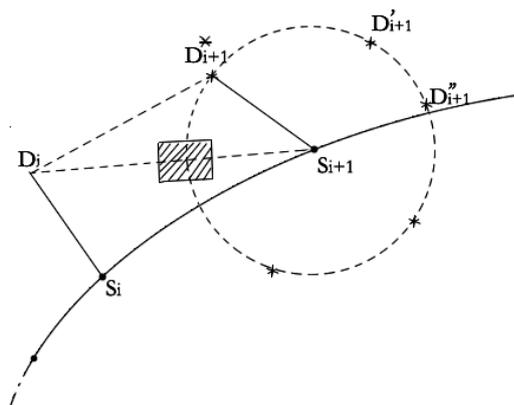


图3 有障碍时的跟踪算法示意

由图可见，当  $D_i$  到  $S_{i+1}$  的连线出现障碍物的时候，我们不能再按上面的方法确定  $D_{i+1}$ 。此时我们以  $S_{i+1}$  为圆心， $65mm$  为半径，随机产生若干个可行点。然后从中选择和  $D_i$  最近的点作为  $D_{i+1}^*$ 。如果由此计算出来的  $\theta$  向量不符合题目中所给的角度移动范围，那么需要重新搜索。

### 4.3.3 曲线跟踪算法描述

我们按照以上思路，设计快速避障跟踪算法如下：

**Step1.** 将曲线  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $z = z(s)$ ,  $a \leq s \leq b$  离散化。即按一定步长取  $s$  值，使得  $a \leq s_1 < s_2 < \dots < s_i \dots < s_n \leq b$ ，从而将曲线离散为一系列  ${}^0R(s_i)$  点，

**Step2.** 按①中的方法将机械臂以最快的速度移到起始点  ${}^0R(a)$ ，并计算此时  $D$  关节所在的位置  $D_0$  点，设  $i = 1$ 。

**Step3.** 计算  $D_{i-1}$  点到  ${}^0R(s_i)$  点连线上的距离，并将连线上与  ${}^0R(s_i)$  点相距为  $l_{DE}$  的点定为  $D_i$  点。

**Step4.** 根据  $D_i$  的位置计算  ${}^0R(s_i)$  点对应的 1、2、3 关节在其各自坐标系中的转角  $(\theta_1^{(i)}, \theta_2^{(i)}, \theta_3^{(i)})$ 。再根据  $D_{i-1}$  点与  ${}^0R(s_i)$  点的位置关系, 求出  $(\theta_4^{(i)}, \theta_5^{(i)})$ ,  $i = i + 1$ 。

**Step5.** 若  $\theta_5^{(i)}$  不符合约束范围, 则在以  ${}^0R(s_i)$  为圆心, 以  $l_{DE}$  为半径的球面上随机产生一系列  $D_i$ , 选择与  $D_{i-1}$  距离最近的  $D_i^*$  作为  $D_{i+1}$ 。转 **step4**。

**Step6.** 若  $i < n + 1$ , 则转 **step 3**, 否则转 **step7**

**Step7.** 利用前面简历的指令序列产生算法从  $(\theta_1^{(i-1)}, \theta_2^{(i-1)}, \theta_3^{(i-1)}, \theta_4^{(i-1)}, \theta_5^{(i-1)})$  状态到  $(\theta_1^{(i)}, \theta_2^{(i)}, \theta_3^{(i)}, \theta_4^{(i)}, \theta_5^{(i)})$  的操作指令。

具体程序请见附件中的 generate\_d.m

## 4.4 机械臂避障模型及算法

### 4.4.1 问题分析

与传统机器人避障路径规划方法相比, 空间机器人避障路径规划算法应从安全性以及规划效率两方面考虑。目前机器人路径规划算法主要有: C-空间法, 人工势场法, 预处理-规划算法等[11]。人工势函数方法可以用于局部路径的实时规划[12], 并能够广泛应用于反馈控制, 因而其规划方法更加有效[13]。在此我们借助人工势场法的思想, 通过引入“引力场”和“斥力场”的抽象势场。结合问题中的机械臂的特殊构造, 设计出一种启发式避障路径规划算法, 可以有效的解决一定复杂度的避障问题。

人工势场法的基本思想是: 当移动机械臂靠近障碍物时, 就要受到斥力的排斥作用。越靠近障碍物其排斥力越大。当接近障碍物时, 其排斥力为无穷大。而规划的目标位置点则看作一个引力场, 这样在工作环境中运动的移动机械臂在吸引力和排斥力的复合作用下能够有效地绕过障碍物而到达规划的目标位置。

在此需要指出的是, 为了减小搜索的计算复杂度, 我们设计了一种“距离一步长”规则来限制计算机搜索时的搜索步长范围, 从而极大的缩短了计算时间并能取得较好的效果。

### 4.4.2 模型建立

我们通过引入“引力场”和“斥力场”的概念来进行模型建立, 并设计搜索步长的选择规则。

1、引力场：表示机械臂末端相对“吸引”它的目标源所具有的“位势”，表示如下：

$$F_d(\theta) = \frac{k_d}{d_{eo}} \quad (12)$$

其中， $F_d(\theta)$ 表示机械臂在其各关节状态为 $\theta$ 时，机械臂末端与目标点间的引力； $k_d$ 表示引力系数，为一常数； $d_{eo}$ 表示机械臂末端与目标点之间的距离，我们称其为目标距离。

2、斥力场：表示障碍物对机械臂末端有“排斥”的作用。

$$F_o(\theta) = \frac{k_o}{d_e} \quad (13)$$

其中， $F_o(\theta)$ 表示机械臂在其各关节状态为 $\theta$ 时，机械臂与障碍物间的斥力； $k_o$ 表示斥力系数，为一常数； $d_e$ 表示整个机械臂与障碍物之间的最短距离，我们称其为障碍距离。

3、假定在移动机械臂的工作环境存在 $n$ 个障碍物，则人工势函数可表示为引力势函数和斥力势函数之和，即

$$F(\theta) = F_d(\theta) - \sum_{i=1}^n F_{oi}(\theta) \quad (14)$$

4、最优前进方向：

设机械臂当前姿态为 $\theta^{(i)}$ ，对其所有可行的前进方向 $\Delta\theta$ 进行搜索。定义使得 $F(\theta^{(i)} + \Delta\theta)$ 为最大的 $\Delta\theta$ 为最优前进方向 $\Delta\theta^*$ ，此时有

$$\Delta\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} + \Delta\theta^* \quad (15)$$

5、寻优模型

综上所述，我们可以定义如下的寻优模型，用于后面的算法计算。模型定义如下：

$$\text{Max}\{F(\theta^i + \Delta\theta)\} \quad (16)$$

$$\Delta\theta \in \Delta S \quad (17)$$

其中 $\Delta S$ 为当前的可选前进方向集合。

6、步长规则

在考虑步长搜索的时候，如果选择较小的步长，则对很远的距离需要较多的指令。而若步长过大，那么虽然移动速度提高，但是精度会很差。而如果我们对所有可行的步长都进行搜索，那么时间复杂度会增加，求解不现实。所以我们制定如下的规则，从而根据目标距离

选择合适的步长进行可行方向的搜索：

- 当  $d_{eo} \in [10, 65]$  时,  $\Delta S_i = \{[-2, 0, 2]\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$
- 当  $d_{eo} \in [0, 10]$  时,  $\Delta S_{1,2,3} = \{[-1, 0, 1]\}$ ,  $\Delta S_{4,5} = \{[-2, -1, 0, 1, -2]\}$
- 当  $d_{eo} \in [65, \infty]$  时,  $\Delta S_{1,2,3} = \{[-0.1, 0, 0.1]\}$ ,  $\Delta S_{4,5} = \{[-2, -1, -0.1, 0, 0.1, 1, 2]\}$

#### 4.4.3 启发式避障算法描述

本文设计的启发式避障算法可以描述如下：

**Step1:** 输入初始位置以及姿态，设定允许误差  $\varepsilon$  和最大步数  $N$ ，令当前步数  $k = 1$ ，指令集合  $Com = \emptyset$ ；

**Step2:** 根据当前末端坐标，计算目标距离  $d_{eo}$  和障碍距离  $d_e$ ；

**Step3:** 若障碍距离小于允许误差，即  $d_e < \varepsilon$ ，则转 **Step5**，否则转 **Step4**；

**Step4:** 用目标距离  $d_{eo}$ ，根据步长规则得出可选步长集合  $\Delta S$ ，由上一节建立的模型去计算最优前进方向  $\Delta\theta$ ，将其加入指令集合  $Com$  中，步数  $k = k + 1$ ；

**Step5:** 若  $k > N$ ，则停止运算并输出指令集合  $Com$ ，否则转 **Step2**；

## 5. 机械臂运动路径算法的应用

本文的这一部分将详细地说明如何利用以上设计的各种算法，去解决题目中的具体问题。

### 5.1 简单点对点运动算法应用

此问题要求我们将机械臂从初始位置移动到坐标系中的  $(20, -200, 120)$  点，从而抓取工具。首先按照 4.2 中的模型，计算出自由度受约束情况下目标点的姿态。其结果为： $(-84.3, 11.7, 131.9, 0, 36.4, 0)$ ，由函数 `robot.m` 可以求出此时的实际指尖位置为： $(20.1651, -200.0287, 119.4539)$ 。然后我们根据初始姿态与目标姿态，按照前面设计的指令代码产生程序 `generate_code.m` 共产生 67 步执行指令，存放在附件 `answer1.xls` 中。

## 5.2 指尖曲线运动算法应用

此问题要求我们操纵机器臂沿着圆台的外表面一曲线进行焊接任务。显然，机械臂上除指尖外的任何一点都不应于圆台相接触，否则会发生碰撞。另外我们希望得到的指令是高效且精确的，避免多余的运动。下面是对该问题的具体分析。

经过几何运算，我们得到圆台外表面的方程为：

$$\begin{cases} (x-210)^2 + y^2 = \frac{4}{25}(420-z)^2 \\ 0 \leq z \leq 180 \end{cases} \quad (18)$$

代入切面方程  $x = 2z$ ，可得到曲线的参数方程：

$$\begin{cases} x = 183.75 + 131.393 \sin \theta \\ y = 128.738 \cos \theta \\ z = 91.875 + 65.697 \sin \theta \end{cases} \quad (-\pi \leq \theta < \pi) \quad (19)$$

下面我们将曲线离散化，将其 40 等分，然后按照 4.4.3 中设计的曲线跟踪算法进行求解，如下图所示：

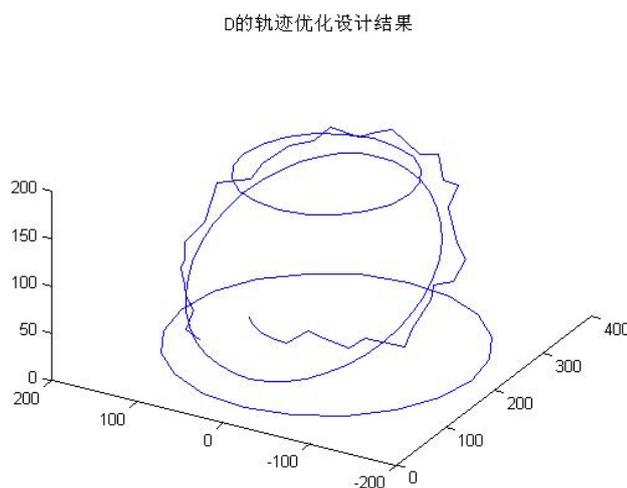


图 4 利用曲线跟踪算法得出的 D 的轨迹

上图中我们给出了关节  $D$  的运动轨迹。可见此曲线跟踪算法能够控制机械臂在圆台的外部进行运动，且不会与圆台发生碰撞。算法可直接得出每个离散节点的角度姿态  $\theta$ ，并利用指令产生算法得到最后的指令序列。指令序列请见附件 answer2.xls。

## 5.3 机械臂避障算法应用

### 5.3.1 几何空间分析

首先我们分析了圆台的几何构造：

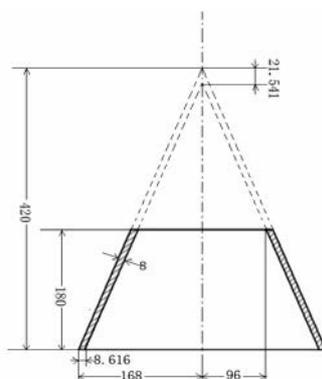


图 5 圆台的剖面分析图

如上图所示，圆台内壁位于一个圆锥面上，此圆锥的底面和圆台外表面的底面同心，高度为  $398.459\text{mm}$ 。从而我们可以构造于外壁类似的方程，这样便可计算出四个需要焊接点的实际坐标如下：

$$\begin{cases} p_1 : (320, -104, 20) \\ p_2 : (120, 106, 50.824) \\ p_1 : (190, -125, 81.9843) \\ p_1 : (255, 88, 151.363) \end{cases} \quad (20)$$

最后我们将整个作业空间的示意图表示如下：

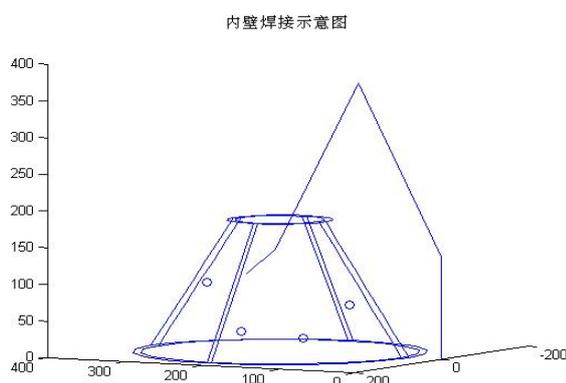


图 6 工作间的示意图

### 5.3.2 路径阶段划分

由于机械手臂的初始位置和圆台处于不同的方向，为避免奇异姿态出现，我们可以定义如下的操作阶段划分：

- a) 利用简单点对点移动算法, 将机械臂从初始位置移动到竖直位置 (即全部角度都为 0);
- b) 利用曲线跟踪算法, 将指尖从竖直位置移动到圆台上表面的中心点  $O$ ;
- c) 利用启发式避障算法, 按照  $O \rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p_3 \rightarrow p_4 \rightarrow O$  移动指尖;
- d) 利用曲线跟踪算法, 将指尖从  $O$  点移动到竖直位置;
- e) 利用简单点对点移动算法, 将机械臂从竖直位置移动到初始位置。

### 5.3.3 数值仿真

在计算这一问题时, 我们取引力系数  $k_d = 100$ , 斥力系数  $k_o = 1$  [14]。计算结果请见文件 answer3.xls。

对于每一阶段的指令数和误差, 我们列表如下进行分析:

表 2 各阶段所使用的算法和精度

阶段	所用算法	指令长度	允许误差	实际误差
a	简单 p-p	45	0	0
b	曲线跟踪	61	5	4.6985
c $O \rightarrow p_1$	启发式	22	0.2	0.1640
c $p_1 \rightarrow p_2$	启发式	38	0.2	0.1823
c $p_2 \rightarrow p_3$	启发式	45	0.2	0.0739
c $p_3 \rightarrow p_4$	启发式	29	0.2	0.1452
c $p_4 \rightarrow O$	启发式	9	0.2	0.1905
d	曲线跟踪	63	5	2.6480
e	简单 p-p	45	0	0

可见, 在使用启发式算法时, 我们设定的容许误差 0.2 能够很快的达到。如果需要达到更高的精度, 只需要调整容许误差的值便可。

在此，我们用 MATLAB 软件编制成附录中的程序 final\_show.m 将 b)和 c)阶段轨迹的规划结果绘成下图：

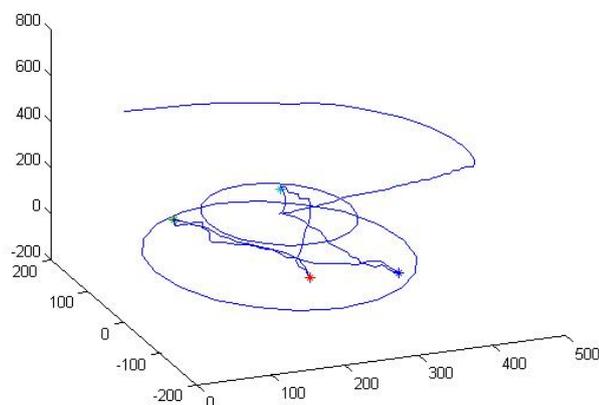


图 7 启发式算法得出的寻优结果

由上图可见，启发式寻优算法能够得出一条避免碰撞，同时步数较小的指尖移动优化路径。上述问题具体的计算分别由附件中的程序 o\_to\_p1.m, p1\_to\_p2.m, p2\_to\_p3.m 和 p3\_to\_p4.m 求解。

### 5.3.4 人工势场分析

为了显示出本算法中引入了人工势场后避障的有效性，我们以  $O \rightarrow p_1$  阶段的寻优过程为例，利用 yinlijuli.m 和 chilijuli.m 函数程序（见程序附件）做出了距离关系的对比图。图示如下：

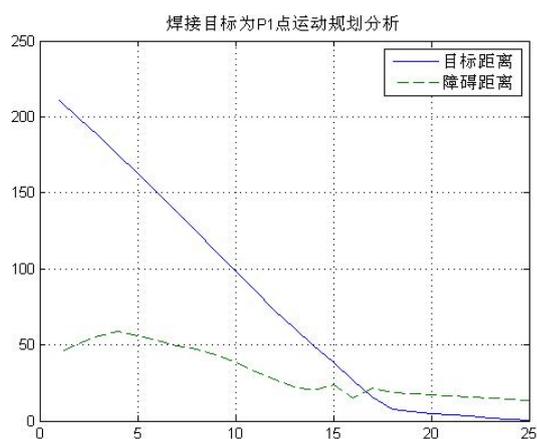


图 8 目标-障碍距离关系图

从图中我们可以看到，在  $O \rightarrow p_1$  的寻优过程中，指尖和目标间的距离能迅速的衰减。而同时机械臂与障碍物总能保持适当的距离，从而达到成功的避障。

## 6. 机械臂参数优化模型

### 6.1 问题分析

机械臂的适用范围，是它的活动空间，也叫可达空间，它是衡量机器人工作能力的一个重要的运动学指标。我们可以通过分析连杆的相对长度和各关节的最大旋转角与可达空间的关系来改善适用范围。

机器人的灵活性一般有三种定义：①给定末端工作点位置，研究机器人末端所能实现的姿态集合，并以此为依据定义工作空间内的灵活点；②就机器人末端执行器的某一位姿以其雅可比矩阵的条件数衡量此时机器人的可操作性；③给定机器人末端的姿态，研究机器人末端工作点的空间运动范围以及各工作位置存在反解的数目[15]。我们采用第一种定义进行分析。在该定义下，我们把在可达空间中尖端可以全方位到达的点所构成的空间称为灵活空间，并以灵活空间占总工作空间的比值作为衡量机械臂灵活性的参考系数。比值越大，灵活性越高[16]。

### 6.2 机械臂参数优化模型建立

在给定的连杆长度和关节变量范围的条件下，该机械臂的工作空间即为正运动学方程可行解  $(E_x, E_y, E_z)$  的值域。如图所示，该空间为由半径分别为  $R$  和  $r$  的球面以及  $z=0$  的平面围成的空间，其中

$$R = l_{BC} + l_{CD} + l_{DE} = 575, \quad (21)$$

$$r = \sqrt{l_{BC}^2 + l_{CD}^2 - 2l_{BC}l_{CD}\cos(\pi - \theta_3)} = 117.77 \quad (22)$$

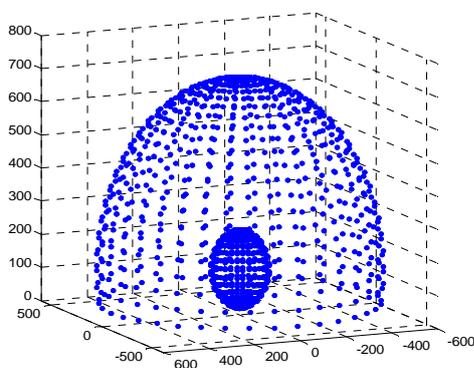


图 9 机械臂的可达空间（在两个球面之间的范围）

### 6.3 机械臂参数优化的建议

- a) 假若  $l_{AB} + l_{BC} + l_{CD} + l_{DE}$  固定, 减小 AB 的长度可以增大 R 的值, 使可达空间扩大。但在避碰问题中, 这样反而可能减小启发式避障寻优算法的可行域的范围, 从而减小了实际的可达空间。
- b) 增大  $\theta_3$  的变量范围可以减小 r 值, 从而也可以扩大可达空间。
- c) 假若  $l_{BC} + l_{CD}$  固定, 设  $k = \frac{l_{BC}}{l_{BC} + l_{CD}}$ , 将其代入 r 的表达式中可求得, 当  $k = 0.5$  时 r 值最小, 即  $l_{BC} = l_{CD}$ 。此时的机械臂的可达空间最大。
- d) 根据灵活性的定义易知, DE 的相对长度越短, 灵活空间越大, 灵活性越高。
- e) 增大  $\theta_5$  的变量范围可以增大灵活性。在跟踪算法中, 由于关节最大旋转角的限制, 为了避免使目标点进度关节盲点, 需要对 D 点做进一步的处理。若增大  $\theta_5$  角的最大旋转角, 则可以减少这一步, 提高算法效率。

## 7. 算法的评价与改进

现在我们分别对三种算法: 简单点对点算法, 曲线跟踪避障算法, 启发式避障寻优算法通过优缺点分析进行评价。

### 7.1 简单点对点算法

这种算法的优点在于可以方便的利用指尖的位置坐标唯一确定整个机械臂的姿态。此姿态通过解析表达式直接求得, 方便计算。可以应用于没有障碍存在, 或者较短距离的情况。

这种算法的缺点在于约束了自由度, 使得真正独立的自由度只有三个。因此相比自由度不受约束的情况, 必然会增加一定的忙区, 即不可到达区域。另一方面, 在所需移动的路径中障碍物存在的情况下, 此算法会失效。

因此本算法最适合应用于从初始位置调度到障碍物附近等操作, 然后再转用避障操作。

## 7.2 曲线跟踪避障算法

这种算法的优点在于，它不仅可以解决本问题中的曲线跟踪问题。同时还可以跟踪存在于更复杂的障碍物中的曲线。而且此算法的一大特点是速度快，可以在线计算，得到的轨迹也是较优的。

但是这种算法也存在一定的缺点。比如对障碍的考量是一种“看见才考虑”的策略，只能当障碍出现在附近才能去考虑绕过它。这样在障碍物复杂的情况下很容易陷入死路，造成机器臂因为无解而无法转动的情形。换句话说，它的避障策略是一种局部的策略，不能从整体上对障碍物可能造成的影响做出合理的规划调整。

另外，离散化点的数量也值得深入探讨，如果点分的过密，那么由于机械臂本身的最小步长限制，很容易产生不必要的误差。如果离散点分得过疏也不能保证解的可行性。

总之，本算法适合于跟踪障碍比较规则的曲线。

## 7.3 启发式避障算法

这种算法通过引入虚拟的人工“引力场”和“斥力场”，从全局给机械臂的路径搜索造成影响，而且收敛速度很快。从我们的应用实例中可以看出，该算法可以有效的设计出避障作业的优化路径，能够解决较为复杂的避障问题。特别是与前两种算法配合使用，能够更好地提高机械臂的作业效率。

此算法的缺陷在于它较为依赖“场函数”的设计。当取不同的引力或者斥力系数的时候，解的结果可能发生很大的变化。因此，深入分析引力场和斥力场的优化设计方法，能够在一定程度上提高本算法的规划效果。

## 7.4 算法的改进与延伸

本文中我们给出了一系列操纵六自由度机械臂的通用算法，能够解决现实中具有一定障碍复杂度的工程应用问题。这些算法还可以进行更为深入的研究，从而增强适应性并提高精准度。在此我们给出几个可以进行深入研究的方向：

- 在曲线跟踪算法中，深入分析角度增量限制对曲线离散化的影响。分析出如何根据角度增量的限制，来优化安排计算曲线上采样点的总量。

- 对于曲线跟踪算法中, 利用随机产生可行点, 并从中选优的策略能够快速有效的得到可行的解。这种算法还能进行更大程度的优化, 比如考虑改变均匀产生随机点的思想, 而在离上一个 D 的位置较近的球面产生更多的候选点。
- 在启发式寻优算法中, 研究更有效的寻优策略, 例如用未来若干步的情况来进行分析, 这样能减小陷入死区的概率, 但同时又会增加算法的时间复杂度, 需要进一步优化搜索方式。
- 在启发式寻优的过程中, 我们引入的人工引力场和斥力场函数都是最基本的函数, 我们可以考虑如何更有效的设计这两个函数, 从而提高寻优的效率。

## 8. 结束语

本文首先通过刚体力学经典的坐标变换方法, 得出机械臂各个关节位置的直角坐标关于各旋转角的函数关系。然后依次提出了三种控制算法: 简单点对点算法, 曲线跟踪避障算法和启发式寻优算法。点对点移动算法适用于没有障碍物存在的情形。曲线跟踪算法不仅能够解决问题二中的圆台曲线焊接问题, 也可以解决具有更不规则形状的物体的外围或内壁曲线的跟踪问题。启发式避障算法, 能够处理更为复杂的障碍存在的情形, 完成类似内壁焊接等问题。

最后我们对所设计的算法进行评价和改进方向的讨论, 并给出了一些优化机械臂臂长和角度限制范围的建议。

## 参考文献

- [1] Saeed B. Niku, 机器人学导论——分析、系统及应用[M]. 北京:电子工业出版社. 2004.
- [2] 徐元昌, 工业机器人[M]. 北京: 中国轻工业出版社, 1999.
- [3] KHATIB O. Real- time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots [J]. Int J of Robotics Research, 1986, 5 (1): 90 - 98.
- [4] 陈靖波, 赵猛, 张珩, 空间机械臂在线实时避障路径规划研究[J] 控制工程, 2007, 14(4): 445 - 447.
- [5] 周明安, 朱光忠, 宋晓华, 肖俊建. 步进电机驱动技术发展及现状[J]. 机电工程技术, 2005 (2).
- [6] 罗熊. 机器人轨迹规划算法及其在虚拟环境下的投射式实现研究[D]. 中南大学, 2004.
- [7] 刘爽, 许亚靖, 耿清甲, 黄真. 2PUMA560 机构的运动学性能分析[J]. 燕山大学学报, 2006, 30(3): 53 - 55.
- [8] 殷际英, 何广平. 关节型机器人[M]. 北京: 化学工业出版社, 2003.
- [9] 张凯, 刘成良, 付庄. 6R 机器人轨迹规划及其在焊接中的应用.机械设计.2002, 19(10): 20-23.
- [10] 马强. 六自由度机械臂轨迹规划研究[D]. 哈尔滨工业大学, 2007.
- [11] 朱齐丹, 严勇杰. 基于包容结构的移动机器人混合控制结构研究[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2006, (6): 850 - 853.
- [12] 郭丙华, 胡跃明. 三连杆移动机械臂模型与运动规划[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(6): 965 - 968.
- [13] 熊有伦等. 机器人学.机械工业出版社[M], 1993.10
- [14] 蔡自兴, 机器人学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.
- [15] 毕诸明. 机器人姿态空间的分析与综合[J]. 机械科学与技术, 1996, 15(1): 10-16
- [16] 郑剑飞. 六自由度机械臂分布式控制系统的设计与研究[D]. 哈尔滨工业大学, 2006.