全国第四届研究生数学建模竞赛

题号 D

题 目 邮政运输网络中的邮路规划和邮车调整

摘 要

摘要：邮政作为一种重要的传统通信手段，与我们的日常生活和工作息息相关，。而邮政运输是邮政生产过程的重要环节，如何保证在规定时限内将邮件运送到目的地，并且尽可能降低成本是邮政运输中最重要的问题。本文主要研究了我国邮政运输业中邮路规划和邮车调整问题，经过分析求解得到如下邮路规划和邮车调整方案：

问题 1：经过分析计算，得到该县需要邮车的下界为 3 辆；进一步地，将因空车率减少的收入最小化作为优化目标，利用带剪枝条件的枚举算法得到了 3 辆邮车最优的邮路规划方案，该方案中因空车率减少的收入为 47.01 元。在观察实验结果的基础上，通过结合实际情况，发现将因空车率减少的收入最小化作为目标函数可能并非最合理，这是因为影响邮政运输效益的因素还有每条邮路的运行成本，因而提出改进的目标函数，并重新利用带剪枝的枚举算法得到了 3 辆邮车对改进的目标函数的最优方案。

问题 2：设计并实现了基于最小生成树和 TSP 的县级邮路规划算法，并在此基础上通过分析和计算调整了区邮路方案。该邮路规划方案需要区级邮路 4 条，县邮路 9 条，每条邮路投入一辆邮车，邮路的总长度为 2212 公里，运行成本 6636 元。

问题 3：设计了基于最短路径的新邮路规划方案，此方案将支局归入距离最近的县（区）局辖区。然而此改进方法仍存在一定的缺陷，在深入分析的基础上我们提出了一种采用“邮路竞争支局”思想的邮路规划改进策略，此方法在问题 2 得到的邮路规划方案基础上进行局部调整，改进了问题 2 的解，实现区邮路 4 条，县邮路 8 条的新方案，邮路总长度下降至 2094 公里，运行成本降低至 6282 元，节约运行成本 354 元（原成本的 5.3%）。

问题 4：提出了县局选址的新方案，此方案不需要邻近县区辅助即可利用 4 条区邮路及 8 条县邮路覆盖所有支局，并将邮路总长度下降至 2126 公里，运行成本降低至 6378 元，节约运行成本 258 元（原成本的 3.89%）。另外，此方案还具有其他优点，例如提高了邮局运输系统对于紧急任务的应变能力等。

关键词：邮路规划，邮政运输效益，TSP，最小生成树，邮路竞争支局

参赛密码 ____________

（由组委会填写）

参赛队号 10006331　　参赛学校 北航

参赛队员姓名 高玉建（10006331），苏昊（10006332），黄飞（10006333）

一、符号说明

D	市邮局
X_i	第 i 个县邮局
Z_i	第 j 个支邮局
$d(Z_i, Z_j)$	第 i 个支邮局和第 j 个支邮局之间的最短距离
$d(X_i, Z_j)$	第 i 个县邮局和第 j 个支邮局之间的最短距离
$d(D, X_i)$	市邮局和第 i 个县邮局之间的最短距离
$EmpRat(Z_i, Z_j)$	邮车由第 i 个支邮局到第 j 个支邮局的空车率
$Cost$	因空车率导致的收入减少

二、基本假设

1. 市邮局邮车每天早晨 6 点准时从市局出发前往各邮局
2. 县邮局邮车在收到市邮局送来的邮件后才前往各个支邮局
3．邮车到达目标支局后会写下寄往该支局的所有邮件，并装上该支局寄送出去的所有邮件
4. 县邮局收到市邮局送来的信件后对邮件进行集中处理的时间为 1 小时
5. 县邮局收到各支邮局送来的信件后对邮件进行集中处理的时间为 1 小时
6. 邮车在各支局卸装邮件耗时 5 分钟，在各县局卸装邮件耗时 10 分钟
7. 各县的邮车仅能在本县内运送邮件，不能进入其他县内
8. 各邮车匀速行驶，并且不会出现故障

三、模型分析及求解

问题一

设 N 表示 X_1 所辖县区内的邮路数，C 表示县级邮车最多能容纳的邮件袋数，M_1 表示 X_1 辖区内所有支局要收取的邮件总量，M_2 X_1 辖区内所有支局要寄送的邮件总量，那么最少的邮车数 N 应当满足：

$$(N-1)\times C \le M_1 \le N\times C$$

$$(N-1)\times C \le M_2 \le N\times C$$

从附表 1 给出的数据可以计算出县局需要运送到支局的邮件量为 176 袋，由各个支局运送到县局的邮件量为 170 袋。每辆县级邮车最多容纳 65 袋邮件，由于$65\times 2<\max(170,176)<65\times 3$，所以完成该任务所需邮车数的下界为 3。下面我们试着给出一种邮车数为 3 的邮路规划及邮车调度方案，使每辆车在不超过最大承运邮件量（65 袋）并且不违反邮政运输流程及时间限制的条件下，完成该县每天的邮件运输任务，并且使由于空车率而减少的收入达到最少。

问题分析

将县X_1的 16 个支局分为三组，形成一种邮路规划方案可以表示为：

$$U=\{\{Z_{11},Z_{12},\cdots,Z_{1p}\},\{Z_{21},Z_{22},\cdots,Z_{2q}\},\{Z_{31},Z_{32},\cdots,Z_{3v}\}\}$$

式中$p+q+v=16$，$Z_{gi}\in\left\{Z_1,Z_2\cdots,Z_{16}\right\}$，$g$取 1、2 或 3，表示邮路的编号；$i$取 1、2、…、$p$(或$q$、$v$)，表示该邮路上的第$i$个支局；$Z_{gi}$各不相同。

该定义表示的三条邮路如下所示：

$$X_1\to Z_{11}\to Z_{12}\to\cdots\to Z_{1p}\to X_1$$

$$X_1\to Z_{21}\to Z_{22}\to\cdots\to Z_{2q}\to X_1$$

$$X_1\to Z_{31}\to Z_{32}\to\cdots\to Z_{3v}\to X_1$$

设Car_i表示由县局X_1运往支局Z_i的邮件数量，Col_j表示由支局Z_j带到县局的邮件数量，$Carry_{gi,gj}$表示第 g 个邮路从支局 i 到支局 j 运载的邮件总数，并设C表示每个邮车最多运载的邮件数，则每个$Carry_{gi,gi+1}$应当满足：

$$Carry_{gi,gi+1}\le C \qquad \text{（式 3.1）}$$

若已知给定一条邮路上的所有支局（排列顺序未知），我们给出一个的定理，保证可行解的存在性：

定理 1: 设邮车运载上限为C，途经邮局$Z_1,Z_2\cdots Z_n$，邮局Z_i需要收取信件Car_i

袋，待寄邮件为 Col_i 袋，若 $\sum_{i=1}^{n} Car_i < C$ 且 $\sum_{i=1}^{n} Col_i < C$，则一定存在邮路 $X \to Z_{i_1} \to Z_{i_2} \cdots \to Z_{i_n} \to X$ 使得在运输过程中邮车不超载并且完成全部途径邮局信件收发工作。

证明：令 $M_i = Col_i\text{-}Car_i$，则若 $M_i < 0$，当邮车途径邮局 Z_i 时，留下全部 Z_i 收取的 Car_i 封邮件并取走 Z_i 待寄的 Col_i 封邮件车上空间将会增加；反之若 $M_i > 0$，则车上空间将会减小。设将 M_i 按照升序排列后得到的序列为 $M_{i1}, M_{i2}, \cdots, M_{in}$，若将 $X \to Z_{i_1} \to Z_{i_2} \cdots \to Z_{i_n} \to X$ 作为一个邮车工作的路线，则易知在停靠邮局 i_k 后车上的邮件数为 $Carry_{gi_k, gi_{k+1}} = \sum_{j=1}^{n} Car_j + \sum_{j=1}^{k} M_{i_j}$，且车上的载重将经过一个先单调不增（$M_{i_k} \le 0$）再单调不减（$M_{i_k} \ge 0$）的过程，因此，邮车载重的最大值将出现在遍历出发时刻或遍历结束时刻。但由定理的条件，$\sum_{i=1}^{n} Car_i < C$ 且 $\sum_{i=1}^{n} Col_i < C$，故邮路 $X \to Z_{i_1} \to Z_{i_2} \cdots \to Z_{i_n} \to X$ 在运输过程中邮车不超载并且可以完成全部途径邮局的信件收发工作。

根据此定理的证明步骤，一个邮路运输过程不超载的充分必要条件为 $\max(\sum_{i=1}^{n} Car_i, \sum_{i=1}^{n} Col_i, \max_{k} \sum_{i=1}^{n} Car_i + \sum_{i=1}^{k} M_{i_k}) < C$。

设 A 表示县局运送到支局的总邮件量。因为两辆邮车最多装载 $2C$ 袋邮件，为了保证每辆车都不超载，则三辆车从县局出发时，每辆车最少装载 $M = A - 2C$ 袋邮件。因此

$$Carry_{g0,g1} \ge M \qquad \text{（式 3.2）}$$

这样，第 g 组邮车在从 $Z_{g,i}$ 前往 $Z_{g,i+1}$ 时，其空车率为：

$$EmpRate(Z_{g,i}, Z_{g,i+1}) = \frac{65 - Carry_{gi,gi+1}}{65} \qquad \text{（式 3.3）}$$

计算因空车率而减少的收入，还需要得到该县内任何两个支局之间以及县局

与支局之间的最短距离，用矩阵表示如下：

$$\begin{pmatrix} d_{0,0} & d_{0,1} & d_{0,2} & \cdots & d_{0,16} \\ d_{1,0} & d_{1,1} & d_{1,2} & \cdots & d_{1,16} \\ d_{2,0} & d_{2,1} & d_{2,2} & \cdots & d_{2,16} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{16,0} & d_{16,1} & d_{16,2} & \cdots & d_{16,16} \end{pmatrix}$$

式中$d_{i,j}$表示两个邮局之间的距离，其中下标带有 0 的项表示县局到支局的距离，其余$d_{i,j}$表示支局Z_i与Z_j之间的距离，此距离我们采用 Floyd 算法计算出。

设p为某邮路负责的支局数目，T表示县级邮车一天最多可工作的时间，根据题目可以确定$T=6$小时。$Tr1$表示在支局装卸邮件的时间，所以一个邮路的路径应不超过县级邮车的速度v与路上行驶时间$T-Tr1\times p$的乘积，即

$$\sum_{i=1}^{p} d_{(g,i),(g,i+1)} \le v\times(T-Tr1\times p) \qquad \text{（式 3.4）}$$

针对每个分组方案计算出各段邮路上的空车率$EmpRate(Z_{g,i},Z_{g,i+1})$，则该种方案因空车率而减少的收入为：

$$Cost = 2\sum_{g=1}^{3}\sum_{i=0}^{p,q,v} EmpRate(Z_{g,i},Z_{g,i+1})d_{(g,i),(g,i+1)} \qquad \text{（式 3.5）}$$

这样问题化为求出一个分组U，使$Cost = 2\sum_{g=1}^{3}\sum_{i=0}^{p,q,v} EmpRate(Z_{g,i},Z_{g,i+1})d_{gi,gi+1}$最小，即

$$Cost = \min\left\{2\sum_{g=1}^{3}\sum_{i=0}^{p,q,v} EmpRate(Z_{g,i},Z_{g,i+1})d_{gi,gi+1}\right\} \qquad \text{（式 3.6）}$$

s.t. $$\sum_{j=1}^{n} Car_j + \sum_{j=1}^{k} M_{i_j} \le C$$

$$\sum_{i=1}^{p} d_{(g,i),(g,i+1)} \le v\times(T-Tr1\times p)$$

问题一求解

我们应用回溯法逐一生成 16 个支局分成三组的所有排列，并检查每种情况是否满足式 2.12 中的条件，若满足则求出该种情况下因空车率而减少的收入 $Cost$，并记录下该值和该分组情况，取出 $Cost$ 值最小的一组即为最优解。并在生成这些排列时进行“剪枝“，以提高搜索的速度。

该方法的具体步骤如下：

16 个支局分成 3 组排列，一共有 $16!\times C_{15}^{2}$ 种分组方案；由于 16 的全排列是一个非常大的数目，这样，需要验证的方案会有非常多个，搜索的时间会非常长，因此需要优化算法加快搜索的速度。

在实际计算求解过程中我们利用如下方法来提高求解的速度。

- 某一组的邮车运载辆小于 46（175-65-65=46）袋时，则所有包含该组的方案不符合要求，提前中止包含该组的方案搜索，改变该组最后一个支局，进行另一种方案的搜索
- 某一组的邮车运载量大于 65 时，则所有包含该组的方案不符合要求，提前中止包含该组的方案搜索，改变该组最后一个支局，进行另一种方案的搜索
- 每得到第一组的方案就计算该组邮路因空车率而减少的收入，若它比前面得到的 $Cost$ 的最小值大就停止该方案的搜索，若小，则继续寻找第二组邮路的方案，并计算出前两组邮路一共因空车率而减少的收入，将它比前面得到的 $Cost$ 的最小值大则停止该方案的搜索，若小则继续寻找第二组邮路的方案。

经过搜索计算，得到邮车数目为 3 时的最优邮路规划方案如下

邮路一：$X_1 \to Z_4 \to Z_6 \to Z_7 \to$（$Z_8$）$\to$（$Z_9$）$\to Z_{11} \to$（$Z_9$）$\to Z_8 \to Z_{10}$

邮路二：（Z_{10}）$\to Z_9 \to Z_{16} \to$（Z_4）$\to Z_3 \to Z_2 \to Z_5 \to$（$Z_4$）

邮路三：$Z_{12} \to Z_{13} \to Z_1 \to$（$Z_{14}$）$\to Z_{15} \to Z_{14}$

对该方案的说明：括号内的支局表示邮车仅路过该支局，而不在该支局装卸邮件。由式 3.5 可以算出因空车率而减少的收入。表 3.1 列出了该方案各个邮路的长度及因空车率而减少的收入，由表可知因空车率而减少的收入为 47.01 元。

表 3.1 县局 X_1 邮路规划及邮车调度方案

	经过的支局	邮路长度/公里	减少的收入/元
邮路 1	Z_4、Z_6、Z_7、（Z_8、Z_9）、Z_{11}、（Z_9）、Z_8、Z_{10}	165	16．55
邮路 2	（Z_{10}）、Z_9、Z_{16}、（Z_4）、Z_3、Z_2、Z_5、（Z_4）	157	11．17
邮路 3	Z_{12}、Z_{13}、Z_1、（Z_{14}）、Z_{15}、Z_{14}	150	19．29
总计		472	47．01

问题二分析

设县局X_i共有n_i条邮路，各条邮路中分别有p_1、p_2、…、p_{n_i}个支局，则该县局的邮路规划方案可以表示为

$$U_i=\{\{Z_{i,1,1},Z_{i,1,2},\cdots,Z_{i,1,p1}\},\{Z_{i,2,1},Z_{i,2,2},\cdots,Z_{i,2,p2}\},\cdots,\{Z_{i,ni,1},Z_{i,ni,2},\cdots,Z_{i,ni,pni}\}\}$$

其表示的含义可以参考前面U的定义。那么该规划方案中邮路长度可以表示为

$$D_i=\{\{d_{i,1,0},d_{i,1,1},d_{i,1,2},\cdots,d_{i,1,p1}\},\{d_{i,2,0},d_{i,2,1},d_{i,2,2},\cdots,d_{i,2,p2}\},\cdots,\{d_{i,ni,0},d_{i,ni,1},d_{i,ni,2},\cdots,d_{i,ni,pni}\}\}$$

其中$d_{i,k,l}$表示$Z_{i,k,l}\to Z_{i,k,l+1}$的一段邮路的长度。

类似的，市局D的邮路可以表示为

$$\mathrm{U}_0=\{\{Z_{0,1,1},Z_{0,1,2},Z_{0,1,3},\cdots,X_1,\cdots,Z_{0,1,p1}\},\cdots,\{Z_{0,5,1},Z_{0,5,2},\cdots,X_5,\cdots Z_{0,5,p5}\}\}$$

市区内的支局只能由市局D负责，所以U_0必须覆盖市区内的所有支局，即

设$Dist$代表邮路总长度，$Dist_0$代表市局邮车邮路的总长度，$Dist_1$、$Dist_2$、$Dist_3$、$Dist_4$、$Dist_5$代表各县局X_1、X_2、X_3、X_4、X_5所负责的邮路的长度。显然它们之间满足下式：

$$Dist_i=\sum_{k=1}^{ni}\sum_{l=0}^{p1,\cdots,pni}d_{i,k,l} \qquad （式 3.7）$$

$$Dist = \sum_{0}^{5} Dist_i \qquad （式 3.8）$$

邮车的行驶还要满足题目中给出的$Step1 \sim Step4$的要求，因此第一班次市局邮车的行驶路程应当满足：

$$dist_{0,m} = \sum_{k=0}^{pm0+1} d_{0,m,k} \le (T1 - Tr1 \times pm0 - Tr2) \times V \qquad （式 3.9）$$

其中，$dist_{0,m}$ 表示从市局到县局X_m并返回到县局的邮路的长度。$T1$表示市局第一班车所允许的邮车的最长行驶时间（5 小时），$Tr1$表示市局邮车在支局装卸邮件的时间（5 分钟），Tr2 表示在县邮局装卸的时间，V 为市局邮车行驶的速度，$pm0$为该邮路经过的支局的数目。

各县级邮车的邮路应当满足县级邮车的行驶时间加上第一班次市级邮车运送邮件到县邮局的时间及第二班次市级邮车回去的时间还有装卸、整理邮件的时间小于等于每天的可工作时间，即：

$$2 + \frac{\sum_{k=0}^{pji} d_{i,j,k}}{v} + (pi0 + pji) \times Tr2 + \frac{\sum_{l=0}^{pi0} d_{0,i,l}}{V} \le T \qquad （式 3.10）$$

其中，$d_{i,j,k}$表示从X_i县局的第j条邮路的第 k 段，pji 表示该邮路上的支局数（不包括仅路过而不进行装卸操作的支局），$pi0$表示市局邮车到县局X_i的邮路的支局数，T表示一天总工作时间。

这样，问题就化为如何找到一组邮路使得在满足式 3.1 和式 3.2 的条件下，式 3.5 达到最小值。

问题求解

我们自然地想到按照支局之间的最短距离将其分成若干个互不相交的集合，称每一个这样的集合为一个邮区，从而使得同一个邮区中包含的支局尽可能邻近，属于不同邮区的支局之间距离尽可能远，并且对于每个邮区可以通过一条邮路连接起来。对于此“邮区分划”问题，可以应用机器学习领域中的“聚类”算法解决。聚类算法是一类重要的无监督学习算法，它可以用来将数据样本按照彼此之间的“相似度”分成若干“类”，使得同一类内部的样本相似度尽可能高，

不同类之间的样本相似度尽可能低（通常只能得到一个近似最优解）。对应于我们的问题，可以将数据样本之间的相似度定义为支局之间的距离。关于“聚类”算法的研究有很多，这里我们选取了基于合并策略的层级聚类算法(agglomerative clustering)，它的基本思想是先使得每个样本各成一类，然后每次选取距离最小的两个类合并以减少类的数目。此算法因其简明的概念成为聚类方法中最重要的一种。对应于不同的类间距可以得到不同的聚类结果。令 D_i 和 D_j 分别表示两个聚类，当定义类间距为两个聚类之间点距离的最小值时，可以证明，此算法等价于图论的算法中寻找最小生成树(Minimal Spanning Tree)的过程。（参考附录 A：最小生成树简介）。具体的说，假定已经得到了一个最小生成树，将生成树最长的一条边去掉，就把数据分成两类，去掉第二长的边，数据就分成三类，可以如此继续下去。

下面给出了题中 X4 及所辖支局为顶点的最小生成树（实线表示最小生成树中的边，虚线表示原图中剩余的边）：

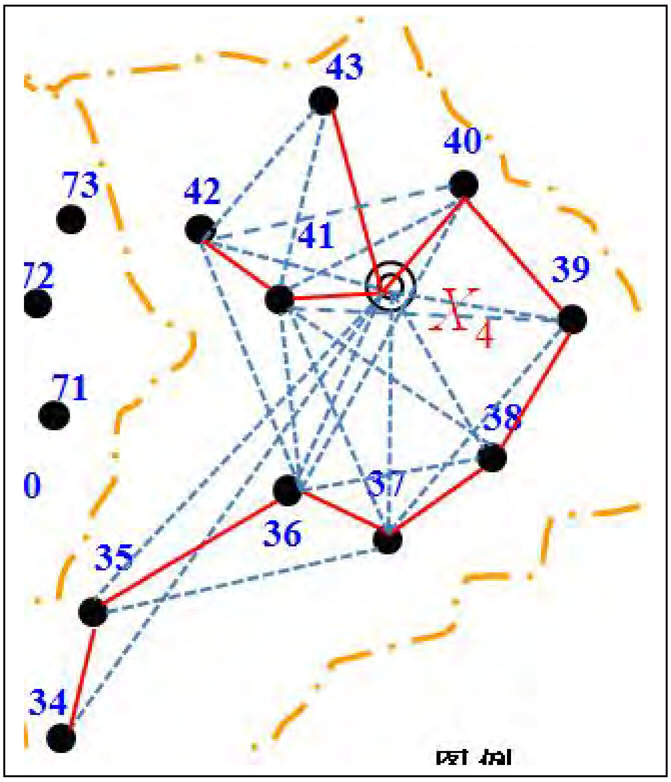

图 3．1 最小生成树示意图

需要注意的是，在实际问题的解决中，我们没有采用依次去掉最小生成树最长边的方法将县级邮区进行分划。这是因为如下两个原因：

1. 上述基于最小生成树的聚类算法对局部条件比较敏感。例如，若最小生成树中边上的权值差别不大，则单纯根据权值分划容易丢掉更优的解。
2. 由于要求所有邮路从县局出发，最优邮区分划可能不等价于最优聚类。

因此，我们设计了一种如下的基于最小生成树的邮区分划策略：

算法 3.1：

初始：最短路径长度=无穷大

开始：for each 最小生成树 T 中的每条边 e：

　　将 e 从最小生成树 T 中去掉，从而分划成 U1 和 U2 两个邮区；

　　分别计算遍历 U1 和 U2 中所有点的最短路径长度 l1 和 l2；

　　若 l1+l2<最短路径长度，则记录分划方法；

　　将 e 从最小生成树中恢复；

end for

由此产生一个新的问题：如何计算遍历一个邮区所有点的路径最短长度。在图论中，这个问题被称为 TSP 问题（Traveling Salesman Problem）。

TSP 问题已经被证明为是一个 NP 完全问题，因此目前只能通过近似算法寻找 TSP 的解。关于 TSP 问题的近似算法有大量的研究工作，并且国际上建立了 TSPLIB 开放数据库用于 TSP 近似算法的测试和比较。由于 TSP 问题是 NP 完全问题的性质，不可能通过枚举所有可行解找到最小值，而必须要通过寻找 TSP 问题的上下界从而尽可能的缩小寻找最优解的空间。这里我们采用了开源的 Concorde TSP 求解器。Concorde TSP 求解器主要采用了 G. Dantzig, R. Fulkerson, and S. Johnson 提出的 Cutting-Plane 方法（一种线性规划模型）计算下界，是当前比较好的 TSP 求解器，可以找到 TSPLIB 数据库中高达 15,112 个城市时，TSP 问题的最优解。

因此，一个对于一个确定的邮区，可以通过 TSP 求解器找到最佳的邮路规划。将此求解器代入算法 3.1 的步骤 2，可以得到上面示意图中最优的分划方法为移除边(38, 39)从而形成（34，35，36，37，38）和（39，40，41，42，43）两个邮区，而非经典聚类算法中移除最长边(35，36)得到的结果。

下面我们分析市局邮车的分化方案，市局邮车在每天早晨在 6:00 之后从地市局 D 出发，在 11 点前返回，因此市局邮车最多有 5 个小时的时间。由题目给出的数据可以用弗洛伊德算法求出市局 D 到各个县局的最短路径（见图 3.1 中红线所示）。各个最短路径的距离见表 3.2。

由表可知各县邮局到达市邮局的最短距离分别是{92、89、98、66、124}，而在 5 个小时的时间内，市局邮车最多可行驶 $65\times5=325$ 公里，远大于上面任意一个县邮局和市邮局的距离，可以考虑用一辆邮车负责向两个县邮局运送信件。

观察该市地图可以发现 X_1 和 X_2 比较接近， X_2 和 X_3 比较接近，因此考虑用一辆车负责向 X_1 和 X_2 或 X_2 和 X_3 运送邮件。从地图还可看出，此时 X_3 县局需要负责 Z_{27} 、 Z_{30} 、 Z_{32} 、 Z_{33} 四个支局，并且从地图上看着四个支局及 X_3 相互间的距离并不远，所以 X_3 县局仅需派出一辆邮车即可完成任务；而 X_1 县局尚有 13 个支局需要解决，负担较重。所以，我们让一辆邮车负责向 X_1 和 X_2 运送邮件。为了减轻 X_1 的负担，我们让该邮车也负责向 Z_{12} 运送邮件。于是该邮车的邮路就成了：

$$D\to Z_{62}\to Z_9\to Z_{10}\to X_1\to Z_{12}\to\to X_2\to Z_{18}\to\to Z_{63}\to Z_{66}\to D$$

由于市区内的支局只能依靠市局邮车运送，因此在设计市局邮车的返回路线时应使这些路线覆盖除标 3.2 中所列各点外的其余各点。在地图上可以根据距离的远近画出从每个县邮局返回市邮局的路径（见图 3.1 中蓝线）。由此得到各市局邮车的邮路及其长度，见图 3.1 所示。从图 3.1 可以看出完成了市局邮车邮路的设计后，市区内的支局已经被全部覆盖掉，各县的一部分支局也被覆盖掉。

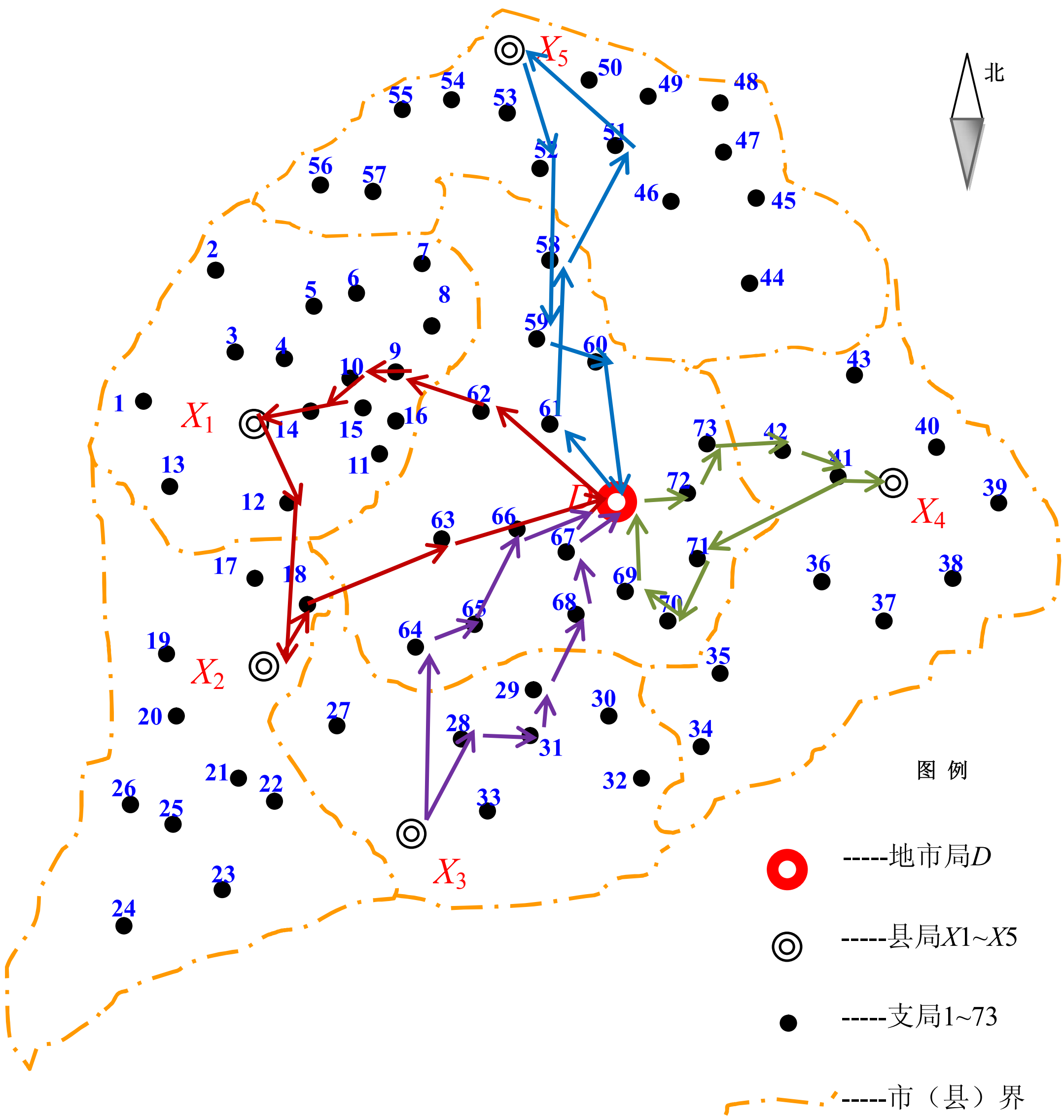

图 3.2 市局邮车的邮路

表 3.2 市局邮车的邮路及其长度

县局	最短路径	长度（公里）
X_1 和 X_2	D 、Z_{62}、Z_9、Z_{10}、Z_{14}、X_1、Z_{12}、X_2、Z_{18}、Z_{63}、Z_{66}、D	255
X_3	D 、Z_{66}、Z_{65}、Z_{28}、X_3、Z_{33}、Z_{31}、Z_{29}、Z_{68}、Z_{67}、D	228

X_4	D、Z_{72}、Z_{73}、Z_{42}、Z_{41}、X_4、Z_{71}、Z_{70}、Z_{69}、D	190
X_5	D、Z_{61}、Z_{58}、Z_{51}、X_5、Z_{52}、Z_{59}、Z_{60}、D	275
总计		948

市局邮车邮路的运输成本为：3×948=2844 元。

完成了市局邮车邮路的规划，下面对县局邮车的邮路进行规划。首先列出各县目前需要进行规划的支局的数目。

表 3.3 各县剩余支局数目

县局	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
支局数目	12	9	4	6	7

由表 2.4 可以看出除了县局 X_3 剩下两个支局比较少外，其余各县局都有 8 个以上的支局。题目要求邮路尽可能少、尽可能短，并且每条邮路只需要一辆邮车，所以为 X_3 安排一条邮路，并根据式 3.1 和式 3.2 确定出其他各县的邮路数。

下面确定 X_1、X_2、X_4、X_5 的邮路规划及邮路调度方案。以 X_1 为例。X_1 还需要负责剩下的 Z_1 等 11 个支局。此部分采用算法 3.1 即可得到。利用最小生成树算法得到 5 个县的支局的分组情况如下：

表 3.4 最小生成树法得到 5 个县的支局分组

	分组 1	分组 2
X_1	Z_1、Z_2、Z_3、Z_4、Z_5、Z_{13}	Z_6、Z_7、Z_8、Z_{11}、Z_{15}、Z_{16}
X_2	Z_{17}、Z_{19}、Z_{20}	Z_{26}、Z_{25}、Z_{21}、Z_{22}、Z_{23}、Z_{24}
X_3	Z_{27}、Z_{30}、Z_{32}、Z_{33}	
X_4	Z_{34}、Z_{35}、Z_{36}、Z_{37}、Z_{38}	Z_{39}、Z_{40}、Z_{43}
X_5	Z_{44}、Z_{45}、Z_{46}、Z_{47}、Z_{48}、Z_{49}	Z_{54}、Z_{55}、Z_{56}、Z_{57}、Z_{50}

利用 TSP 算法得到各个县的邮路见表 3.5

表 3.5 TSP 计算得到各个邮路的路径

	分组 1	邮路长度	分组 2	邮路长度
X_1	X_1、Z_4、Z_5、Z_2、Z_3、Z_1、Z_{13}	1 3 9	X_1、(Z_4)、Z_6、Z_7、Z_8、Z_{16}、Z_{15}、Z_{11}、X_1	1 3 2
X_2	X_2、Z_{18}、Z_{17}、Z_{19}、Z_{20}、X_2	8 7	X_2、(Z_{20})、Z_{26}、Z_{25}、Z_{24}、Z_{23}、Z_{22}、Z_{21}、X_2	4 8
X_3	X_3、Z_{27}、(Z_{28})、(Z_{31})、Z_{30}、Z_{32}、Z_{33}、X_3	1 6 8		
X_4	X_4、Z_{36}、Z_{34}、Z_{35}、Z_{37}、Z_{38}、X_4	1 0 0	X_4、Z_{43}、Z_{40}、Z_{39}、X_4	1 6 3
X_5	X_5、Z_{46}、Z_{44}、Z_{45}、Z_{47}、Z_{48}、Z_{49}、(Z_{50})、X_5	1 6 3	X_5、Z_{54}、Z_{55}、Z_{56}、Z_{57}、Z_{50}、X_5	1 6 4

由表 3.5 可知县局邮路的长度为 1164 公里。

这样市局邮车和县局邮车邮路的总长度为：948+1164=2212 公里。

该规划的运输成本为：3×2212=6636 元。

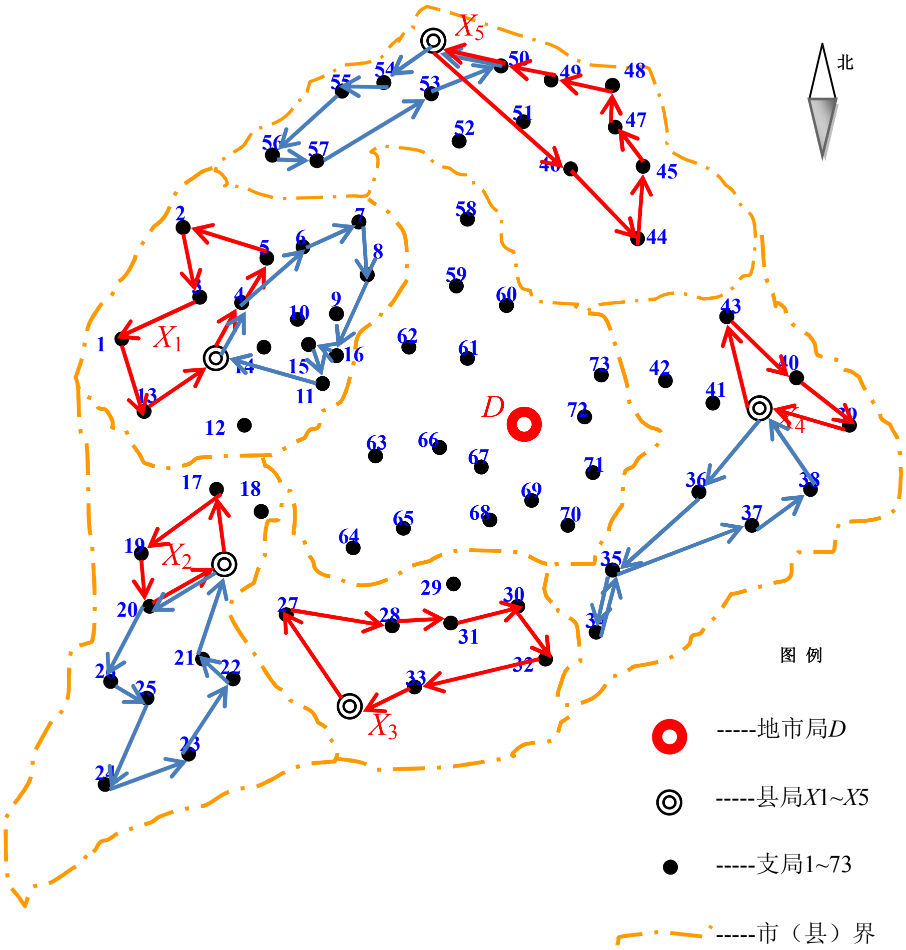

图 3.3 各县级邮车的邮路图

问题 3

问题分析

考虑到部分县与县交界地带的支局，其邮件由邻县县局负责运送可能会降低全区的运行成本，带来可观的经济效益。在两个县相交界的地方，某些支局距离邻县的支局比本县的支局很可能更近一些，比如支局 Z_{27} 到 Z_{22} 的距离比它到 Z_{28} 的距离更近些，所以可以考虑将 Z_{27} 划归到 X_2。因此我们可以考虑利用距离来判断某个支局的归属。

1．基于最短路径的新邮路规划方案

最简单的办法是考虑将某支局 Z_j 到县局 X_i 的距离 $d(Z_j, X_i)$ 来决定 Z_j 的归属。若

$$d(Z_j, X_i) = \min\{d(Z_j, X_k), k = 1,2,3,4,5\}$$ （式 2.16）

则将 Z_j 划分归县局 X_i。

2 基于“邮路竞争支局”思想的邮路规划改进策略

上述方法存在一定的问题，例如，实际中有很多类似图 2.2 的例子。由图 2.2 可知，支局 Z 到县局 Y 的距离 d2 比它到县局 X 的距离要近，但支局 Z 到邮路中支局 Z’的距离 d3 比 d2 更小，因此邮车到达 Z’后可以再行驶一段距离到达 Z, 向 Z 运送邮件，然后再返回到邮路中的其他支局。这样就可以把 Z 划入 X 的邮路中，形成一个新的邮路。而 Y 的邮路因为少了 Z 而形成另一个新的邮路，于是就形成了两个新的邮路。若两个新邮路的路径之和小于原来的两个邮路的路径之和，那么邮路就得到了改进，否则邮路改进失败。

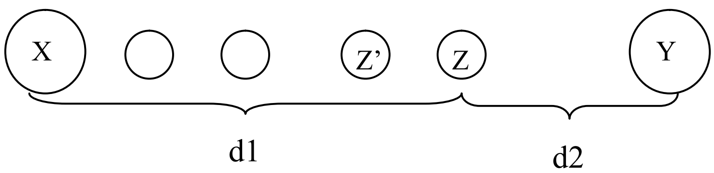

图 3.4

下面，我们介绍一种基于此思想的方法。定义某支局 Z_i 到一邮路 U_j 的距离 $dU_{i,j}$ 为该支局到此邮路上所有支局的距离中最小的一个，即

$$dU_{i,j} = \min\{d(Z_i, Z_l), Z_l \in U_j\}\text{。}$$

该算法的具体步骤如下：

算法 3.2

1、对每条邮路 U 计算所有不属于该邮路的支局到此有路的距离，并且由小到大的顺序排序。

2、取出到邮路 U 距离最近的三个支局进行下面的支局竞争实验：

将该支局 P 加入到邮路 U 中，并对邮路 U 中所有支局和 P 进行 TSP 计算，

形成新的邮路 U’;

将 P 从它原来所在的邮路 U1 中移出，则 U1 变为 U1’，对 U1’的所有支局进行 TSP,得到新的 U1’.

3、检查两个邮路进行 TSP 计算后的结果是否合法（即是否满足式 2.14 和式 2.15），若合法，计算新的 U’和 U1’的路径之和，若其值变小则邮路得到了改进；

4、如果存在一对邮路(U,U1)得到了改进，则返回步骤 1；否则中止。

问题求解

1. 基于最短路径的新邮路规划方案

按照前面问题分析中得出的方法，得出了新的县区规划如下图所示：

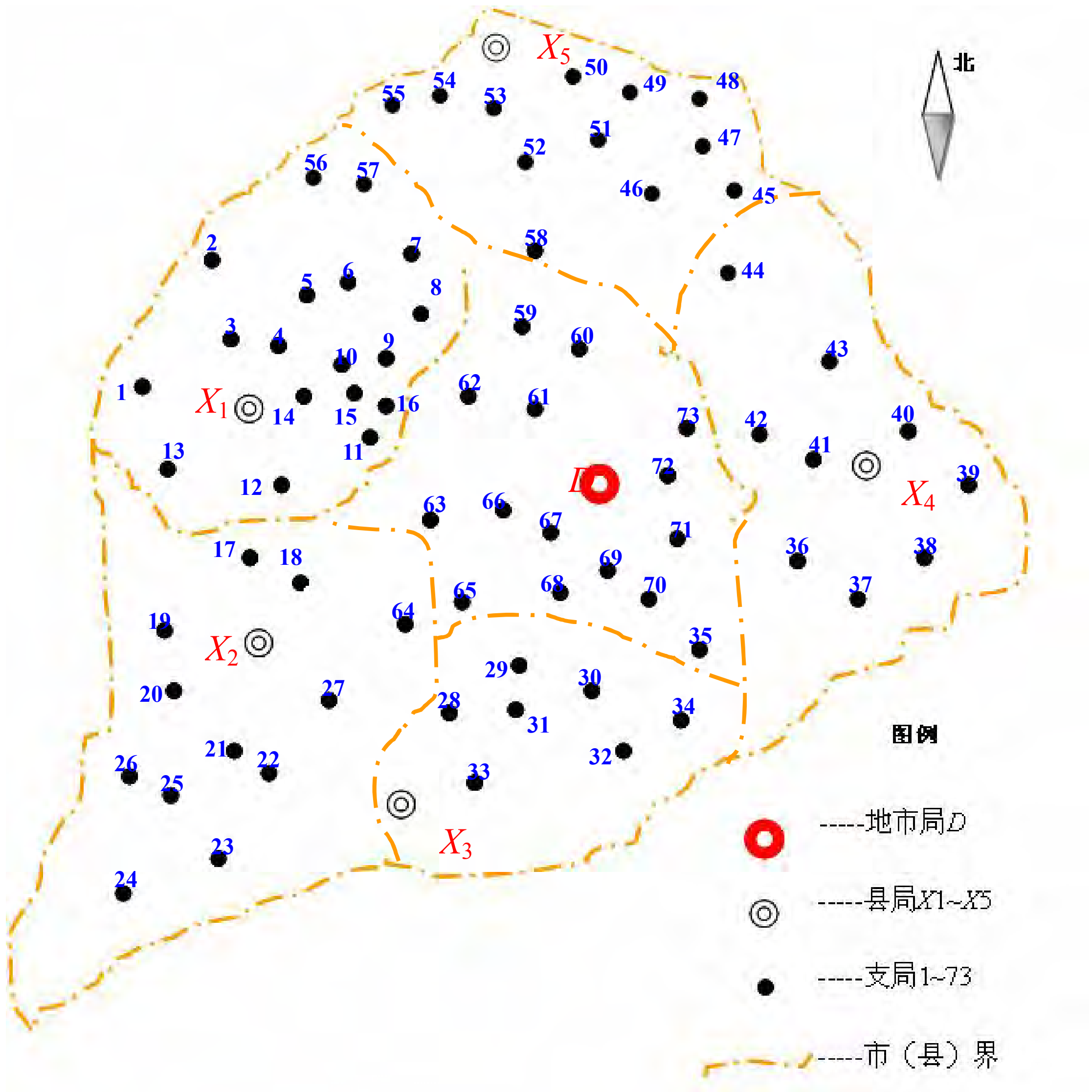

图 3.5 应用县局-支局距离判别法得到的行政规划

2. 基于“邮路竞争支局”思想的邮路规划改进策略

首先求出市区邮车的邮路，如图 3.6 所示：

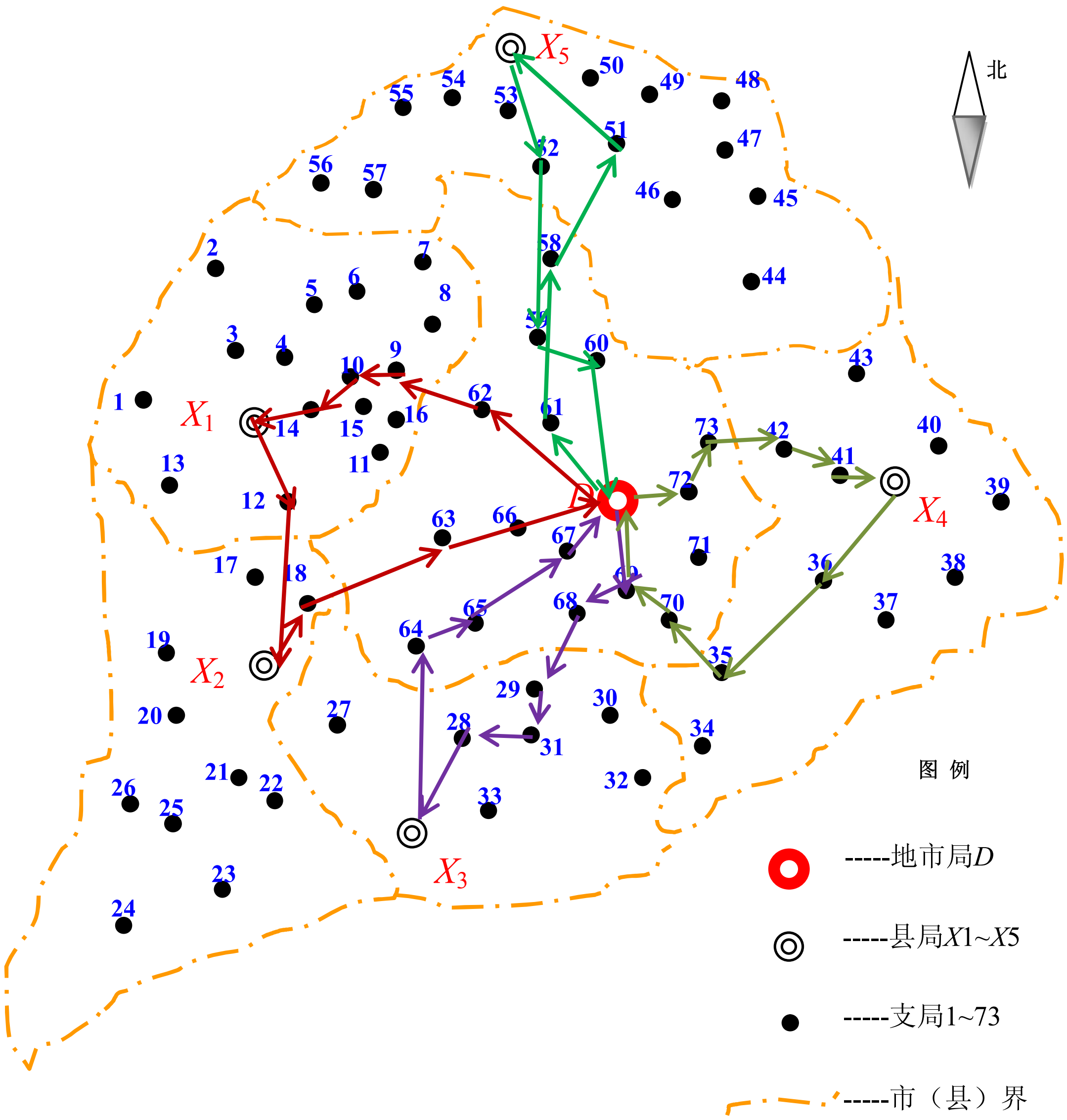

图 3.6 新的市级邮车邮路规划方案图

采用算法 3.2，得到的县区邮路如图 3.7：

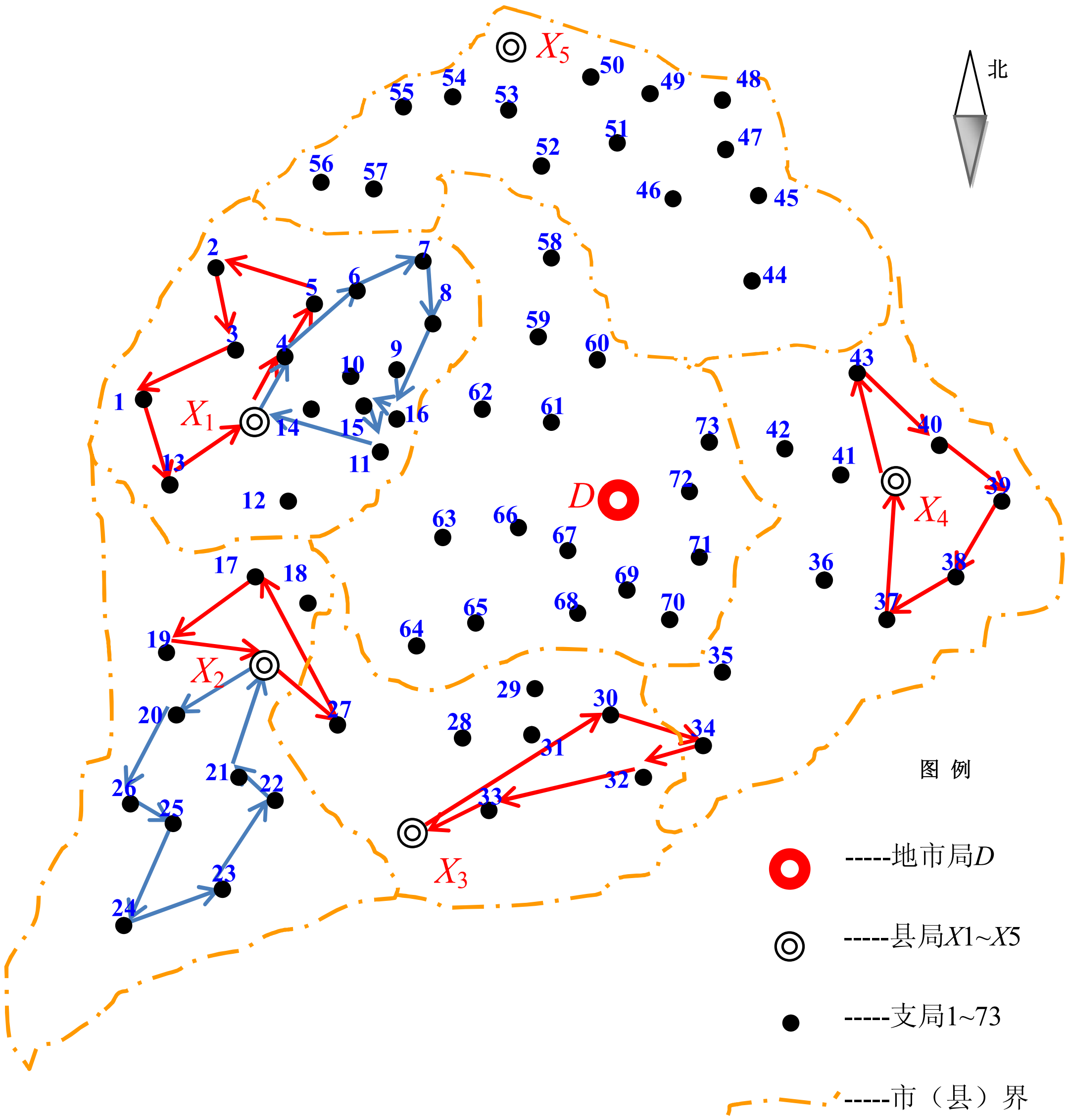

图 3.7 新的县级邮路规划方案图

计算打破行政规划后的运输成本

根据新的邮路规划方案计算出各邮路的总长度如下表所示

	邮路长度/公里	起点	邮路规划方案	终点
X1	139	X１	1，１３，２，３，４，５，13	X１
X1	132	X１	6，７，８，１６，１５，１１，7	X１
X2	116	X2	１７，１９，２７	X2
X2	148	X2	２１，２２，２３，２４，２５，２６，２０	X2
X3	131	X3	３０，３２，３３，３４	X3
X4	１４０	X4	３７，３８，３９，４０，４３	X4

X4	0	X4		X4
X5	163	X5	５０，５３，５４，５，５６，５７	X5
X5	164	X5	４４，４５，４６，４７，４８，４９	X5
D	255	D	６２，９，１０，１４，X1 ，１２，Ｘ２，１８，６３，６６	D
D	232	D	６５，６４，Ｘ３，２８，３１，２９，６８，６９	D
D	199	D	７２，７３，４２，４１，Ｘ４，７１，７０，３５，３６	D
D	275	D	６０，５９，５２，Ｘ５，５１，５８，６１	D
合计	2094			

则打破行政规划后的运输成本为：3×2094=6282 元，

未打破行政规划时的运输成本为：3×2212=6636 元，

打破行政规划可以节约运输成本：6636-6282=354 元。

问题 4

问题分析

县局选址的合理与否对构建经济、快速的邮政运输网络起到决定性的作用。合理的县局的位置应当使得该县的邮路的长度尽可能短，需要的邮车尽可能少。这样子，县局到各个支局的长度应当尽可能的短，所以，一种方案是将县局的位置放到各个支局距离之和为最小的点。

问题求解

将一个县内的支局和县局都看成是一个普通的邮局，计算每个邮局到其他邮局的最短路径的长度之和，将这些长度按照大小排序，则其中最小的那个长度所对应的邮局可以作为县邮局。

经过计算得出以下新的县局的选址方案：

旧址	X1	X2	X3	X4	X5
新址	Z4	Z21	Z31	X4(不变)	X5（不变）

按照问题 2 的做法，先求出市局邮车的邮路，见图 3.8。

然后运用最小生成树算法求出各个县内支局的分组，最后对每一个分组进行 TSP 计算，即可得出各县邮路的最优路线，见图 3.9。

该邮路规划方案可以用下表示

	邮路长度/公里	起点	经过的支局	终点
新 X1	117	Z4	X1, Z13，Z1，Z2	Z4

新 X1	141	Z4	Z6，Z7，Z8，Z9，Z16，Z15，Z11，Z15，Z14	Z4
新 X2	163	Z21	Z22，Z23，Z24，Z25，Z26，Z20，Z19	Z21
新 X3	134	Z31	Z29, Z30, Z32, Z33, X3, Z28	Z31
X4	163	X4	Z36，Z35，Z34，Z35，Z37，Z38	X4
X4	100	X4	Z43，Z40，Z39	X4
X5	164	X5	Z54，Z55，Z56，Z57，Z53，Z50	X5
X5	163	X5	Z46，Z44，Z45，Z47，Z48，Z49，Z50	X5
D	256	D	Z62，Z9，Z10，Z4，X1,Z12,Z17,X2, Z18, Z63, Z66	D
D	260	D	Z67, Z65, Z64, X2, Z21, Z27, Z28, Z31, Z68	D
D	190	D	Z72, Z73, Z42, Z41,X4, Z41, Z71, Z70, Z69	D
D	275	D	Z61, Z58, Z51,X5, Z52, Z59, Z60	D
合计	2126			

该邮路的运输成本为：3×2126=6378 元，比县局迁址前的运输成本（6636 元）少了 258 元。

图 3.8 县局迁址后的市局邮路示意图

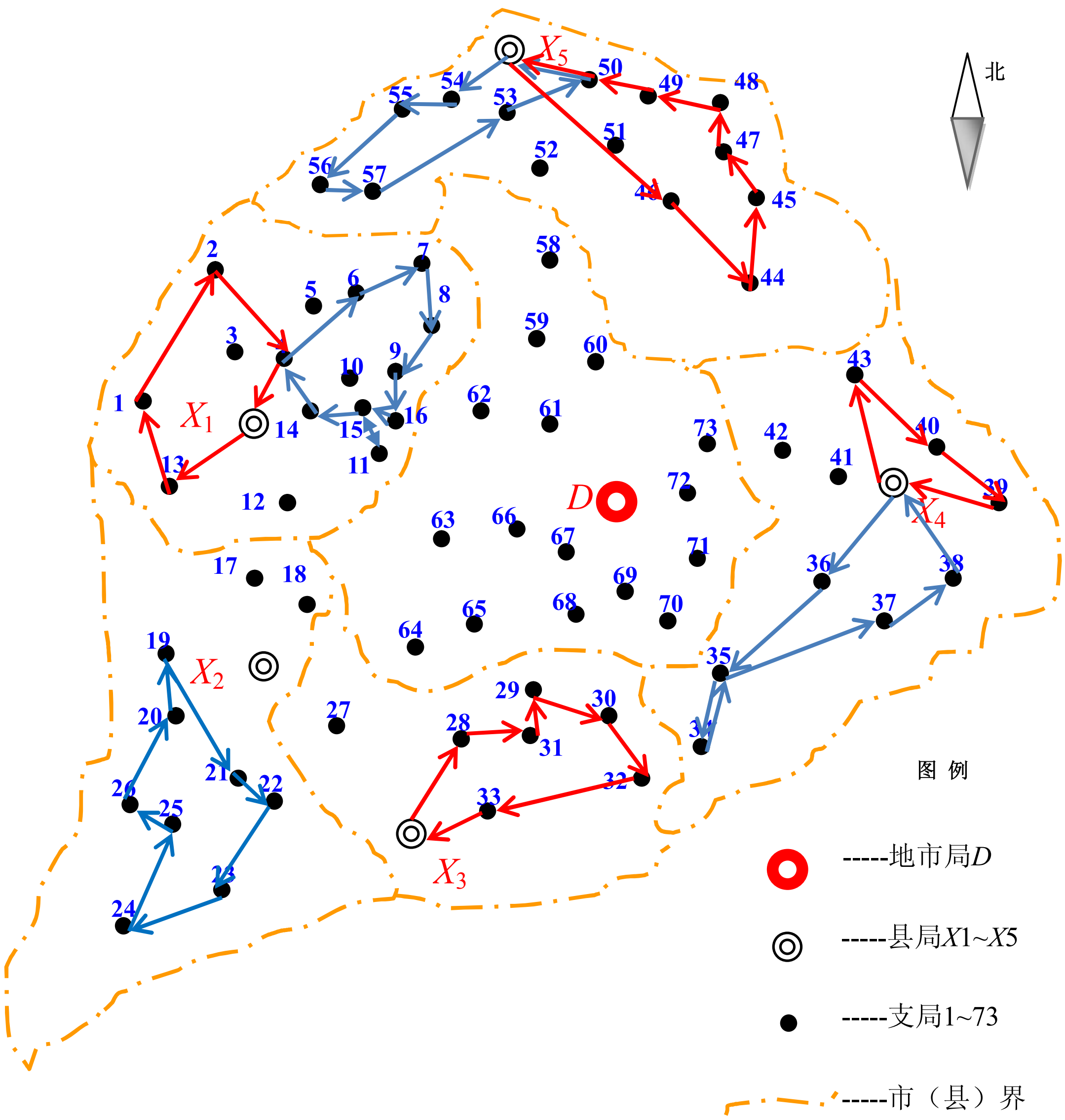

图 3.9 县局邮路迁址后的县局邮路示意图

写给省局网运处的一封信

省局网运处的同志：

你好。我是×区邮局网运处负责人×××。

近年来，我区邮政事业蓬勃发展，各种邮寄业务量逐年增多，对我地区邮政网络的运营带来了较大的压力。目前我区拥有市邮局 1 个，县邮局共 5 个以及地方支局共 73 个，区级邮路 4 条，县级邮路 9 条，邮路的总长度为 2212 公里。随着邮件业务量的增大，我区的邮车及邮路的运行出现了以下问题：

1. 邮路的运输压力过大。
2. 整体运行成本较高。
3. 邮局运输系统对于紧急任务的应变能力。

经过长期的工作和总结，我网运处的工作人员发现引起目前的邮政运营效率低下的主要原因在于县邮局的位置选取不合理，某些县邮局由于地处该县边界，增大了该县内各条邮路的运输压力以及运行成本。因此，我处认为县邮局的重新选址能够对构建经济快速的邮政网络及到决定性的推动作用。故此我处聘请了专门的邮路规划人员对我区目前的邮政运输网进行了全方位的分析，通过建立最优化的数学模型，我们利用已知的统计数据对本区邮政网络的邮路及邮车进行了优化计算，计算结果表明通过对我区内部分县邮局重新选址可以有效地提高邮政运输网的整体经济效益及效率。

鉴于上述理由，我处建议将目前 X1 县邮局改为 Z4 处，X2 县局改为 Z21 处，X3 县局改为 Z31 处，并将 X1，X2，X3 弱化为普通支局，X4 和 X5 县局仍保持不变。目前我区的邮路长 2212 公里，每天的运输成本为 6636 元；若按上述建议迁址后，我区的邮路长度可以缩短为 2126 公里，邮路每天的输成本为 6378 元，这样共节省邮路 86 公里，每天可节约运输成本 258 元。

希望您收到我处的来信后能够认真考虑我们的建议，有疑问的地方可随时和我处工作人员联系，我们会积极配合您的工作。

此致

敬礼

###市邮局网运处

2007 年 10 月 22 日

参考文献

[1] 模式分类 Richard O.Duda 著，李宏东 译 机械工业出版社

[2] 数学建模 周启源 清华大学出版社

[3] 数据结构 唐发根 北京航空航天大学出版社

[4] 算法设计技巧与分析 M.H.Alsuwaiyel 著 电子工业出版社

[5] 模式识别导论 沈清 著 国防科技大学出版社