

# 全国第六届研究生数学建模竞赛



## 题目 基于特征曲线提取和曲面匹配的弹痕自动比对方案

### 摘 要:

本文研究的问题是，如何根据弹痕的测量数据进行弹头的自动比对。

针对问题一，本文提出了两套方案共四个模型来消除人工测量误差：基于特征曲线提取的方案和基于曲面匹配的方案。其中，模型一、二、三为弹痕形状特征曲线的提取方法；模型四为中心重合法、近似法矢重合法与多点预定位法相结合的曲面匹配过程。

针对问题二，本文采用二维图像中值滤波的方法来进行信号去噪，并提出基于多项式拟合的数据拓展方法来消除边界失真。

针对问题三，首先提出了有效数据的提取方法，给出了包括形状特征曲线在内的比对特征及六个差异度衡量指标；然后，考虑到实际应用，提出并改进了弹痕相似度的定义（模型五）；在此基础上，根据不同的判断标准，引入经验权重系数 $\lambda$ 来平衡各种判断的重要性，又提出了弹头综合相似度的定义（模型六）；最后建立了整套方案的有效性评价体系，并给出了整个弹头自动比对过程的流程图。对问题三中提供的数据，进行有效性验证，结果绝对正确率为41.67%。

针对问题四，本文按每个弹头相似度由高到低用列表方式给出了与之相似的前7位的弹头文件号。其中前六行如下：

样本弹头	相似度 $Ma_{cth}$ 由大到小排名					
t01	t18	t09	t12	t13	t19	t04
t02	t09	t03	t08	t19	t12	t11
t03	t08	t18	t12	t02	t22	t20
t04	t12	t13	t21	t01	t18	t02
t05	t22	t20	t14	t16	t08	t10
t06	t16	t07	t22	t12	t08	t19

关键词：形状特征曲线 曲面匹配 多点预定位 相似度 有效性评价

参赛队号 1042255 \_

队员姓名 温惠 刘腾 翁海霞

参赛密码 \_\_\_\_\_

(由组委会填写)

# 1 问题重述

## 1.1 问题背景

枪弹头痕迹对比检验学在公安实践中一方面可以判断发射枪种、枪支，从而去寻找持枪人；另一方面可以确定射击距离，判明案件性质，从而达到揭露犯罪、证实犯罪的目的。传统的枪弹头痕迹对比方法是通过显微镜肉眼观察，比对两个弹头上的线条型痕迹，看这些线条的粗细分布是否吻合。这种方法缺点比较明显，一是效率低；二是弹头本身不易保存。为了有效地打击和控制持枪作案的犯罪活动，进一步加强枪支管理，迫切需要一种高效精确的枪弹头痕迹对比方法，而现代高精度数据采集设备为自动对比方法创造了条件。

## 1.2 问题描述

枪管有4条凸膛线共8个棱，分为4个主棱和4个次棱。所以子弹发射后，在弹头上留下的痕迹分为4片主棱线的痕迹和4片次棱线的痕迹。由于枪弹通过枪管时只旋转了一个很小的角度，擦痕分布成斜线状(与圆柱母线有一个夹角)，每一片痕迹的主要部分都显示为不同大小和不同深浅的线条。这里假设弹头的直径为 $7.90mm$ ，长度约为 $12mm$ 。

自动对比方法的过程分为两步：

第一步，通过光学设备采集弹头上的8片痕迹的3维数据，保存为8个文件。

测量时注意以下几个问题：

- 在光学设备上采集弹头上痕迹的3维数据时，用于采集数据的光源和数据采集仪器是固定不动的，光源在被测弹头的侧上方，感光器在弹头的正上方；弹头由人工固定在支架上，可以由人工调节该弹头的位置和姿态。
- 测量基准平面取为固定在测量设备上的空间坐标系  $xoy$  平面。
- 沿  $x$  轴方向和沿  $y$  轴方向的测量步长均为  $2.75$  微米， $z$  的测量精度为  $1$  微米，数据的单位是毫米。
- 基准平面在弹头痕迹的附近，测量时应调节弹头的姿态使得弹头圆柱中心线尽量平行于基准平面； $y$  轴尽量平行于擦痕的走向。弹头的姿态靠人工调节，所以上述的两个平行都不是准确的平行。
- 这4条次棱的数据是分4次测量的，所以它们只能在4个独立的坐标系中分别显示它们的图像，没有一个参照系能使它们组合成一个整体图像在一个坐标系中显示。
- 人工调节很难使两个弹头在同样位置和同样姿态情况下被测量，从而会造成测量误差。通常会造成  $0.03mm$  左右的平移误差和  $0.2^\circ$  的转动误差。
- 由于数据量很大，只提供对应4条次棱的数据，其顺序统一按照一个方向排序，

例如按照从弹头的底部向头部看去为逆时针方向排序。

- 每个文件的数据有 40 多万行，每行有 3 列。每一行的三个数据对应弹头表面上一个点的空间坐标  $(x, y, z)$ ，第一列对应  $x$  坐标；第二列对应  $y$  坐标；第三列对应  $z$  坐标。

第二步：采用适当的方法，通过电脑比对，判别一个弹头与样本弹头的相似程度，以便确认发射该弹头的枪支。根据实践经验，对同一支枪发射的两个弹头的相似程度的判别标准为：4 个主棱中通常有一至二个吻合得比较好，而 4 个次棱中通常可以有 2 至 3 个吻合比较好。

### 1.3 问题的提出

本文主要研究解决以下几个问题：

- 1、如何处理由位置和姿态造成的测量误差，使得两个弹头可以尽量在相同位置和相同姿态的情况下进行比对。即通过何种方法来分析处理数据以尽量消除或减小这种由于人为调整而造成的测量误差。
- 2、采取有效的方法消除由于弹头表面的损伤、锈迹、油斑、杂质物及痕迹生成的随机性造成的数据误差和噪声。本文中主要研究通过对原始数据进行某种滤波的方法来消除这种噪声。
- 3、根据附录给出的 6 只枪发射的 12 个弹头次棱部分的数据解决如下问题：
  - (1) 依据附件中的数据，提出一些可以用于弹痕比对的特征并提取这些特征。
  - (2) 依据这些数据，找出采用数据的哪一部分用作比对其效果比较好。
  - (3) 给出完整的比对方案、算法。
- 4、根据附录给出的 11 支枪发射的 22 个弹头次棱部分的数据解答如下问题：
  - (1) 用解决第三个问题的方法给出这 22 个弹头痕迹两两之间的相似程度，并列表表示；
  - (2) 用列表的方式给出每个弹头按相似度由高到低给出与之相似的前 5 位的弹头文件号。

## 2 全局假设

假设一：弹头由圆柱体和锥体组成，划痕在弹头的圆柱体部分，每个子弹在射出前的几何形状是完全一致的。

假设二：在人工调节测量弹头划痕时，沿  $x$  轴方向和沿  $y$  轴方向的测量步长均为 2.75 微米， $z$  的测量精度为 1 微米。

假设三：在人工调节测量弹头划痕时，弹头的平移误差限为 0.03mm，旋转误差限为 0.2°。

假设四：对同一支枪发射的两个弹头，4 个次棱所划的弹痕中有 2 至 3 个吻合较好。

假设五：用于采集数据的光源和数据采集仪器是固定不动的，光源在被测弹头的侧上方，感光器在弹头的正上方；弹头由人工固定在支架上，可以由人

工调节该弹头的位置和姿态。

假设六：基准平面在弹头痕迹的附近，测量时应调节弹头的姿态使得弹头圆柱中心线尽量平行于基准平面； $y$ 轴尽量平行于擦痕的走向。

假设七：测量时，数据采集器的位置是不动的，每次测量时，移动的都是被测物。

假设八：弹头的直径为7.90mm。

### 3 符号约定及相关概念

#### 3.1 符号约定

$t_i$	第 <i>i</i> 号弹头；
$ct1$	在一次弹痕比较中的样本弹痕；
$ct2$	在一次弹痕比较中的比对弹痕；
$m$	弹痕曲面数据点在 $xoy$ 平面上投影的行数，每行 $x$ 坐标相同；
$n$	弹痕曲面数据点在 $xoy$ 平面上投影的列数，每列 $y$ 坐标相同；
$C1 = [c_{ij}]_{mn \times 3}$	弹痕 $ct1$ 的坐标矩阵；
$C2 = [c_{ij}]_{mn \times 3}$	弹痕 $ct2$ 的坐标矩阵；
$T$	坐标变换矩阵；
$\varepsilon_y$	平移误差限；
$\varepsilon_\theta$	转动误差限；
$r_b$	弹头半径；
$o$	标准坐标系；
$character_{1,2,3,4,5,6}$	反映弹痕差异度的各项指标；
$Lmatch$	弹痕相似度；
$Match1$	弹头相似度指标一；
$Match2$	弹头相似度指标二；
$Match$	弹头综合相似度；
$\lambda$	经验权重系数， $\lambda \in (0,1)$ ；
$N$	待比对的弹头总数；
$q_i$	对样本弹头 $i$ ，将所有比对弹头按相似度从大到小进行排名，与弹头 $i$ 为同一支枪发射的弹头的名次

### 3.2 相关概念

- 数据匹配：数据之间按照某种内在关系进行配准。对表示地理实体的空间数据而言，包含两个方面的处理：一是实体之间在空间位置上相互联系所要求的处理（如计算相互之间的距离、区域的重叠覆盖等）；二是数据本身由于数据源不同，数据获取方式或时间不同所要求的处理（如两点一致性检验，线段一致性检验等）。本文讨论的问题属于第一种情况。
- 吻合：当两弹痕数据已经匹配完成后，两组数据点在同一坐标系下的差异指标在可以接受的误差限内，或者说两组数据的相似度高于设定的阈值。
- 弹痕曲面：膛线在弹头上划过的区域形成一个曲面，即为弹痕曲面。
- 划痕：膛线不是光滑的，所以膛线上的一个凸起会划出一根痕迹，定义这根痕迹为划痕，整个弹痕由若干条划痕组成。
- 系统误差：由于测量坐标系的不同，或者由于被测物在测量系中的位置姿态不同所造成的误差。
- 随机误差：由于弹头表面的损伤、锈迹、油斑、杂质物及痕迹生成的随机性，所造成数据误差和噪声。

## 4 问题分析

本文主要研究的问题是：通过两弹头上弹痕的比对来判定两它们是否出自同一支枪。设两个弹头分别为  $t_1$ 、 $t_2$ ，弹头  $t_1$  的某一条弹痕  $ct1$  为样本弹痕， $t_2$  中某条弹痕  $ct2$  为比对弹痕。定义弹痕  $ct1$  的坐标矩阵为：

$$C1 = [c_{ij}]_{m \times 3} \quad (4.1)$$

$$c_{ij} = \begin{cases} \text{第}i\text{个点的}x\text{坐标} & j = 1 \text{ 时} \\ \text{第}i\text{个点的}y\text{坐标} & j = 2 \text{ 时} \\ \text{第}i\text{个点的}z\text{坐标} & j = 3 \text{ 时} \end{cases}$$

其中： $m$ ——弹痕曲面数据点在  $xoy$  平面上投影的行数，每行  $x$  坐标相同；

$n$ ——弹痕曲面数据点在  $xoy$  平面上投影的列数，每列  $y$  坐标相同。

同样地，弹痕  $ct2$  的坐标矩阵为  $C2 = [c_{ij}]_{m \times 3}$ 。

### 4.1 数据的预处理

在文件给出的数据中，会存在一些数据误差和噪声，这是由于弹头表面的损伤、锈迹、油斑、杂质物及痕迹生成的随机性所造成的。这些噪声会对判断弹痕是否吻合造成一定影响。因此，在进行具体的数据分析处理之前，首先要滤除原始数据中的这些噪声毛刺，才会得到更为合理的结果。

此外，并不是所有给出的数据点都对对比有明显的意义。文件中的给出的数据点覆盖了部分弹痕区域和部分没有弹痕的弹头表面。在对比两条弹痕时，如果选用所有数据点，不仅会增加很多无意义的计算，还会影响吻合判别的精度，所以应仅选用有效的这部分数据点进行对比。在进行弹痕对比分析之前，应先抽取有效数据，在有效数据的基础上再进行以后的分析处理。

综上，数据的预处理包括滤除随机误差（噪音）和有效数据的提取。只有经过以上两步处理后，得到的数据才是比较真实有效的，既减小了噪音对计算的影响，又节省了运算量，还提高了吻合判断的精度。

#### 4.2 关于坐标系及数据的可比性

根据假设六，测量时应调节弹头的姿态使得：基准平面在弹头痕迹的附近；弹头圆柱中心线尽量平行于基准平面； $y$ 轴尽量平行于擦痕的走向，示意图如下：

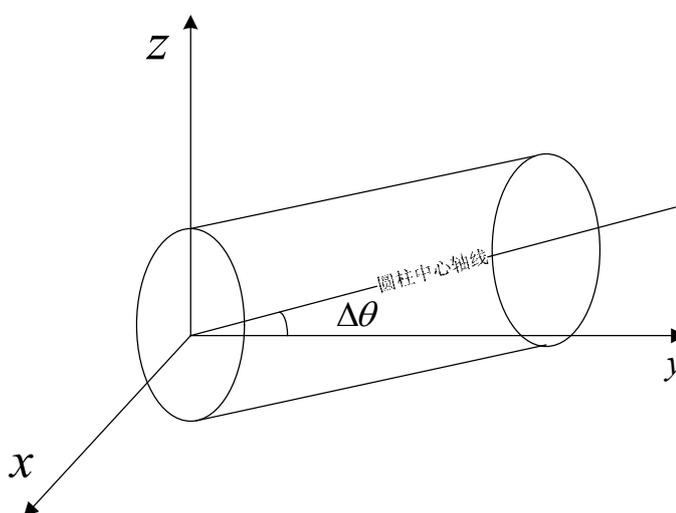


图 1 坐标轴、划痕和弹头的位置示意图

##### ➤ 测量过程的分析：

用于采集数据的光源和数据采集仪器是固定不动的，光源在被测弹头的侧上方，感光器在弹头的正上方；弹头由人工固定在支架上，可以由人工调节该弹头的位置和姿态。可以认为，测量的参考坐标系是由数据采集仪器（CCD）决定的，它是固定不动的，所以参照坐标系也是固定不动的，变动的是弹头在这个坐标系下的位置和姿态。

##### ➤ 产生系统误差的原因及其对吻合判定的影响

弹痕与弹头的相对位置是固定的。所以每次测量时，弹痕在这个坐标系下的位置姿态都是不同的。也就是说，假如对同一个弹痕进行两次观测，那么由于人工调节的误差，我们观测的两组数据并不相同，因为观测的并不是这条弹痕的相同的部分。比较两弹痕是否吻合，还要比较弹痕相对于弹头的位置是否吻合。这样，直接将每个弹痕的观测数据进行对比将会造成很大的系统误差。

在判定两组弹痕数据是否吻合时，为了确保两者有可比性，不仅要求两组数据是在同一坐标系下的坐标值，还要确保它们是整个弹痕上相互对应的部分。所以我们要找出一个坐标变化矩阵，将观每组测值进行平移和转动，使它们在同一

个标准坐标系下的位置姿态尽量相同，以消除系统误差，从而得到，在同一个坐标系下，具有可比性的弹痕数据。

因为同一坐标系下的数据对比才有意义，这里设观测的参考坐标系 $O$ 为标准坐标系。

#### 4.3 测量仪器结构分析及测量误差产生的原因

在人工调节测量弹头划痕时，弹头的平移误差限为 $\varepsilon_y = 0.03mm$ ，旋转误差限为 $\varepsilon_\theta = 0.2^\circ$ 。通过研究采集数据的光学设备（如下图所示），以及其测量台部分和手动调节装置的结构，可知：平移误差是由于平移台的前后移动造成的，即平移误差是指弹头位置沿观测坐标系的 $y$ 轴方向变化所造成的误差；转动误差主要是由于，手动调节平移台上的转盘，无法将划痕方向与 $y$ 轴方向完全平行所造成的，所以转动误差主要是指划痕方向与 $y$ 轴方向的夹角。在实际测量中，将弹头装到载物台时，也会产生弹头与 $x$ 、 $z$ 轴夹角的变动，但是这些变动也可以通过手动微调在一定程度上加以矫正，所以在本文中忽略这种次要的转动误差。由此给出一个局部假设：

假设九：平移误差是指弹头位置沿观测坐标系的 $y$ 轴方向变化所造成的误差；

转动误差是指划痕方向与 $y$ 轴方向存在的夹角。

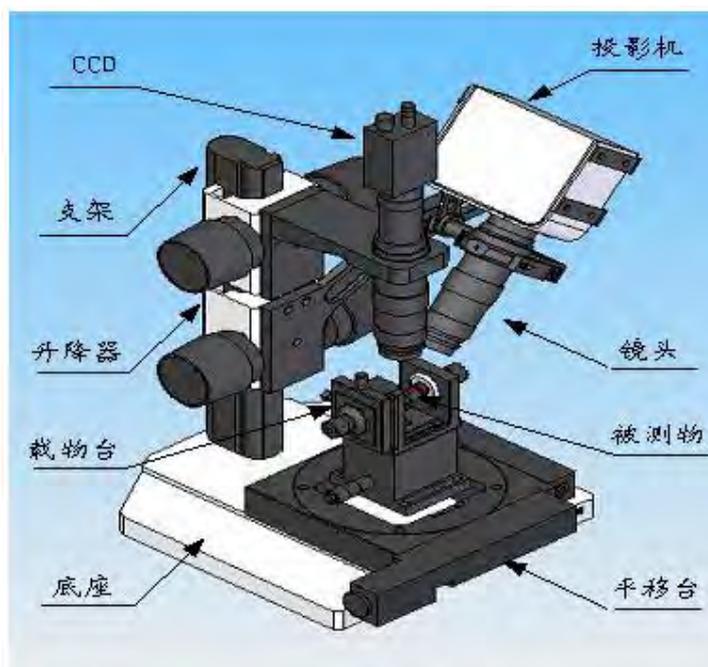


图 2 测量仪器结构示意图

#### 4.4 弹痕相似度和弹头相似度的关系

研究弹头自动比对的核心问题是：任意两弹痕相似度计算。那么，当确定任意两弹痕的相似度之后，如何科学地定义弹头的相似度，则是另外一个重要的问题。下面分析弹痕相似度和弹头相似度的关系。

##### 4.4.1 相对位置分析

所有弹头的弹痕编号顺序是统一按照一个方向排序的, 设从弹头的底部向头部看去为逆时针方向排序, 如图(1)所示。因此, 当第一对弹痕比较对确定时, 另外的3对也就确定了。所以, 在对两弹头作比较时, 它们共有4个相对位置, 在每个位置需要比对4对弹痕。要计算两个弹头的相似度, 首先要计算出所有可能的弹痕对相似度, 这样的弹痕比较对一共有16个, 分为4个比对组合, 每个组合代表一个相对位置(如表1)。

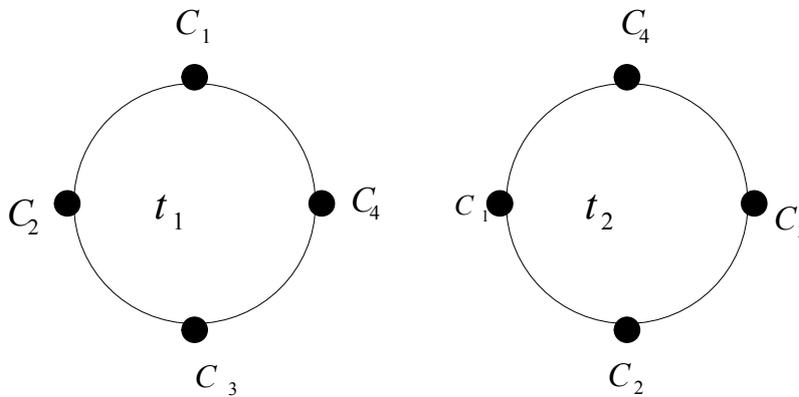


图3 弹头痕迹编号示意图

表格 1 四种相对位置下需比对的弹痕对

位置一	比较对1	比较对2	比较对3	比较对4	位置二	比较对5	比较对6	比较对7	比较对8
$t_1$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$t_1$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$t_2$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$t_2$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_1$
位置三	比较对9	比较对10	比较对11	比较对12	位置四	比较对13	比较对14	比较对15	比较对16
$t_1$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$t_1$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$t_2$	$c_3$	$c_4$	$c_1$	$c_2$	$t_2$	$c_4$	$c_1$	$c_2$	$c_3$

##### 4.4.2 弹头吻合的必要条件

根据假设四, 对同一支枪发射的两个弹头, 4个次棱划痕中有2至3个吻合比较好。可以认为, 如果两弹头是同一支枪发射的, 至少会有2对弹痕相似度较高; 但当两个弹头上2对或更多对弹痕吻合时, 它们却不一定是同一支枪发射的。所以, 至少有2个弹痕吻合, 是判断两弹头出自同一支枪的必要条件, 而不是充分

条件。

#### 4.4.3 计算弹头相似度的有效信息

要计算弹头的相似度，首先要算出16个弹痕比较对的相似度，确定使弹头相似度最大的一种比对组合（相对位置）。这时，其它3种位置下的弹痕相似度就失效了。只有在这个位置下的4个弹痕相似度才是计算弹头相似度的有效信息。

## 5 模型的建立

### 5.1 问题一的解决

人工测量引入的系统误差，造成两组数据为两个弹痕在不同位置 and 不同姿态的情况下测得的。为了消除或减弱这种误差，本文提出两种解决方案：

- 对每个弹痕提取其独立的、与测量姿态无关的形状特征，再将这些特征置于尽量相同的位置下进行比对；
- 平移旋转比对弹痕曲面，使其处于和样本弹痕曲面最贴合（最相近）的位置姿态，再进行比对。

针对以上两种思路，建立下面两个模型用于消除人工测量引入的系统误差。

#### 5.1.1 方案一：基于形状特征提取的系统误差消除方案

(1) 对于转动误差：

在一个弹痕中， $y$ 坐标相同的一系列数据点可以生成一条曲线，当 $y$ 坐标从小到大变化时，对每一个 $y_i$ 都生成一个这样的曲线 $g_i$ 。这些曲线可以在一定程度上反映弹痕曲面的形状特征，它们的波动形状大致相同，都有若干个波峰和波谷。这些波谷形成的原因是：膛线不是光滑的，它上面会有一些小凸起，膛线在子弹表面划过后，一个小凸起就会划出一根划痕，反映在这条曲线上就是一个波谷。如果让同一个的凸起点划过的痕迹拥有相同的 $x$ 坐标值，那么就消除了划痕方向与 $y$ 轴方向的夹角，即消除了旋转误差。根据以上分析，本为提出下面的模型。

#### ➤ 模型一：消减转角误差的优化模型

设其中某一条曲线为 $g_i$ ，位于它右侧（ $y$ 增大方向）的相邻曲线为 $g_{i+1}$ 。以两曲线的差值的平方和 $f1$ 为目标函数，让曲线 $g_{i+1}$ 沿 $x$ 轴方向平移，寻求使目标函数达到最小值的沿 $x$ 轴方向平移量 $dx$ ，即寻求一个最优值点。

$$\text{S.t.} \begin{cases} f1(dx) = \min \sum_{j=1}^k |G_j G_j'|^2 = \min \sum_{j=1}^k (z_j - z_j')^2 \\ dx \in \left( -\sin\left(\frac{0.2}{180}\pi\right)y_{i+1}, +\sin\left(\frac{0.2}{180}\pi\right)y_{i+1} \right) \end{cases} \quad (5.1)$$

式中， $G_j$ —— $g_i$ 上的第 $j$ 个点；

$G'_j$  ——  $g_{i+1}$  上与  $G_j$  的  $x$  坐标相同的点;

$k$  ——  $g_i$  与  $g_{i+1}$  上处在相同的  $x$  区域内的数据点个数。

对两组数据处理前后的图像对比如下:

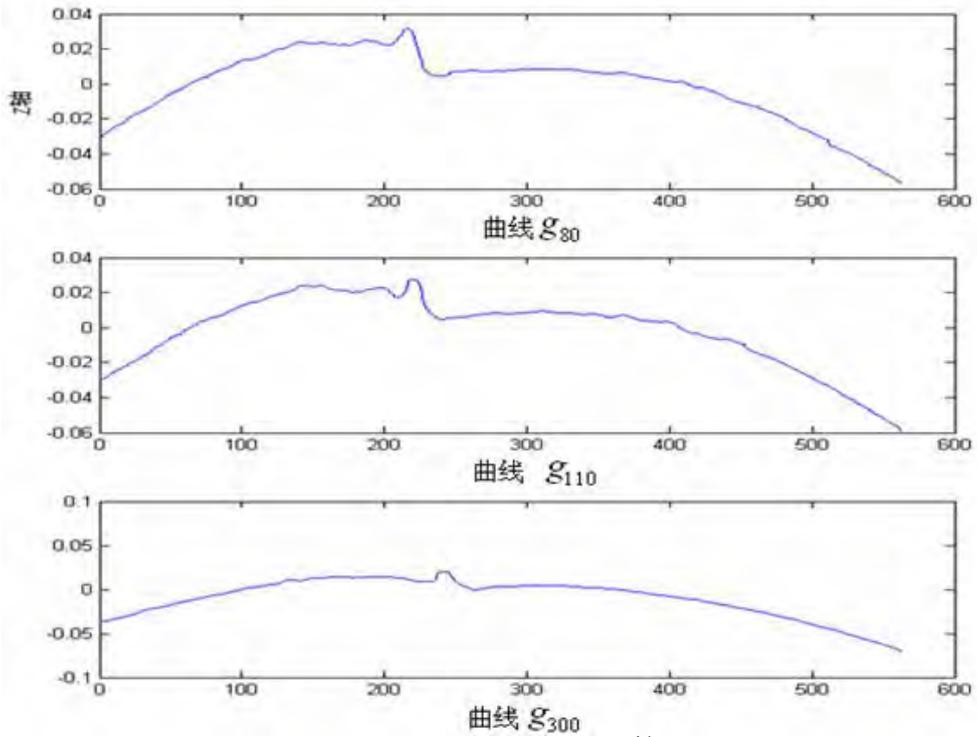


图 4.1 处理前 77T1-1203959 的 c3 中的  $g_i$  曲线

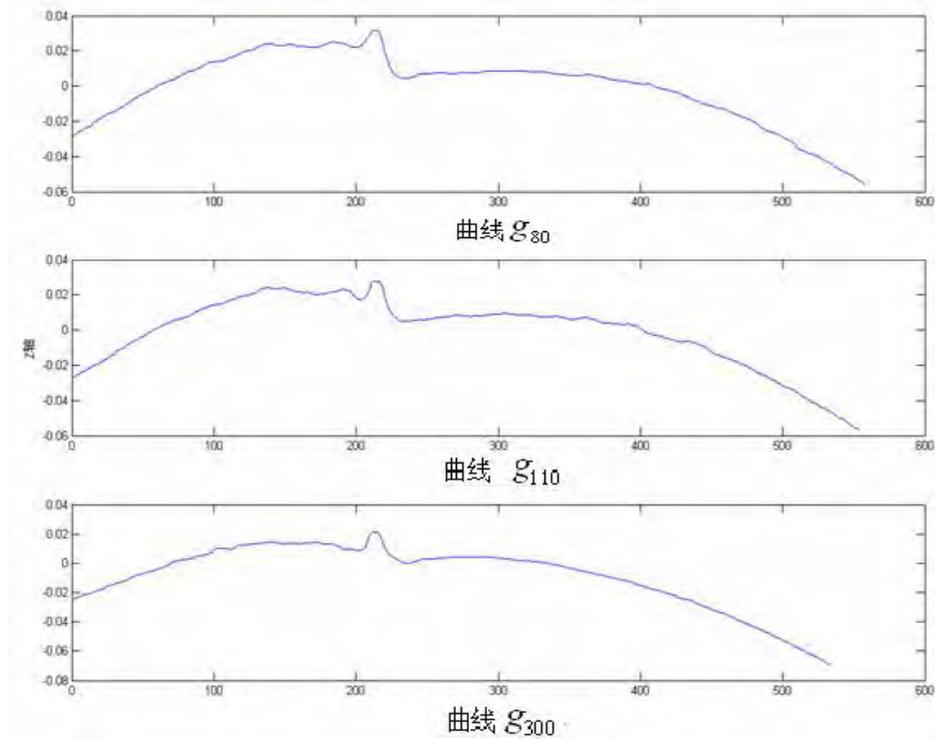


图 4.2 处理后 77T1-1203959 的 c3 中的  $g_i$  曲线

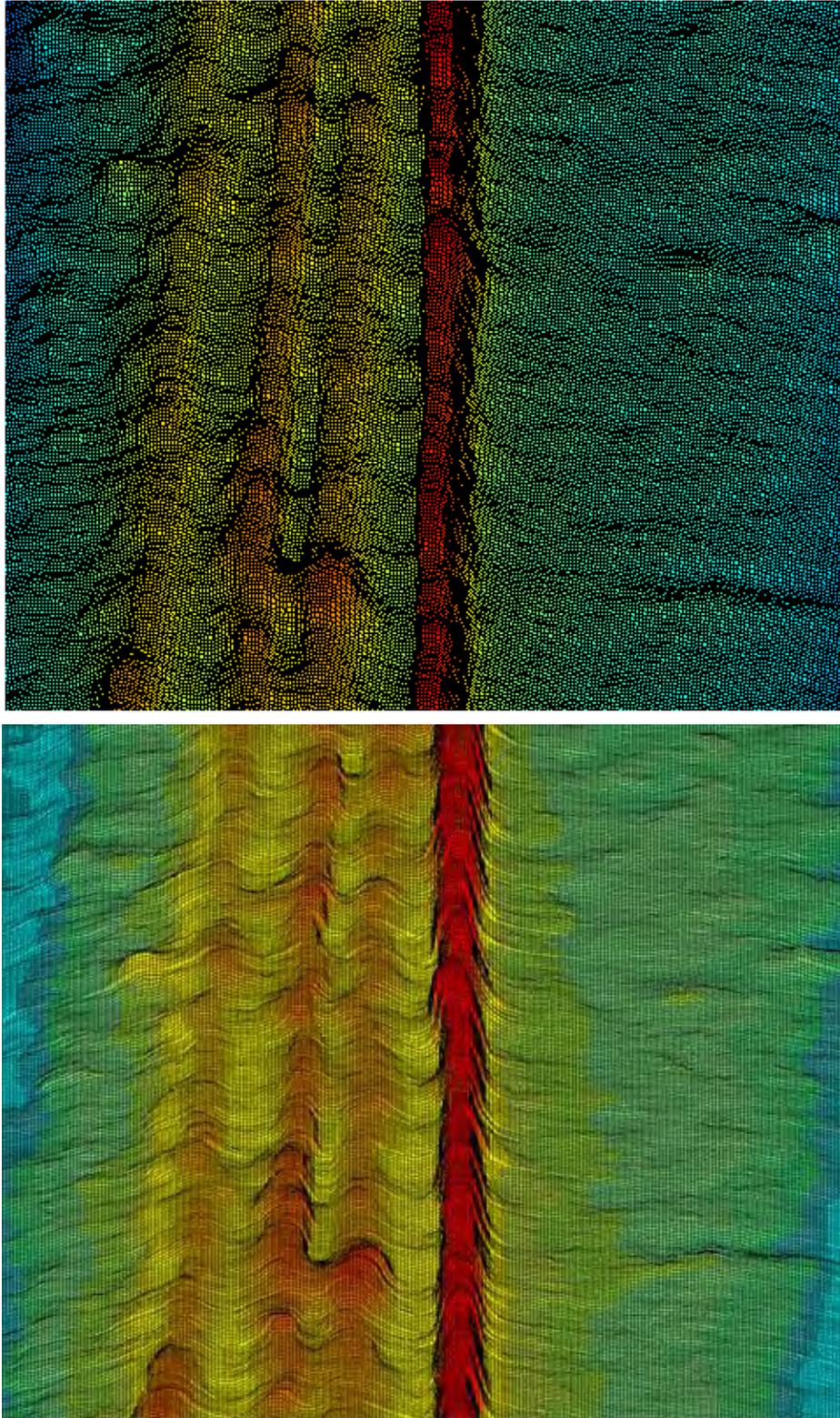


图 5 77T1-120395 中 c4 处理前后的三维对比截图

这时，除  $y=0$  处的点外，其它的点的坐标值都发生了改变，整个弹痕曲面的形状扭曲了。这是因为枪弹通过枪管时旋转了一个很小的角度，而且子弹表面是一个圆柱面，划痕线不是直线而是曲线，这些划痕线本身就不是相互平行的，要

使它们和  $y$  轴平行，就势必会产生形变和扭曲，但这并不影响形状特征的提取。数据处理后，相同  $x$  坐标的数据都表征了同一根划痕的位置，消除了旋转误差。

### ➤ 模型二：形状特征曲线提取模型

为了去掉边界处可能存在的误差及  $g_i$  不交叠的部分，只在弹痕的中间区域，取相邻的若干条曲线，比如从曲线  $g_{200}$  到曲线  $g_{300}$ 。让这 100 条曲线取平均值所生成的曲线就可以作为这条弹痕的形状特征曲线。综上， $j$  号弹痕的形状特征曲线公式如下：

$$g_j' = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} g_i \quad (5.2)$$

此时若将两个弹痕的形状特征曲线进行比对，能消除旋转误差，但无法消除平移误差。

(2) 对于平移误差：

经过消除旋转误差处理后，设两个弹痕曲面变为  $C_1'$  和  $C_2'$ ；平移误差限为  $\varepsilon_y = 0.03mm$ ，沿  $y$  轴方向的测量步长为  $\lambda = 2.75\mu m$ 。

由于  $y$  轴方向有平移误差，所以弹痕  $C_1'$  中，从  $g_{200}$  到  $g_{300}$  的曲线，可能与弹痕  $C_2'$  中的从  $g_{210}$  到  $g_{310}$  的曲线位置相同（即  $y$  坐标相同）。为了在  $C_2'$  中找到与  $C_1'$  位置相同的 100 列数据，要对  $C_2'$  中的各列进行一定范围的扫描，以确定截取这 100 列数据的位置。示意图如下：

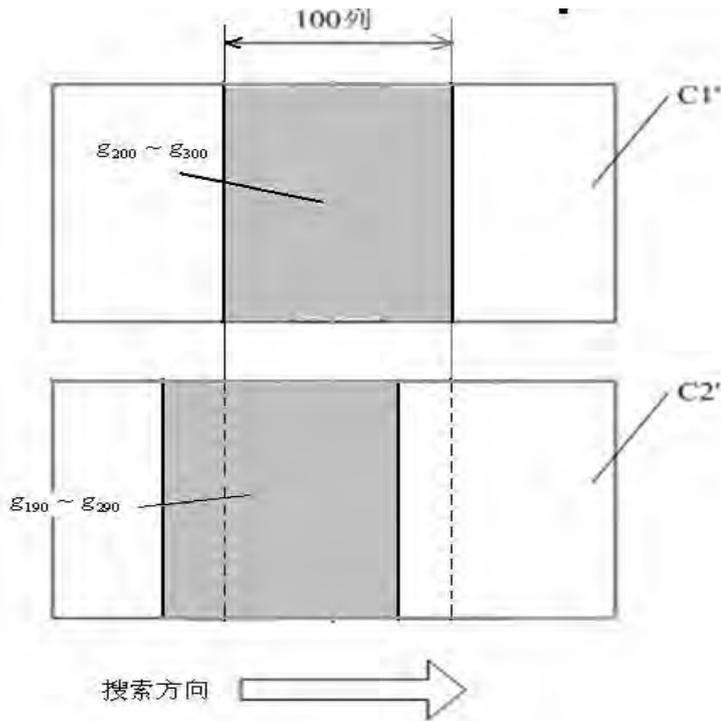


图 6 沿 y 轴方向搜索示意图

► **模型三：消减平移误差的优化模型**

虽然平移误差量是未知的，但可以在整个平移误差限的范围内搜索。搜索范围为  $(-\varepsilon_y, \varepsilon_y)$ ，搜索步长为  $2.75\mu m$ 。同样地，以两条形状特征曲线的差值为目标函数，找出使之最小的偏移量  $dy$ 。之后，再让取得最优值处的两条特征曲线进行比较。这样就消除了由于弹头沿  $y$  轴偏移所造成的系统误差。

$$\text{S.t.} \begin{cases} f2(dy) = \min |g'_1 - g'_2| \\ dy \in (-\varepsilon_y, \varepsilon_y) \end{cases} \quad (5.3)$$

(3) 经过消减旋转误差和评议误差的处理之后，得到的特征曲线，能反映出各个弹痕的形状特征，可以作为用于弹痕比对的特征。

5.1.2 方案二：基于自由曲面匹配的系统误差消除方案

在自由曲面的误差检测和评定中，设计曲面匹配是个很重要的前提，因为可能两曲面测量值的参考坐标系不同，也可能存在测量造成的系统误差，只有消除了由于基准不同而导致的系统误差才能进行误差评定。

对于两个弹痕曲面，不管它们在空间中的位置姿态如何，进行空间自由曲面的匹配之后，由于位置姿态所造成的误差就被消除了，之后再继续进行吻合度的计算。

(1) **模型四：自由曲面的匹配模型**

利用测量的离散数据点进行自由曲面的匹配，旨在寻找比对曲面坐标点和样本曲面坐标点之间的转换矩阵  $\mathbf{T}$ ，使比对曲面和样本曲面尽量贴合，消除系统误差。这实际上是一个线性优化模型。

构造如式 (5.4) 所示的目标函数，它表示两弹痕曲面点之间距离的平方和，

使目标函数取得最小值时就达到了匹配。

$$F = \sum_{j=1}^m |TQ_j - P_j|^2 = \sum_{j=1}^m |P_j' - P_j|^2 \quad (5.4)$$

式中：

$Q_j = [X_j, Y_j, Z_j, 1]^T$ ，为比对数据点的坐标；

$P_j' = [x_j', y_j', z_j', 1]^T = TQ_j$ ，为经过转换后的比对点坐标；

$P_j = [x_j, y_j, z_j, 1]^T$ ，为样本数据点坐标，定义为样本曲面上距离  $P_j'$  最近的点（投影点）；

$\mathbf{T}$ ——变换矩阵，根据文献[6]定义为：

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & sas\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + sas\gamma & t_x \\ c\beta s\gamma & sas\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & c\alpha s\beta s\gamma - sac\gamma & t_y \\ -s\beta & sac\beta & cac\beta & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

其中， $c = \cos()$ ， $s = \sin()$ 。

$\mathbf{T}$  包含 6 个变量  $t_x$ 、 $t_y$ 、 $t_z$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ ，分别为沿  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的平移量和与  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的夹角变化量（旋转角度）。找出一个使目标函数  $F$  的值最小的变换矩阵  $\mathbf{T}$ ，即找出了应将比对曲面移动到什么位置姿态，这样就完成了匹配。比对曲面移动后，曲面上的某点坐标为：

$$\begin{bmatrix} x_j' \\ y_j' \\ z_j' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & sas\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + sas\gamma & t_x \\ c\beta s\gamma & sas\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & c\alpha s\beta s\gamma - sac\gamma & t_y \\ -s\beta & sac\beta & cac\beta & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j \\ Y_j \\ Z_j \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

此时曲面  $c_2$  的坐标矩阵就变为  $C2'$ ，且有如下关系式：

$$[C2', \mathbf{I}]^T = \mathbf{T}[C2, \mathbf{I}]^T \quad (5.7)$$

由于  $\mathbf{T}$  矩阵的 6 个变量包括了直角坐标系中，曲面平移旋转的所有自由度。所以在任何方向上，弹头位置和姿态的变动所造成的平移误差和旋转误差，在匹配过程中都能被解决。这也是方案二的最大的优点。下面讨论如何求最优值点。

使目标函数  $F$  最小的最优值点，即为构成  $\mathbf{T}$  阵的一组变量

$[t_x \ t_y \ t_z \ \alpha \ \beta \ \gamma]$  的值。确定这个值有两种算法：

➤ 算法 1：采用搜索全局最优值的方法来完成匹配

由于在本问题中，考虑到，平移误差和转动误差的方向和限值是已知的，所

以可以认为：

$$\begin{cases} t_x = t_z = 0 & t_y \in (-0.3, 0.3) \\ \alpha, \beta \in (-0.2^\circ, 0.2^\circ) & \gamma = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

这样，变量  $t_x$ 、 $t_y$ 、 $\gamma$  就被固定在确定值上了。在相应误差限范围内，可以仅对  $t_y$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$  这三个变量进行全局搜索，找出其中使  $F$  最小的值，从而确定  $\mathbf{T}$  矩阵。

由于  $y$  方向的测量单位长度为  $2.75\mu\text{m}$ ， $z$  方向的单位精度为  $1\mu\text{m}$ 。又因为：

$$\varepsilon_y / 2.75\mu\text{m} = 10.9 \approx 11$$

$$\sin(\varepsilon_\theta / 60) \times 2 = 0.00011635 \approx 1\mu\text{m}$$

所以当取  $y$  方向的扫描间隔  $\Delta y = 0.03/11 = 0.0027\text{mm}$ ；旋转角度扫描间隔为  $\Delta\theta = 0.2^\circ / 60 = 0.0033^\circ$  时，就把由于人工测量造成的平移误差和旋转误差分别控制在  $2.75\mu\text{m}$ 、 $1\mu\text{m}$  以内，只有一个测量步长或测量精度。但考虑到这样做会使计算量较大，本文中取扫描间隔为  $\Delta y = 0.003\text{mm}$  和  $\Delta\theta = 0.2^\circ / 20 = 0.01^\circ$ 。

在这种方法中，只要搜索步长设的足够小，就能找到比较近似的全局最优值，但运算量比较大，对计算机运算能力要求较高。

➤ 算法 2：采用曲面中心重合、近似法矢重合，并结合多点预定位的方法完成匹配。即首先令两的中心重合，然后令两曲面的近似法矢重合，使两曲面的贴合度较好，最后再用多点预定位方法搜索绕法矢量转角的最优值，使量曲面贴合度进一步优化。

由于，比对曲面和样本曲面的初始位置，在各个自由度上都有一定的差异，所以转换矩阵  $\mathbf{T}$  的求取不可能一次求得，须采用多步平移转动来完成匹配过程。即先调整沿  $y$  轴的差异量，再调整与  $z$  轴夹角的差异（消除  $\gamma$  角影响），最后调整与  $x$ 、 $y$  轴夹角的差异（消除  $\alpha$ 、 $\beta$  角的影响）。如下图所示：

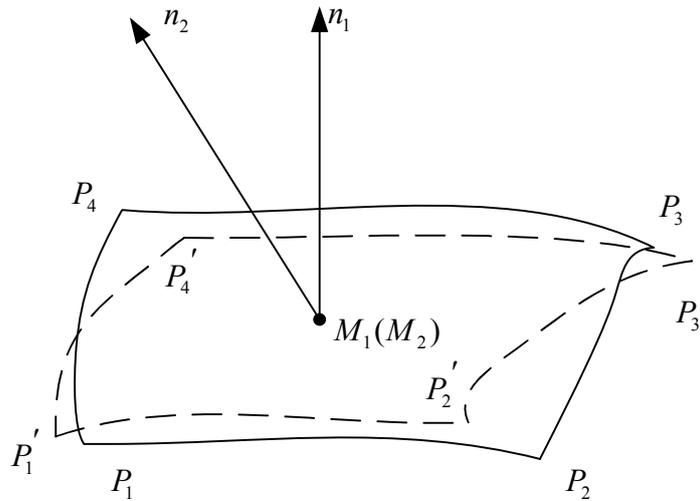


图 7 近似法矢不重合

首先做如下两个定义：

曲面的中心：定义为表征曲面空间位置的点，以  $M$  表示：

$$M(x_M, y_M, z_M) = \sum_{i=1}^{m \times n} k_i(x_i, y_i, z_i) \quad (5.9)$$

式中：  $x_G$ 、  $y_G$ 、  $z_G$  —— 曲面中心坐标；

$x_i$ 、  $y_i$ 、  $z_i$  —— 曲面上的坐标点；

$k_i$  —— 加权系数，  $\sum k_i = 1$ ， 因为给出的坐标点为均匀分布，可取  $k_i = \frac{1}{mn}$ 。

曲面的近似法矢：找出曲面的四个角点，按逆时针顺序设为  $P_1$ 、  $P_2$ 、  $P_3$ 、  $P_4$ ，定义近似法矢为：

$$\vec{n} = (\overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_2P_4}) / |\overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_2P_4}| \quad (5.10)$$

中心重合法，即为平移比对曲面，使比对曲面中心  $M_2$  和样本曲面中心  $M_1$  重合，相应的转换矩阵为：

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{c2} - x_{c1} \\ 0 & 1 & 0 & y_{c2} - y_{c1} \\ 0 & 0 & 1 & z_{c2} - z_{c1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

近似法矢重合法：即为以  $M_1(M_2)$  为固定点，转动比对曲面，使比对曲面的近似法矢向量  $\vec{n}_2$  与样本曲面的  $\vec{n}_1$  重合。

设:

$$\vec{n}_1 = (\cos \alpha_1 \quad \cos \beta_1 \quad \cos \gamma_1); \quad \vec{n}_2 = (\cos \alpha_2 \quad \cos \beta_2 \quad \cos \gamma_2)$$

$$d\alpha = \alpha_2 - \alpha_1; \quad d\beta = \beta_2 - \beta_1; \quad d\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$$

即  $\vec{n}_1$  与  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的夹角分别为  $\alpha_1$ 、 $\beta_1$ 、 $\gamma_1$ ;  $\vec{n}_2$  与  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的夹角分别为  $\alpha_2$ 、 $\beta_2$ 、 $\gamma_2$ , 则这种转动相对应的转换矩阵为:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} c(d\beta) & s(d\alpha)s(d\beta) & c(d\alpha)s(d\beta) & 0 \\ 0 & c(d\alpha) & -s(d\alpha) & 0 \\ -s(d\beta) & s(d\alpha)c(d\beta) & c(d\alpha)c(d\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

以上两步就完成了由于两曲面存在  $dy$ 、 $d\gamma$  所造成的系统误差。

但是, 当比对曲面和样本曲面绕近似法矢有转角时, 如图 8 所示, 以上两步就不能时现精准的预定位。针对这种情况, 同时考虑到运算量的问题, 本文进一步提出了多点预定位法: 在曲面中心和近似法矢重合的基础上, 以过中心点

$M_1(M_2)$  的矢量  $\vec{n}_1(\vec{n}_2)$  为旋转轴, 令比对曲面绕  $\vec{n}_1(\vec{n}_2)$  的转角  $\theta$  在  $-0.2 \sim 0.2$  度的范围内做优化, 优化的目标函数是比对曲面的多个特征点 ( $K$  个特征点) 到样本曲面的对应特征点的距离平方和  $f$  (如式 5.13 所示), 令  $f$  最小即可达到两曲面的更为精准的预定位。其中,  $K$  个特征点选择在每隔  $x, y$  坐标每隔  $0.1\text{mm}$  所对应的数据点, 这样, 特征点的分布比较均匀。

$$f(\theta) = \min \sum_{i=1}^k |P_i P'_i| = \min \sum_{i=1}^k \sqrt{(x_i - x'_i)^2 + (y_i - y'_i)^2 + (z_i - z'_i)^2} \quad (5.13)$$

到此为止, 完成了自由曲面的匹配定位。

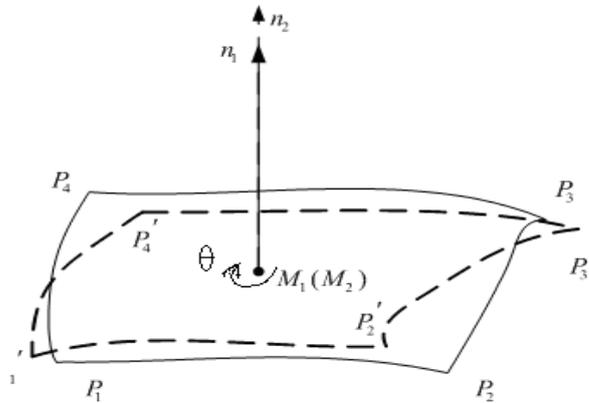


图 8 近似法矢量重合 绕法矢量有转角

算法 2 较算法 1 多做了一些近似，但是运算量会大大减小。因为它将搜索变量只缩小到  $\alpha$ 、 $\beta$ ，且  $\alpha = \beta$ ，实际上搜索的变量就只有一个，大大缩小了多维搜索的循环次数。

## 5.2 问题二的解决：噪声的滤除

弹头表面的损伤、锈迹、油斑、杂质物及痕迹生成的随机性，会造成数据误差和噪声，这些噪声会对判断弹痕是否吻合时造成一定影响。因此，在进行具体的数据分析处理之前，首先要滤除原始数据中的这些噪声毛刺，才会得到更为合理的结果。

弹痕纹理特征的提取采用传统的数字滤波方法有以下缺点：IIR 滤波器存在非线性相移，使输出波形发生改变，FIR 滤波器存在非线性相移；滤波方法所给的精度是频域精度，而非实域上的位置精度。因此用传统的滤波方法提取弹痕纹理的信息是不合适的。本文采用小波滤波的方法，滤除原始数据中的随机误差，以得到更为可信的数据。基于小波变换的滤波器，具有多尺度的频率域滤波特性，在图像噪声滤波中的应用很广泛。

### 5.2.1 基于小波滤波的弹痕曲面去噪

#### ➤ 基本原理：

将原始图像在水平、垂直和对角线方向进行小波分解，将图像分解为 1 个低频图像和 3 个高频图像。此 3 个高频图像分别代表水平方向、垂直方向和对角线方向的边缘信息。对低频图像进行低通滤波去除噪声，加上 3 个高频图像提供的边缘信息，就可以在滤除噪声的同时保持边缘信息，不至于滤掉真实有用的数据点。

#### ➤ 多尺度频域滤波特性：

对于低频图像，还可以经小波变换再分解为 1 个低频图像和 3 个高频图像，且这一级的低频图像还可以被分解。在不同的分解级别上，对低频图像进行低通滤波去噪，并加上相应级别的高频图像边缘信息，就可以实现在充分抑制图像噪声的同时，保留不同尺度的结构和纹理特征。

#### ➤ 噪声和有用信号的差别

小波函数在时频域都具有较好的局部性，其变尺度特性使得小波变换对有用信号具有一种“集中”的能力。而噪声和信号的小波系数分布规律相反，尤其在大尺度时，由于对噪声进行了一定的平滑，使得噪声的小波系数很小，因而可据此差异设置阈值，去除由噪声控制的幅值小、数目多的小波系数，以达到既降低噪声，又保持图像主要信息的目的。

#### ➤ 图像滤波与滤波函数的选择

图像可以看作是二维矩阵。一般假设图像矩阵的大小为  $N \times N$ ，且  $N=2$ 。那么每次小波变换后，图像便分解为 4 个大小为原来尺寸 1/4 的子块频带区域，分别包含了相应频带的小波系数，相当于在水平方向和垂直方向上进行隔点采样。进行下一层小波变换时，变换数据集中在 LL 频带上。因为小波系数与原始图像存在着空间上的对应关系，这样对于滤波处理十分有利。所以可通过了解小波系数的分布情况，利用不同的滤波器来处理小波系数。滤波后的小波变换经过逆变换后，便能得到理想的处理结果。

在对比了均值滤波、中值滤波、巴特沃斯低通滤波对一维函数的滤波效果之后，本文选择二维中值滤波函数对弹痕原始信号进行去噪。为观察滤波效果，对某弹痕上的一条曲线进行滤波处理，滤波效果对比见下图：

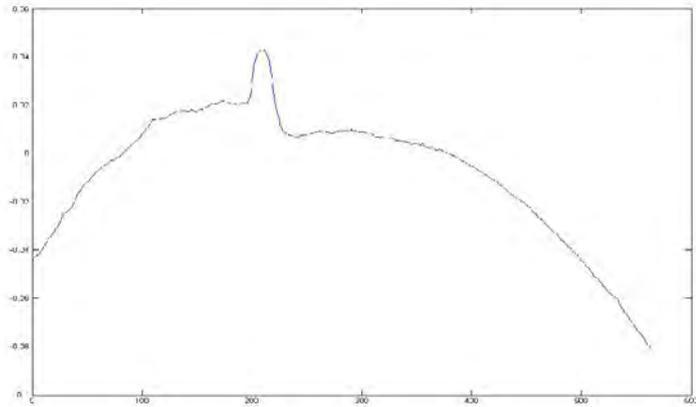


图 9.1 滤波前曲线

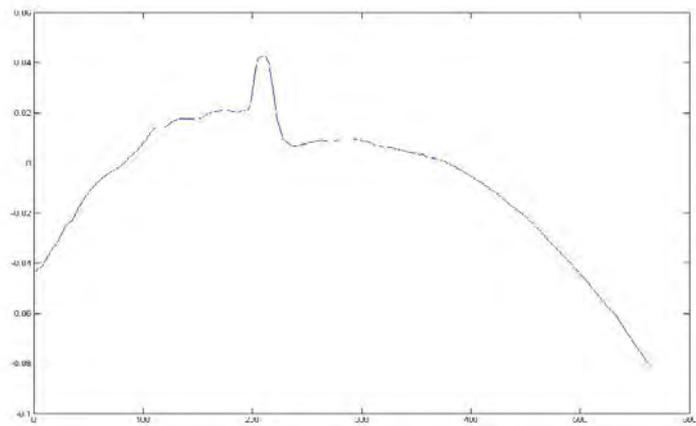


图 9.2 均值滤波后曲线

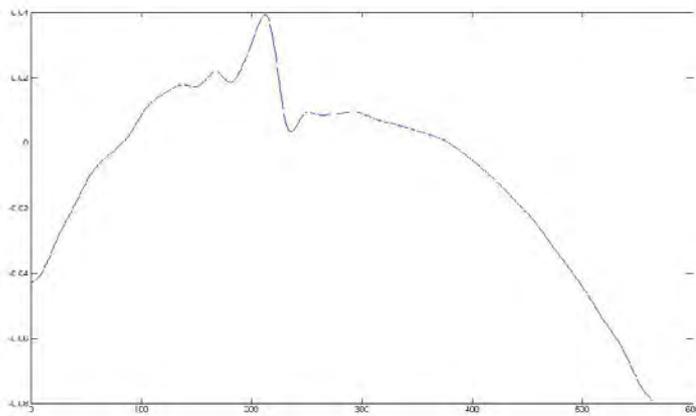


图 9.3 Butterworth 高通滤波后曲线

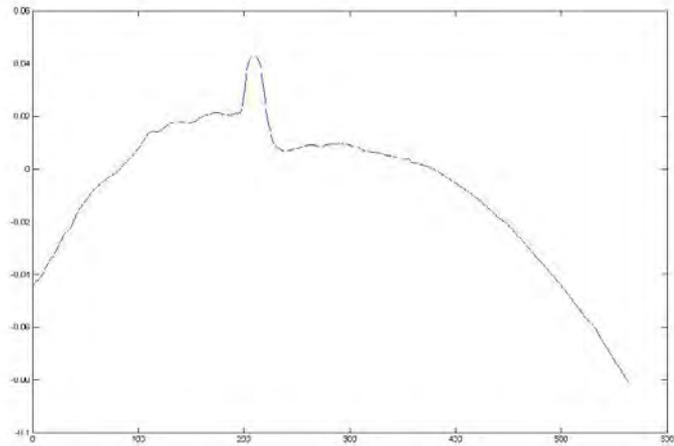


图 9.4 中值滤波后曲线

➤ 关于小波滤波的边界失真问题

采用传统的小波分析技术时，将数据两端补零延长或对称延长，这对于趋势变化较大的原始信号，会造成边界失真。因此，在弹痕纹理特征的提取时，为了解决边界失真问题，本文采用一种基于多项式拟合预处理的方法来对数据进行拓展，步骤如下：

- i) 将原始信号  $f(x_n)$  用一多项式  $p(x_n)$  拟合，拟和的阶次由最小二乘均方误差准则确定；
- ii) 将信号按多项式  $p(x_n)$  在两端延拓为  $fp(x_n)$  ( $-l < n < M + l$ ,  $l$  为要选择的小波滤波器的支撑长度)；
- iii) 将  $fp(x_n)$  用小波分析进行处理；
- iv) 将处理得到的信号取中间  $M$  个数据作为最后的提取信息。

➤ 滤波效果评价

噪声滤波效果可以从以下几个方面来评价：均匀区域内曲面特性的保持和噪声的抑制能力；边缘、细小特征、点目标和纹理特征的保持；波形有无畸变。其中均匀区域内辐射特性的保持和噪声的抑制能力，可以通过计算滤波前后均匀区域内均值、标准差、噪声指数来定量评价。边缘、细小特征、点目标和纹理特征的保持及人为畸变，主要通过目视检验来评价。

### 5.3 问题三的解决

#### 5.3.1 弹痕特征的提取

在模型二中给出的形状特征曲线的基础上，本文提出以下几个指标来表征两弹痕差异程度的特征：

- (1) 对于方案一，特征曲线反映了每个独立的弹痕的特征，从其中提取一些特征指标如下：

➤ 两特征曲线上所有对应点的距离的平方和  $character1 = \sum_{i=1}^{k1} |P_i P_i'|^2$  ;

➤ 两特征曲线上所有对应点的距离的平均值  $character2 = \frac{1}{k1} \sum_{i=1}^{k1} |P_i P_i'|$  ;

➤ 比对弹痕特征曲线上的所有点到样本弹痕特征曲线的距离的最大值

$$character3 = \max_{i=1}^{k1} (|P_i P_i'|);$$

(2) 对于模型二，表征差异程度的特征有：

➤ 比对曲面所有点到设计曲面的距离平方和  $character4 = \sum_{i=1}^{k2} |P_i P_i'|^2$  ;

➤ 比对曲面所有点到设计曲面的距离的平均值： $character5 = \frac{1}{k_2} \sum_{i=1}^{k2} |P_i P_i'|$  ;

➤ 计算每个比对弹痕数据点到样本弹痕曲面的最短距离，取其中的最大值作为

$$\text{目标函数 } character6 = \max_{i=1}^{k2} (|P_i P_i'|)。$$

(3) 在人工识别时，作为判别依据的主要特征有：

全部弹痕曲面的宽度，明显的划痕条数，这些划痕的位置，划痕的旋转方向，旋转角度等。但由于本问题所提供的数据中，数据点没有完全覆盖整个弹痕的宽度，所以无法提取弹痕宽度作为特征，故本问题不考虑这个指标。而明显的划痕的条数及其位置，这两个信息已经隐含在上述形状特征曲线中了。

(4) 特征指标的说明：

在上述提取的特征中，都是反映弹痕差异度的指标。其中：

模型一给出的特征曲线是个独立的特征，能在很大程度上反映各个弹痕的形状特征。

$character1,4$  是消除系统误差时作为寻最优值得目标函数提出的，在整体上可以反映吻合度，它的值越小，吻合度越高。但是由于在整个计算中的数据通常都是几十微米级的。将它们平方后所得的数据更小，弹痕的吻合度特征并不很明显。

$character2,5$  是比较直观的指标，由于知道  $z$  轴方向的测量精度是  $1\mu m$ ，我们可以知道两曲面平均相差了多少个观测精度单位。它的值越小，吻合度越高。

$character3,6$  是非常有效的判据，尤其是通过实际计算出的结果，它的最大最小值可以相差 2 个甚至 3 个数量级（见附录），这样很容易判断出哪两个弹痕的吻合度很高，或者差异度很高。因此选择这两个指标为最主要的评价吻合度的指标，它的值越小，吻合度越高。

### 5.3.2 模型五：弹痕曲面相似度计算模型

根据以上弹痕特征及其差异指标，本文提出两弹痕曲面的相似度计算模型如下：

$$LMacth = 1 - \frac{character5}{r_b} \times 100\% \quad (5.14)$$

它反映了两弹痕曲面的吻合程度，这个百分比越大说明两曲面越吻合。

其中， $r_b$ ——弹头半径。

但是，考虑到  $character5/r_b$  的数值会非常小，导致  $LMacth$  都为非常接近 1 的数，根据程序计算，多数比较对的  $LMacth$  值都在 0.9995 左右，相差值在 0.001 之间，不方便工程判断。为了适用于实际问题，需要把这个相似度指标的差异值放大，所以，改进弹痕相似度计算模型为：

$$LMacth' = 1 - \frac{k_2 character5}{r_b} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k_2} |PP_i|}{r_b} \times 100\% \quad (5.15)$$

### 5.3.3 模型六：弹头相似度计算模型

在模型五给出的弹痕相似度定义的基础上，本文进一步提出了弹头相似度的几种计算方法：

(1) 弹头相似度指标 **1** 的计算：找出两弹头在每种相对位置下，4 对弹痕的平均相似度，再对其取最大值。其计算公式如下：

$$Match1 = \max_{j=1}^4 \left( \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 Lmacth'_i \right) \quad (5.16)$$

其中， $Match1$ ——为弹头相似度指数一；

$Lmacth'_i$ ——为各对比位置中第  $i$  对弹痕的相似度；

$i$ ——代表同一种位置组合中的第  $i$  个弹痕比较对， $i=1,2,3,4$ ；

$j$ ——代表对比组合数， $j=1,2,3,4$ 。

$Match1$  表征了在一般情况下两弹头的平均相似度。4 对弹痕的总体吻合程度越好，弹头相似度  $Match1$  就越大。

(2) 弹头相似度指标 **2** 的计算：找出两弹头在每种相对位置下，最吻合的 2 对弹痕的平均相似度，再对其取最大值。其计算公式如下：

$$Match2 = \max_{j=1}^4 \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 Lmacth_{\max i} \right) \quad (5.17)$$

其中， $Match2$ ——为弹头吻合度指数二；

$Lmacth_{\max}$ ——为各比对位置中数值最大的 2 个弹痕相似度；

$i$ ——代表同一种位置组合中的第  $i$  个弹痕比较对， $i=1,2,3,4$ ；

$j$ ——代表对比组合数， $j=1,2,3,4$ 。

$Match2$  根据假设四对  $Match1$  作出了修正。只要在某相对位置下，有两对弹痕的相似度很高，即便其它两对弹痕相似度很低，也可以认为两弹头吻合。

(3)弹头综合相似度指标的计算：

上述两指标有不同的侧重，尤其是针对不同的弹痕数据。为了进一步提高绝对正确率。定义弹头综合相似度指标如下：

$$Match = (1 - \lambda) \cdot Match1 + \lambda \cdot Match2 \quad (5.18)$$

其中， $Match$  ——弹头综合相似度；

$\lambda$  ——权重系数，由经验求得， $\lambda \in (0,1)$ 。

$\lambda$  可由大量的经验数据得到。比如对于问题三提供的数据，当认为相似度  $Match$  最高的两弹头为同一支枪发射时，找到使弹头吻合正确率最高的  $\lambda$  值，作为经验权重系数。

$Match$  综合考虑了  $Match1$ 、 $Match2$  的判断依据，而权重系数  $\lambda$  则为平衡两者重要程度的系数，当  $\lambda=0$  时， $Match=Match1$ ； $\lambda=1$  时， $Match=Match2$ 。

#### 5.3.4 有效数据的提取

数据文件中的给出的数据点覆盖了部分弹痕区域和部分没有弹痕的弹头表面。在对比两条弹痕时，如果选用所有数据点，不仅会增加很多无意义的计算，还会影响吻合判别的精度，所以应仅选用有效的这部分数据点。在进行弹痕对比分析之前，应先抽取出有效数据，在有效数据的基础上再进行以后的分析处理。

► 如何确定哪部分数据为有效的：

通过观察某弹痕数据生成的曲面（下图）可知，其中有的部分波动起伏较大，而有的部分比较平滑。波动较明显的部分更能体现这个曲面的形状特征。此外，弹痕区域有明显的次棱线的划痕，在弹痕区域的边界处会有一个凸起的波峰，这是由于弹头材料被挤出造成的。这个波峰右侧较平缓的区域则是没有划痕的弹头表面，可以认为这个区域没有发生形变。只有对比弹头表面形变部分才是有意义的，所以弹痕区域和与其临界的那个波峰区域才是有效数据点分布区。

► 有效数据提取方法

考虑到弹痕的最深处应该在所有数据点的较为中间位置，即无效数据分布在两侧。提取方法如下：

i) 沿  $x$  轴方向取一组数据（即  $y$  坐标相同的一条曲线  $g_i$ ）；

ii) 由曲线  $g_i$  两头开始，计算每连续的 10 个数据点中  $z$  的最大差值  $\Delta z$ ；

iii) 当  $\Delta z > \varepsilon_z$  时，认为此处的波动比较明显，属于弹痕区域或者与其临界的区域，

该处数据点是有效的数据，记录此处的  $x$  坐标分别为  $x_{i\min}$ 、 $x_{i\max}$ ，则对于曲线  $g_i$  上

$x \in (x_{i\min}, x_{i\max})$  的数据点都可认为是有效的;

iv) 对所有  $g_i$  ( $i=1,2,\dots,756$ ), 重复上述过程, 则对于  $x \in (\min(x_{i\min}), \max(x_{i\max}))$  的所有数据点都可以认为是有效的。

其中, 对给出的数据做分析计算可以得出, 取  $\varepsilon_z = 0.015\text{mm}$  时, 比较合理。

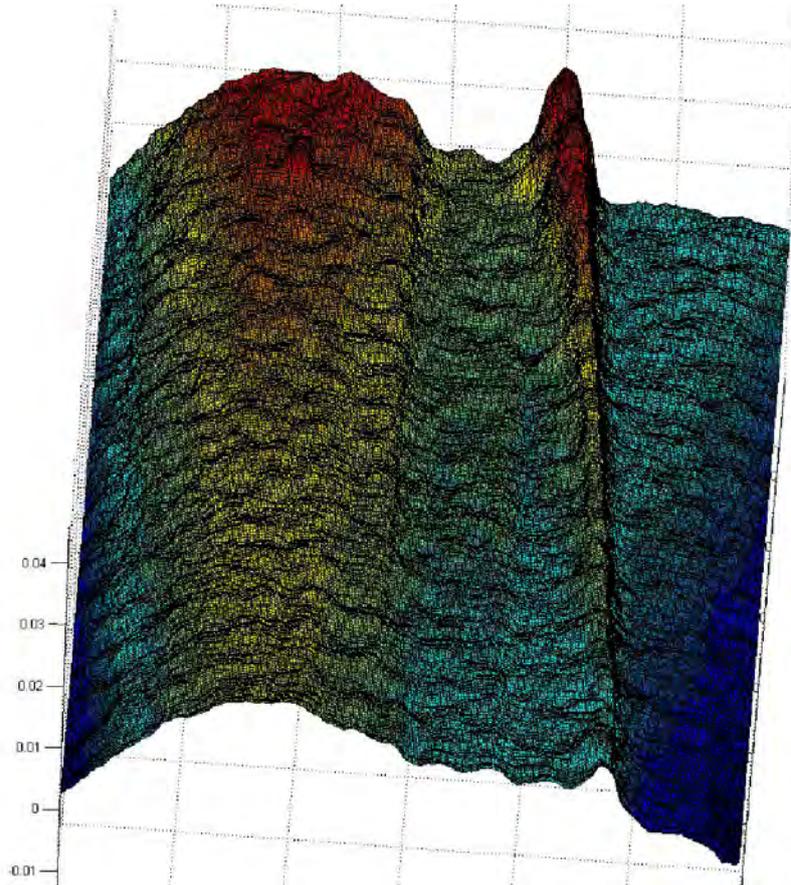


图 10 某弹痕曲面

#### 5.4 方案的有效性评价方法

5.4.1 绝对正确率: 认为相似度最大的两弹头为同一支枪发射时, 配对正确的对数与样本弹头总数之比。其计算公式如下

$$valid1 = \frac{\text{正确对总数}}{N} \quad (5.19)$$

其中,  $N$ ——弹头总数。

除了模型算法本身的合理性精确性外, 影响绝对正确率的还有一定的随机性, 因为存在这种可能性: 两弹头不是一支枪发出的, 却恰好相似度很高; 而同一支枪发射的两弹头由于磨损原因, 相似度较低。所以, 仅用绝对正确率来评价有效性是不完善的, 有一定的随机性和偶然性, 因此提出另一个有效性评价指标。

5.4.2 最大误差：按同一支枪发射的两弹头的相似度排名来检验有效性。

将所有弹头与样本弹头  $i$  进行比对的相似度按从大到小进行排名，设与弹头  $i$  为同一支枪发射的弹头排第  $q_i$  名，则定义

$$valid2 = \max(q_i) - 1 \quad (5.20)$$

说明与任意样本弹头确实出自同一支枪的弹头相似度排名在前  $\max(q_i)$  位， $valid2$  越小说明方案的有效性越好。

5.4.3 平均误差范围：表征同一支枪发射的两弹头的相似度平均排名位置占所有比对弹头中的前百分之几。

$$valid3 = \frac{(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i) - 1}{N - 1} \times 100\% \quad (5.21)$$

$valid2$  越小，说明方案有效性越好。

5.5 弹头自动比对方案流程图

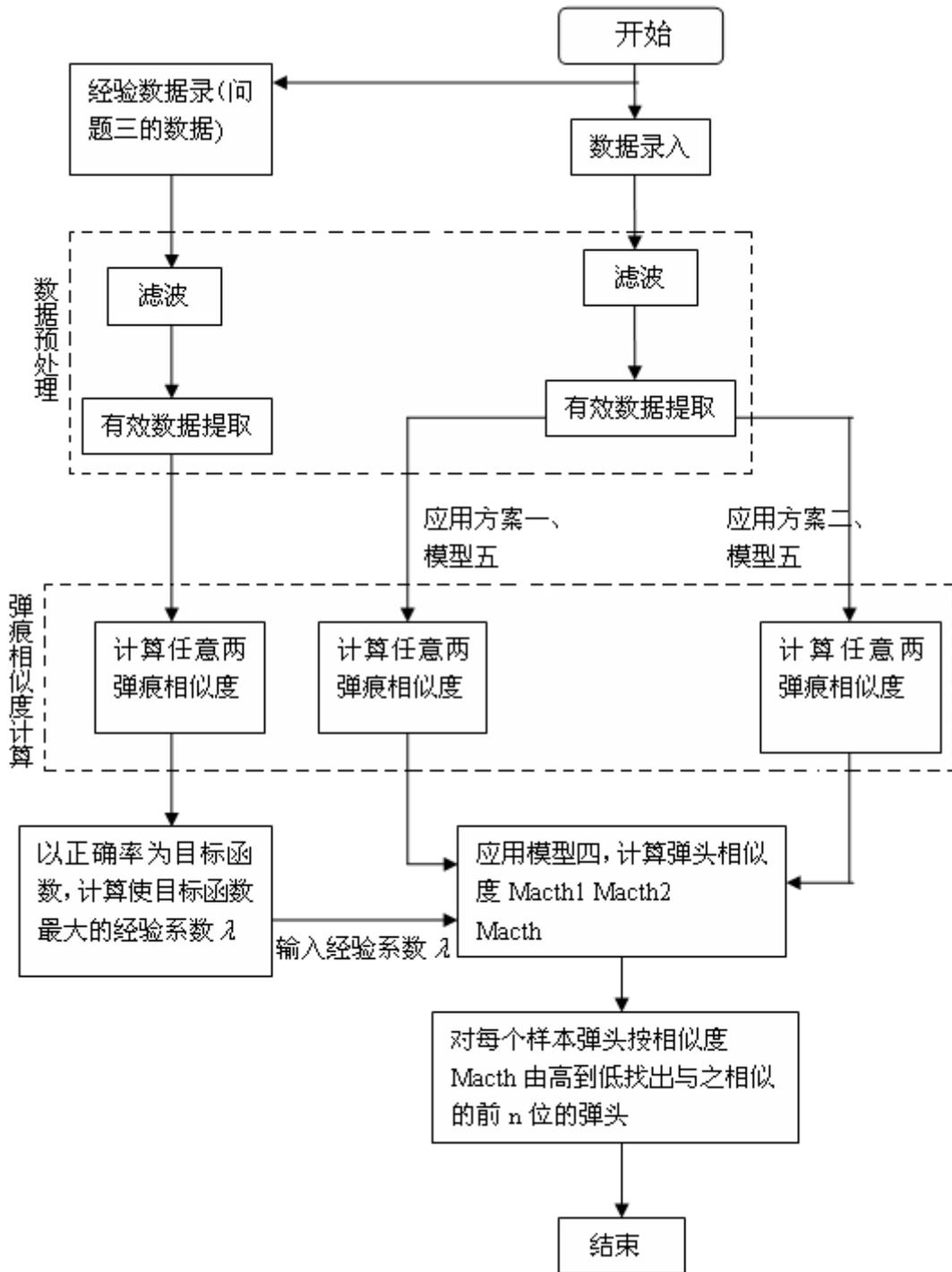


图 11 弹头自动比对流程

## 6 算法验证及计算结果

### 6.1 相关程序与参数设定说明

#### 6.1.1 模型一相关程序：

Start1.m: 22 个弹头两两对比的弹头相似度；  
 main0.m: 任意两个弹头的相似度；  
 deRotateErr.m: 消除旋转误差后任意 2 个弹痕对比的差异，需输入两弹痕数据途径及名称；

#### 6.1.2 模型二相关程序：

Start2.m: 22 个弹头两两对比的弹头相似度，注意当前目录设置及数据文件夹名；  
 main2.m: 任意 2 弹头的相似度  $Match1$ 、 $Match2$ ，需输入两弹头文件夹目录及名称作为程序函数名的变量；  
 mark2.m: 任意两弹痕相似度  $LMacth'$ ，需输入两弹痕数据文件名作为函数的变量；  
 Start3.m: 解决问题三的程序，输出 12 个弹头两两对比时的相似度  $Match1$ 、 $Match2$ 。  
 order.m: 计算  $Match$ ，并且按  $Match$  大小排序的程序。

#### 6.1.3 参数设置

本文求两弹头相似度的方案中，有三个系数的设定会影响到计算结果的准确性：

搜索步长  $\Delta y$ 、 $\Delta \theta$ ：本文中取  $\Delta y = 0.003mm$ 、 $\Delta \theta = 0.01^\circ$ ；当取  $\Delta y = 0.0027mm$ 、

$\Delta \theta = 0.0033^\circ$  时，会在一定程度上提高计算精度；

权重系数  $\lambda$ ：本文中取  $\lambda = 0.8$ ，是由问题三中提供的数据得到的，有一定的偶然性，实际应用时，应用大量数据验证得到最为可信的  $\lambda$  值。

### 6.2 用问题三提供的数据验证方案有效性并求出权重系数

#### 6.2.1 弹头相似度结果

为验证本文提出的弹头比对方案的有效性，用程序 Start3.m 来分析问题三中提供的数据，得出 12 个弹头两两比对的相似度  $Match1$ 、 $Match2$ ，如下表所示：

表格 2.1 十二个弹头两两比对的相似度  $Match1$ 、 $Match2$

弹头	T1-1203959	T1-1504519	t1-1811345	t1-1812492	T1-1923252	T1-1928033	相似度
T1-1203959	——	0.60801	0.81963	0.8643	0.85314	0.81935	Match1
	——	0.93022	0.86086	0.93023	0.93257	0.87708	Match2
T1-1504519		——	0.55057	0.61663	0.6030	0.5855	Match1
		——	0.88107	0.912	0.8814	0.86548	Match2

t1-1811345			——	0.85798	0.90611	0.89032	Match1
			——	0.95094	0.95383	0.94741	Match2
t1-1812492				——	0.89684	0.85002	Match1
				——	0.93544	0.91047	Match2
T1-1923252					——	0.92046	Match1
					——	0.95432	Match2
T1-1928033						——	Match1
						——	Match2

表格 3.2 十二个弹头两两比对的相似度 *Match1*、*Match2*

弹头	T2-1203959	T2-1504519	t2-1812492	T2-1923252	T2-1928033	t3-1811345	相似度
T1-1203959	0.74007	0.83255	0.78585	0.83639	0.6824	0.84479	Match1
	0.89251	0.89064	0.85451	0.89174	0.96822	0.93243	Match2
T1-1504519	0.35001	0.56738	0.44753	0.5644	0.80958	0.53465	Match1
	0.66254	0.90981	0.78612	0.89734	0.90157	0.85246	Match2
t1-1811345	0.74751	0.87663	0.84505	0.89769	0.6471	0.91100	Match1
	0.86901	0.95667	0.91239	0.95722	0.94863	0.96483	Match2
t1-1812492	0.66278	0.85171	0.80337	0.86769	0.7322	0.82789	Match1
	0.80532	0.93666	0.92919	0.93585	0.94205	0.93100	Match2
T1-1923252	0.69767	0.89484	0.8089	0.92135	0.70051	0.88033	Match1
	0.78981	0.96151	0.91125	0.94695	0.94565	0.95373	Match2
T1-1928033	0.71998	0.84818	0.8309	0.91959	0.73233	0.90714	Match1
	0.76581	0.94046	0.88774	0.93162	0.95715	0.95566	Match2
T2-1203959	——	0.7722	0.88655	0.78676	0.42703	0.82814	Match1
	——	0.87882	0.91309	0.86816	0.7258	0.9046	Match2
T2-1504519		——	0.83672	0.88453	0.64478	0.85661	Match1
		——	0.92227	0.94782	0.9046	0.93444	Match2
t2-1812492			——	0.88375	0.53791	0.93159	Match1
			——	0.94531	0.85772	0.95695	Match2
T2-1923252				——	0.66268	0.9195	Match1
				——	0.93232	0.95982	Match2
T2-1928033					——	0.58711	Match1
					——	0.87076	Match2
t3-1811345						——	Match1
						——	Match2

### 6.2.2 算法有效性验证

- 以 *Match1* 作为相似度时，得到表格 3：与样本弹头为同一支枪发射的弹头在所有比对弹头中的 *Match1* 排名。

表格 3

样本弹头	同一支枪发射的两弹头的 Macth1 排名 $q_i$
T1-1203959	9
T1-1504519	5
t1-1811345	1
t1-1812492	6
T1-1923252	1
T1-1928033	9
T2-1203959	7
T2-1504519	11
t2-1812492	7
T2-1923252	1
T2-1928033	4
t3-1811345	3

绝对正确率:  $valid1 = \frac{3}{12} = 25\%$

最大误差:  $valid2 = 11 - 1 = 10$

平均误差范围  $valid3 = \frac{(\frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} q_i) - 1}{11} = 39.38\%$

- 以 *Match2* 作为相似度时, 得到表格 4: 与样本弹头为同一支枪发射的弹头在所有比对弹头中的 *Match2* 排名:

表格 4

样本弹头	同一支枪发射的两弹头的 Macth2 排名 $q_i$
T1-1203959	6
T1-1504519	4
t1-1811345	1
t1-1812492	6
T1-1923252	3
T1-1928033	1
T2-1203959	6
T2-1504519	8
t2-1812492	3
T2-1923252	3
T2-1928033	1
t3-1811345	1

绝对正确率:  $valid1 = \frac{4}{12} = 33.33\%$

最大误差:  $valid2 = 8 - 1 = 7$

平均误差范围:  $valid3 = \frac{(\frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} q_i) - 1}{11} = 23.48\%$

➤ 以绝对正确率为目标函数，求得使之最大的权重系数  $\lambda=0.8$ 、按综合相似度

$Macth = (1 - \lambda) \cdot Macth1 + \lambda \cdot Macth2$  排名得到:

表格 5

样本弹头	排名 $q_i$
T1-1203959	7
T1-1504519	4
t1-1811345	1
t1-1812492	5
T1-1923252	1
T1-1928033	3
T2-1203959	5
T2-1504519	6
t2-1812492	4
T2-1923252	1
T2-1928033	1
t3-1811345	1

绝对正确率:  $valid1 = \frac{5}{12} = 41.67\%$

最大误差:  $valid2 = 7 - 1 = 6$

平均误差范围:  $valid3 = \frac{(\frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} q_i) - 1}{11} = 20.44\%$

### 6.2.3 误差分析

从上面的结果可知，判断弹头是否出自同一支枪的绝对正确率不高，这是有很多原因的。比对弹头的整个流程包括：弹头收集、数据采集、信号滤噪、有效数据提取、弹痕相似度计算、权重系数计算、弹头相似度计算。其中，每一步都会出现一些误差。比如在收集弹头时，很可能有的弹头磨损严重，导致无法正确计算相似度；权重系数则是需要大量的同种类型的弹头数据计算、反复验证得到的，而本问题中没有足够多的弹头以供验证。这些都有可能造成结算结果的较大

的偏差，尤其是弹头磨损严重的情况下，可能无论模型算法如何改进都不会有很理想的结果。考虑到综上所述诸多因素，本文提出的方案的误差是在可以接受的范围之内的，方案有效性尚可。

### 6.3 问题四的解决

对于问题四中所有弹头都进行比较并计算其吻合度的程序为：Start2.m。本文给出了 22 个弹头两两比对的相似度指标 *Match1*、*Match2*，如下表所示：

表格 6.1 22 个弹头两两比对的相似度 *Match1*、*Match2*

弹头	t01	t02	t03	t04	t05	t06	t07	t08	相似度
t01	——	0.8291	0.7480	0.8747	0.6726	0.6538	0.7509	0.7734	Match1
	——	0.9286	0.8852	0.9496	0.8592	0.8336	0.8890	0.9333	Match2
t02		——	0.8513	0.9002	0.7417	0.7405	0.8257	0.8443	Match1
		——	0.9560	0.9334	0.9144	0.8376	0.9064	0.9558	Match2
t03			——	0.8105	0.8363	0.8022	0.8224	0.8731	Match1
			——	0.9259	0.9071	0.9155	0.8892	0.9688	Match2
t04				——	0.7084	0.7200	0.8056	0.8154	Match1
				——	0.8615	0.7658	0.8438	0.9028	Match2
t05					——	0.8361	0.8283	0.8387	Match1
					——	0.9397	0.9416	0.9245	Match2
t06						——	0.9103	0.8906	Match1
						——	0.9512	0.9508	Match2
t07							——	0.8876	Match1
							——	0.9660	Match2
t08								——	Match1
								——	Match2

表格 6.2 22 个弹头两两比对的相似度 *Match1*、*Match2*

	t09	t10	t11	t12	t13	t14	t15	t16	相似度
t01	0.8676	0.5555	0.6933	0.8532	0.8607	0.7592	0.8656	0.7257	Match1
	0.9400	0.8035	0.9078	0.9321	0.9496	0.9369	0.8592	0.8950	Match2
t02	0.9238	0.6361	0.7698	0.8448	0.8981	0.8301	0.8646	0.8072	Match1
	0.9505	0.9271	0.9566	0.9394	0.9335	0.9262	0.9330	0.9345	Match2
t03	0.8524	0.7501	0.8552	0.7870	0.8208	0.8446	0.8020	0.8324	Match1
	0.9412	0.8538	0.9456	0.9655	0.9277	0.9351	0.9267	0.9148	Match2
t04	0.9196	0.6100	0.7303	0.9147	0.8971	0.7778	0.8529	0.7820	Match1
	0.9316	0.8513	0.8752	0.9673	0.9547	0.8813	0.9106	0.8326	Match2
t05	0.7802	0.8387	0.8086	0.6789	0.8073	0.8725	0.6926	0.8630	Match1
	0.8982	0.9116	0.9284	0.8650	0.9223	0.9215	0.8833	0.9505	Match2
t06	0.7868	0.7768	0.8583	0.8919	0.8281	0.8434	0.6857	0.9226	Match1
	0.8682	0.9031	0.9558	0.9342	0.9046	0.9332	0.8686	0.9551	Match2
t07	0.8664	0.7588	0.8136	0.7574	0.9108	0.8556	0.7712	0.9188	Match1
	0.9387	0.9559	0.9051	0.8540	0.9645	0.9389	0.9219	0.9402	Match2

t08	0.9000	0.7233	0.8905	0.7915	0.9030	0.8944	0.8052	0.8817	Match1
	0.9743	0.9618	0.9497	0.9011	0.9293	0.9559	0.9381	0.9402	Match2
t09	——	0.6296	0.7788	0.8878	0.9095	0.8360	0.8976	0.8016	Match1
	——	0.9128	0.9241	0.9500	0.9518	0.9380	0.9404	0.8837	Match2
t10		——	0.7337	0.5618	0.7181	0.7963	0.5756	0.8797	Match1
		——	0.8951	0.8609	0.9701	0.9226	0.8851	0.9528	Match2
t11			——	0.7114	0.8182	0.8662	0.7251	0.8652	Match1
			——	0.8775	0.8948	0.9509	0.9408	0.9231	Match2
t12				——	0.8320	0.7420	0.9002	0.6985	Match1
				——	0.9040	0.8859	0.9396	0.7965	Match2
t13					——	0.8426	0.8437	0.8430	Match1
					——	0.9205	0.9561	0.9236	Match2
t14						——	0.7959	0.8645	Match1
						——	0.9388	0.9564	Match2
t15							——	0.7240	Match1
							——	0.8985	Match2
t16								——	Match1
								——	Match2

表格 6.3 22 个弹头两两比对的相似度 Match1、Match2

	t17	t18	t19	t20	t21	t22	相似度
t01	0.5047	0.8674	0.7625	0.6320	0.6826	0.7158	Match1
	0.9320	0.9548	0.9470	0.8149	0.91875	0.85485	Match2
t02	0.5024	0.8610	0.8479	0.7126	0.6573	0.7963	Match1
	0.9489	0.9205	0.9457	0.9354	0.9452	0.9290	Match2
t03	0.4612	0.8867	0.8265	0.8397	0.5434	0.8725	Match1
	0.9401	0.9118	0.8869	0.8974	0.9478	0.9485	Match2
t04	0.4874	0.8482	0.8309	0.6864	0.7023	0.7703	Match1
	0.9355	0.9405	0.8877	0.8620	0.9531	0.8631	Match2
t05	0.3579	0.7624	0.8208	0.8829	0.4341	0.9068	Match1
	0.8790	0.8837	0.9221	0.9406	0.8459	0.9547	Match2
t06	0.3509	0.7722	0.8866	0.8450	0.4270	0.9134	Match1
	0.8891	0.8788	0.9131	0.8990	0.7258	0.9451	Match2
t07	0.4346	0.8160	0.9109	0.8270	0.5126	0.9085	Match1
	0.9484	0.8976	0.9515	0.9534	0.8135	0.9620	Match2
t08	0.4691	0.8762	0.8890	0.7882	0.5466	0.8599	Match1
	0.9558	0.9160	0.9418	0.9502	0.8876	0.9521	Match2
t09	0.5285	0.8708	0.8491	0.7060	0.6627	0.7898	Match1
	0.9386	0.9423	0.9378	0.9269	0.9323	0.9266	Match2
t10	0.2408	0.6800	0.7831	0.9064	0.3170	0.8399	Match1
	0.9028	0.8815	0.9476	0.9559	0.8211	0.9505	Match2
t11	0.5493	0.8219	0.8339	0.7910	0.4665	0.8269	Match1
	0.9515	0.8998	0.9235	0.9411	0.8707	0.9472	Match2
t12	0.5194	0.8485	0.7356	0.6029	0.7364	0.6868	Match1

	0.9247	0.9291	0.8514	0.8260	0.9536	0.8263	Match2
t13	0.4845	0.8524	0.8901	0.7474	0.6225	0.8308	Match1
	0.9567	0.9542	0.9637	0.9417	0.9081	0.9416	Match2
t14	0.4391	0.8164	0.8634	0.8256	0.5443	0.8716	Match1
	0.9025	0.8963	0.9202	0.9438	0.8925	0.9657	Match2
t15	0.5726	0.8689	0.7607	0.6167	0.7019	0.7005	Match1
	0.9449	0.9677	0.9294	0.9006	0.9266	0.9141	Match2
t16	0.4129	0.8128	0.9183	0.8522	0.4890	0.9166	Match1
	0.9448	0.9199	0.9303	0.9534	0.7982	0.9463	Match2
t17	—	0.5437	0.4227	0.2819	0.6944	0.3658	Match1
	—	0.9455	0.9493	0.9167	0.9047	0.9381	Match2
t18		—	0.8367	0.7221	0.6448	0.8020	Match1
		—	0.9223	0.8849	0.9046	0.9223	Match2
t19			—	0.8234	0.5379	0.8931	Match1
			—	0.9570	0.8577	0.9360	Match2
t20				—	0.3934	0.9030	Match1
				—	0.8325	0.9497	Match2
t21					—	0.4537	Match1
					—	0.7857	Match2
t22						—	Match1
						—	Match2

➤ 取权重系数  $\lambda=0.8$ ，得到  $Mac_{th} = (1-\lambda) \cdot Mac_{th1} + \lambda \cdot Mac_{th2}$ ，按综合相似度

$Mac_{th}$  排名得到前七位如下：

表格 7

样本 弹头	相似度 $Mac_{th}$ 由大到小排名						
t01	t18	t09	t12	t13	t19	t04	t14
t02	t09	t03	t08	t19	t12	t11	t17
t03	t08	t18	t12	t02	t22	t20	t17
t04	t12	t13	t21	t01	t18	t02	t17
t05	t22	t20	t14	t16	t08	t10	t03
t06	t16	t07	t22	t12	t08	t19	t11
t07	t13	t19	t06	t16	t22	t08	t09
t08	t14	t13	t09	t16	t06	t11	t19
t09	t02	t04	t13	t15	t12	T08	t18
t10	t20	t16	t22	t05	t14	t19	t06
t11	t08	t14	t16	t02	t03	t19	t17
t12	t04	t09	t15	t06	t02	t18	t01
t13	t07	t09	t04	t08	t02	t19	t01
t14	t19	t05	t22	t11	t8	t16	t07
t15	t09	t12	t18	t01	t02	t04	t13

t16	t22	t06	t07	t19	t10	t08	t11
t17	t21	t15	t18	t09	t11	t02	t12
t18	t01	t09	t03	t08	t15	t02	t13
t19	t07	t16	t22	t13	t08	t06	t02
t20	t10	t22	t05	t16	t03	t06	t07
t21	t12	t04	t15	t17	t01	t09	t02
t22	t05	t16	t06	t07	t20	t19	t03

根据已知的弹头对应关系，得出：

$$\text{绝对正确率: } valid1 = \frac{8}{22} = 36.36\%$$

$$\text{最大误差: } valid2 = 7 - 1 = 6$$

$$\text{平均误差范围: } valid3 = \frac{(\frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} q_i) - 1}{11} = 10.61\%$$

## 7 模型评价与改进

### 7.1 模型评价

本文共提出了六个模型，其中：模型一、二、三是针对方案一（基于形状特征曲线提取的系统误差消除方案）提出的；模型四是针对方案二（基于曲面匹配的消除系统误差方案）提出的；模型五是弹痕相似度模型；模型六是弹头相似度模型。

方案一中的三个模型，都是对二维数据的优化分析模型，其优点是大大减小了运算量，并提取了最为关键的特征曲线；缺点是近似太多而导致的准确度不够。这种模型适用于计算能力有限，对结果精度要求不高的情况。

模型四及其两种算法，是对三维数据的优化分析模型，其优点是计算精度较高，缺点是运算量大，计算结果受搜索步长影响。这种模型适用于对结果精度要求较高，计算机有较强的运算能力的情况。

模型五在定义弹痕相似度时，为了使相似度的差异明显化，在计算公式中引入了一个放大系数  $k_2$ ，其优点是方便实际判断，缺点是不够严密精确，在系数  $k_2$  的选择上还有改进的空间。

模型六的优点是综合考虑了实际中会出现的各种可能，引入了权重系数  $\lambda$  来综合考虑各种判断依据，并平衡各种依据对弹头相似度的影响程度，其缺点是  $\lambda$  的计算是建立在大量经验数据的基础上的，当待比对弹头的型号种类发生变化时，

这个系数也会相应变化。

## 7.2 改进方向

在比对弹痕时，还可以从以下几个方面改进弹痕相似度的定义：

- 对子弹的旋向、缠角等枪支结构特征和细微痕迹特征进行深入分析，根据弹痕数据研究枪弹通过枪管时旋转角度的计算方法。把这个旋转角度加到相似度的定义中去；
- 利用弹痕边缘处的数据信息，从计算一阶导数及高阶导数的角度来定义相似度；
- 从弹痕曲面的高斯曲率、平均曲率的角度来定义相似度。

## 8 附录

- 令编号为 77T1-1203959 和 77T2-1203959 的两弹头进行对比，输出差异度特征数组为：

```
Err(77T1_1203959 77T2_1203959)=  
[1.8626e-006      1.1413e-007      0.010295      c1c1  
1.8632e-006      1.4887e-007      0.013428      c1c2  
1.8705e-006      3.2301e-007      0.029136      c1c3  
1.8614e-006      2.5804e-008      0.0023275     c1c4  
1.868e-006       2.7077e-007      0.024424      c2c1  
1.8695e-006      2.9881e-007      0.026952      c2c2  
1.8818e-006      4.7295e-007      0.04266       c2c3  
1.8629e-006      1.3084e-007      0.011802      c2c4  
1.8757e-006      3.9801e-007      0.0359        c3c1  
1.8779e-006      4.2604e-007      0.038429      c3c2  
1.8941e-006      6.0018e-007      0.054136      c3c3  
1.8673e-006      2.5807e-007      0.023278      c3c4  
1.8796e-006      4.4893e-007      0.040493      c4c1  
1.882e-006       4.7696e-007      0.043022      c4c2  
1.8999e-006      6.511e-007       0.058729      c4c3  
1.87e-006        3.0899e-007      0.027871      c4c4]
```

其中，第一、二、三列数据分别表示表示，在各个弹痕比较对中的指标 *character4*、*character5*、*character6* 的值；第四列数据表示弹痕比较对。观察可知 *character6* 最小值点出现在 c1c4 对比中，最小值为 0.0023275；所有比较对中 *character6* < 0.06mm，没有差异特别大的点。

- 令编号为 77T1-1203959 和 77T2-1203959 的两弹头进行对比，输出数组为：

Err(77T1_1203959	77T1_1928033)		
1.8629e-006	1.298e-007	0.011708	c1c1
1.8656e-006	2.1588e-007	0.019473	c1c2
1.8614e-006	4.5948e-008	0.0041445	c1c3
2.5552e-006	2.7773e-006	0.25051	c1c4
1.8614e-006	2.6839e-008	0.0024208	c2c1
1.8617e-006	6.595e-008	0.0059486	c2c2
1.8649e-006	1.9588e-007	0.017669	c2c3
2.479e-006	2.6207e-006	0.23638	c2c4
1.8633e-006	1.4737e-007	0.013293	c3c1
1.8616e-006	6.1286e-008	0.005528	c3c2
1.8709e-006	3.2312e-007	0.029145	c3c3
2.4203e-006	2.4934e-006	0.22491	c3c4
1.8649e-006	1.9829e-007	0.017885	c4c1
1.8624e-006	1.1221e-007	0.010121	c4c2
1.8741e-006	3.7404e-007	0.033738	c4c3
2.3976e-006	2.4425e-006	0.22031	c4c4

可以看出比较对 c1c3, c2c1, c2c2, c3c2 的 *character6* 指标非常小; 比较对 c1c4, c2c4, c3c4, c4c4 的 *character6* 指标非常大。两者之间有两个数量级的差别。这正验证了本文在 5.3 中的分析。

## 9 参考文献

- [1] 吴军基, 刘浩明, 孟绍良, 倪黔东, 小波滤波器在电力系统谐波检测中的应用, 电力系统及其自动化学报, 第 11 卷第 5-6 期: 50-54, 1999 年。
- [2] 周维虎, 兰一兵, 丁叔丹, 费业泰, 空间坐标转换技术的分析与研究 (一)、(二), 航空计测技术, 第 19 卷第 4 期: 10-16, 1999 年。
- [3] 沈兵, 高军, 张瑞乾, 王小椿, 用密切曲率法加工自由曲面, 新技术新工艺, 第 4 期: 19-20, 1998 年。
- [4] 武殿梁, 洪军, 丁玉成, 赵万华, 测量点群与标准曲面的匹配算法研究, 西安交通大学学报, 第 36 卷第 5 期: 500-503, 2002 年。
- [5] 高国军, 陈康宁, 林志航, 车阿大, 检测自由曲面时精确定位方法的研究, 机械科学与技术, 第 16 卷第 1 期: 140-143, 1997 年。
- [6] 于源, 卢军, 王小椿, 自由曲面测量中曲面匹配的建模及算法分析, 机械科学与技术, 第 20 卷第 3 期: 467-471, 2001 年。
- [7] 杜建军, 高栋, 孔令豹, 姚英学, 光学自由曲面误差评定中匹配方法的研究, 光学精密工程, 第 14 卷第 1 期: 133-138, 2006 年。
- [8] 潘泉, 孟晋丽, 张磊, 程咏梅, 张洪才, 小波滤波方法及应用, 电子与信息学报, 第 29 卷第 1 期: 236-241, 2007 年。

