

全国第七届研究生数学建模竞赛



题 目 与封堵溃口有关的重物落水后运动模型

摘 要：

本文围绕封堵溃口的重物落水后运动规律的问题,从重物落水后的受力分析出发,结合原题提供的实时数据,通过对模型的不断改进,建立了试验组件落水后的通用运动模型,并对此模型做了参数分析和均值误差分析来验证模型的合理性与准确性。

针对问题一,首先对重物进行受力分析,根据牛顿定律和对重物进入水面后的初速度分情况讨论,建立了描述重物水中运动过程的常微分方程模型,并求出其解析解。编程画出常微分方程的曲线图,并与小型试验数据进行比较。

针对问题二,对不同重物在不同条件下,利用水平方向经验粘滞系数,采用步长为 0.1,在域宽为 0.5 的区间上取一系列粘滞系数值,作出模型所述重物运动的轨迹并与观察数据所描的轨迹比较,利用择优法,找出较优的粘滞系数值,取其均值作为通用模型的粘滞系数值,并把模型中水的深度等参数改为任意值,使该模型更具有通用性。

针对问题三,对模型进行稳态误差分析,分析模型参数的微小扰动对模型的影响来研究模型的误差限,用均值误差度量模型与观测值之间的误差,进而说明该模型的合理性,并利用该方程求出在何处投出重物使其在最有效位置触底。

针对问题四,利用相关准则分析所建模型能否应用到真实情况中,并由题给数据进行试算。

在本文建立该模型时没有考虑重物入水时激起的水波、空泡等对其运动过程的影响。为了使模型更精确地符合实际现象,在模型评价时采用了偏微分方程模型描述该现象。

关键词：重物落水后运动；微分方程；择优法；稳态误差

参赛队号 10491009

队员姓名 代永力、肖宝秋、李慧娟

参赛密码 _____
(由组委会填写)

中山大学承办

与封堵溃口有关的重物落水后运动过程

一 问题重述

1.1 背景分析

我国经常发生洪水，溃坝溃堤进而引发泥石流灾害造成国家和人民生命财产的严重损失。历年来的洪灾，尤其是最近的溃坝、泥石流险情给了我们深刻的教训：必须有效地开展封堵溃口的研究。由于溃口水流的流量和速度会比较大，在通常情况下很难在短时间之内将溃口彻底封堵，但如果通过投放重物对尚存的坝体产生一定的保护作用，就可以延缓溃坝溃堤的过程，为人民群众的撤离争取更多的时间。

利用直升飞机投放堵口组件，不仅能显著提高溃口抢险的快速反应能力，而且容易解决溃口交通不便、堵口物资缺乏等问题。

显然，投入溃口的重物落水后受到溃口水流的作用会向下游漂移。为了使封堵用的重物落水后能够沉底到、并保持在预想的位置，尽可能减少无效投放，必须掌握重物落水后的运动过程，在预定沉底位置的上游一定距离投放达到一定体积和重量的重物。由于溃坝溃堤的高度危害性、不可重复性和经济损失过大，肯定无法通过相关实物试验去研究封堵用重物落在溃口后的运动过程，而只能先通过理论分析和小型试验获取相关数据的方法进行研究，特别后者具有客观、经费省、风险小、时间短、易重复、条件可以改变等优点。

1.2 有关情况

由于具体情况不同，溃口的纵、横断面千差万别，而且都不是规则的矩形、梯形或V字形；溃口的底面也都不是水平或具有稳定斜率的平面，粗糙度各异；溃口各部分的流速分布肯定也是不均匀的；更值得注意的是，溃口形状和大小一般是不断变化的，流速、流量也随着水位和溃口形状的变化而变化。由于往往是就地取材，封堵用重物的形状、大小千变万化；重量、体积、面积各不相同，不可能一模一样。虽然它们都影响封堵用重物落在溃口后的运动过程和沉底后状况，但在研究前期，无论理论分析或者小型试验获取相关数据的方法都不应该考虑上述全部因素，否则只能是欲速则不达。只有在简单情况下，通过固定大多数因素、条件，只让少数因素发挥作用，才能发现事物内部的规律，揭示问题的本质。为此我们这里暂不考虑重物沉底后的稳定性，只探索重物落水后的运动规律。即便如此，理论分析和小型试验获取相关数据的方法也无法穷尽所有的情况，做到面面俱到。所以我们设计的小型试验先选取十种重物形状、四种不同速度的稳定水流、在三种不同的高度多次重复进行投放试验，从大量数据的分析中发现重物在水中运动的规律，同时为机理模型的建立提供思路及检验模型用的数据。

在理论分析和小型试验数据分析的基础上，我们将根据水力学已有的方法进行推广，同时变动试验的条件和物理、几何等参数再进行新试验。一方面可以补充原来方案的不足，另一方面使新试验更接近真实情况，验证我们已经发现的“疑似规律”和建立的数学模型，并加以改进和推广。在进一步总结后再将改进后的试验方法、手段包括测试方案、数据采集、数学模型，推广应用到野外中试验，在获得成功并掌握重物在水中运动的规律后才能够最终应用于实际抢险行动。

1.3 问题提出

初步分析题目可知，我们需要解决以下问题：

1、以附图 1 中各单件试件为例，分析影响重物在水中运动过程的因素，并建立大实心方砖落水后运动过程的数学模型。

2、利用小型试验数据或相关数学、物理方法，建立包含上述各种因素，从而能够适应不同情况的、描述重物水中运动过程的数学模型。

3、对所建立的数学模型进行误差分析，利用相关的数学、物理概念、小型试验数据，验证所建立的数学模型的合理性，并根据数学模型提出让堵口重物恰好在最有效位置触底的猜想和应该进行哪些新试验来验证猜想。

4、由于水流运动非常复杂，至今一些水流现象还无法从小型试验得到，因此小型试验的结论不能任意推广到真实情况。水力学理论研究的结论是：小型试验的流动与真实情况的流动具有一定的相似性时，小型试验的结果方可用到原型中去。根据建立的数学模型，查阅相关资料，简要回答以下两个问题。

(1) 本题所提及的小型试验满足了什么相似准则？如何依据相似准则将本试验及建立的数学模型的成果加以推广，对未来需要进行的试验和研究工作提出建议。

(2) 假定溃口几何形状及水流速度与小型试验相似，溃口水深分别为 $3m$ 和 $4m$ ，溃口流速为 $4m/s$ 和 $5m/s$ ，若重物重量为 $1.5t$ ，根据建立的数学模型求解距离水面 $2m$ 投放重物时，应分别提前多远投放才能使重物沉底到预定位置？

二 模型假设

假设如下：

- (1) 物体在水中运动过程进行受力分析时看成质点，不考虑其体积与形状。
- (2) 水域是均匀液体，具有稳定速度。
- (3) 重物落水时只有垂直于水平方向的速度，没有其它方向的初速度。
- (4) 重物在水中的运动轨迹经过玻璃水槽到摄像机的过程中不考虑光在玻璃水槽和水中的折射问题。
- (5) 不考虑重物入水时激起的水波、空泡等因素。

三 符号定义与说明

$g = 9.8 \text{ m/s}^2$	重力加速度
m	重物的质量
φ	重物的体积
ρ_w	水的密度
(v_x, v_y)	重物的速度 (v_x, v_y)
$(v_0, 0)$	水流的速度
k_1	水流在水平方向上的阻力系数
k_2	水流在竖直方向上的阻力系数
h	重物被投时距离水面的高度
$G = mg$	重物的重力
$F_{\text{浮}} = \rho_w g \varphi$	重物在水中受的浮力
$F_y = k_2 s_y v_y^2$	物体在竖直方向上受的阻力
$F_{y\text{附}} = m_f \frac{dv_y}{dt}$	重物在竖直方向上受的附加质量力
$F_x = k_1 s_x (v_0 - v_x)^2$	重物在水平方向上受到的推力
$F_{x\text{附}} = m_f \frac{dv_x}{dt}$	重物在水平方向上受到的附加质量力
$m_f = \rho_w \varphi g$	重物落入水中时所负载的附加质量
$(0, v_1)$	重物刚接触水界面的速度
$(0, v_2)$	重物刚离开水界面的速度
C_d	水的粘滞系数
s_x, s_y	物体分别在水平、竖直方向与水接触的有效面积

四 影响因素分析与数学模型建立

4.1 影响重物水中运动过程的因素分析

先利用软件对所给的数据预处理,即剔除较为不合理的数据,利用Matlab 编程(程序见附录)进行描点,得到不同情况下重物在水中的运动轨迹图像。并将结果中的观测数据分为四类:不同形状重物在相同投放方式下的运动轨迹(图4-1)、大实心方砖在高度为 0 cm 的不同水流初速度下的运动轨迹(图4-2)、大实心方砖在高度为 0 cm 的不同投放方式下的运动轨迹(图4-3)和大实心方砖在同一投放方式下不同投放高度的运动轨迹(图4-4)。

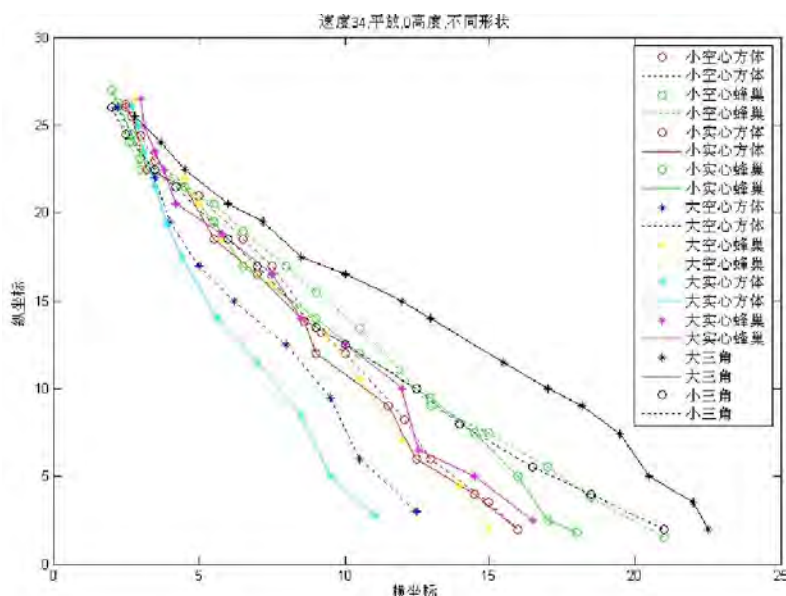


图4-1 不同形状重物在高度为 0 cm 、水流初速度为 34 cm/s 、平放下的运动轨迹(横坐标和纵坐标的单位为 cm)

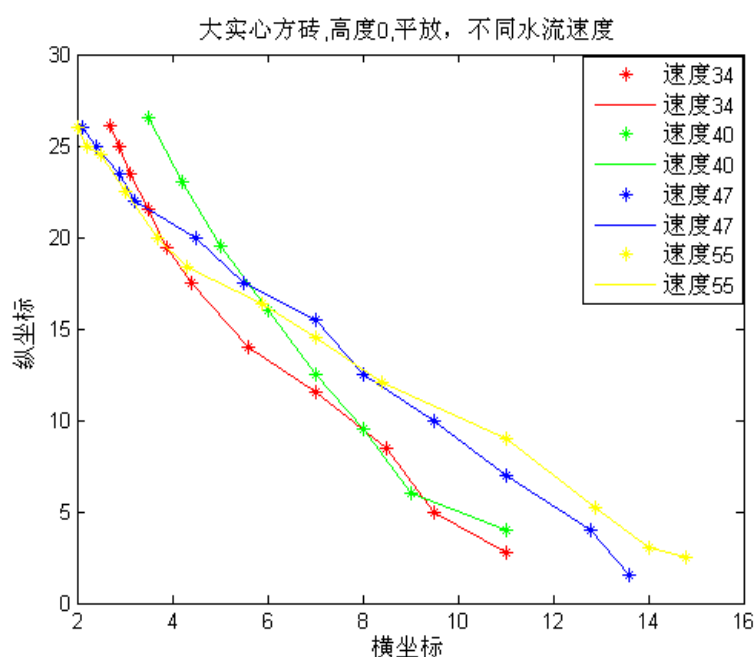


图4-2 大实心方砖在高度为 0 cm 、平放、不同水流初速度下的运动轨迹

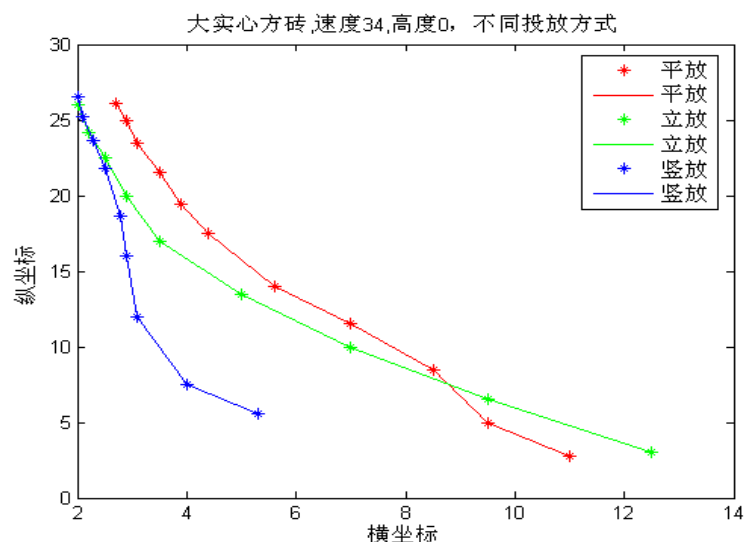


图4-3 大实心方砖在高度为 0 cm 、水流初速度为 34 cm/s 的不同投放方式的运动轨迹

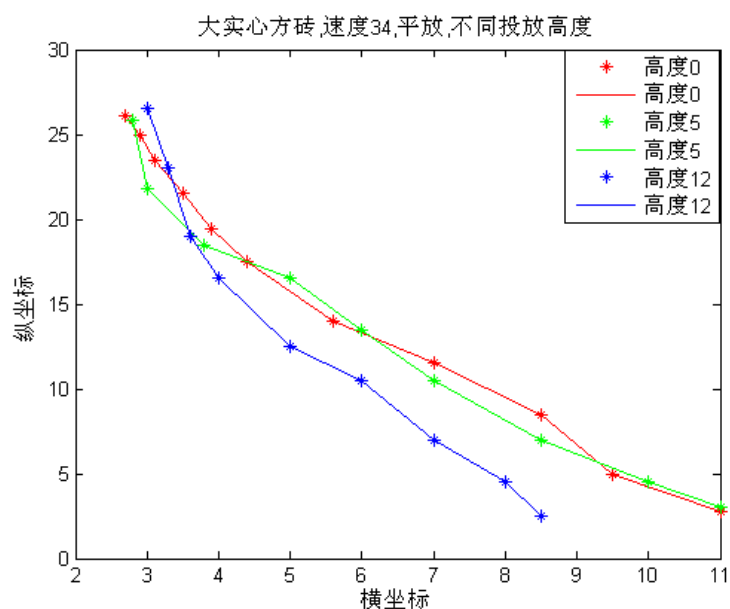


图 4-4 大实心方砖在平放、水流初速度为 34 cm/s 的不同投放高度下的运动轨迹

根据以上四幅图像以及相关参考资料分析，影响重物在水中运动过程的因素主要有：

- (1) 重物的投放方式：影响重物落水后物体与水流的接触面积的大小。
- (2) 重物的投放高度：影响重物进入水面时竖直方向上的速度大小。
- (3) 水流的水平初速度：影响重物在水平方向的粘滞力的大小。
- (4) 重物的形状：影响重物在水中运动时与水流的接触面积的大小。

4.2 以大实心方砖为例建立数学模型

4.2.1 模型建立

首先建立坐标系，以水流方向为 x 轴，以从物体投放位置向 x 轴做垂线记为 y 轴，其交点为坐标原点 o ，根据实验玻璃水槽类型，选取从坐标原点出发垂直

于 xoy 平面的直线为 z 轴，根据题意和实验数据分析，本题只考虑重物在水中运动过程时 xoy 平面投影上的横坐标和纵坐标的变化，在实际应用中，例如在直升飞机投放堵口组件时，组件可能会有一个与 x 轴方向有一定夹角 α 的初速度，这时就需要考虑 yoz 平面上的坐标变化，由于实验条件限制，本题中不予考虑。对重物在水中运动时进行受力分析^[1]（以大实心方砖平放为例），如图 4-5 所示：

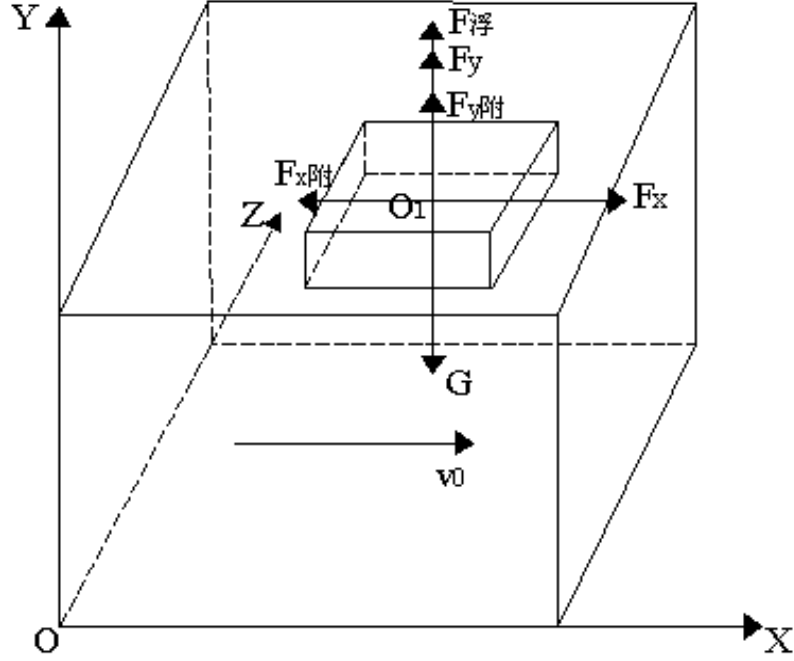


图 4-5 大实心方砖在水中的受力分析图

物体进入水界面的瞬间动量守恒，利用动量守恒定律有：

$$mv_1 = (m + m_f)v_2,$$

$$v_2 = -\frac{m}{m + m_f}\sqrt{2gh}。$$

根据受力分析，应用牛顿第二定律得物体在水中的运动模型如下：

在 x 轴方向：

$$ma_x = F_x - F_{x附},$$

即

$$m \frac{dv_x}{dt} = k_1 s_x (v_0 - v_x)^2 - m_f \frac{dv_x}{dt},$$

利用分离变量法解得

$$\frac{1}{v_0 - v_x} = \frac{k_1 s_x}{m + m_f} t + c_1, \text{ 其中 } c_1 \text{ 为常数,}$$

由于 $v_x(t)|_{t=0} = 0$ ，解得 $c_1 = \frac{1}{v_0}$ ，

$$\text{所以 } v_x(t) = v_0 - \frac{v_0(m+m_f)}{k_1 v_0 s_x t + m + m_f} \quad (4.1)$$

对 (4.1) 式积分得并利用初始条件 $x(t)|_{t=0} = 0$ ，得

$$x(t) = v_0 t - \frac{m+m_f}{k s_x} \ln(k_1 s_x v_0 t + m + m_f) + \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(m + m_f) \quad (4.2)$$

其中 s_x 为物体在水平方向与水接触的有效面积。

在 y 轴方向：

$$\begin{cases} m \frac{dv_y}{dt} = -mg + \rho_w \phi g + k_2 s_y v_y^2 + m_f \frac{dv_y}{dt} \\ v_y|_{t=0} = v_2 = -\frac{m}{m+m_f} \sqrt{2gh} \end{cases}, \quad (4.3)$$

对 (4.3) 的第一个等式进行分离变量得

$$A dv_y = (v_y^2 - B^2) dt, \quad (4.4)$$

令 $A = \frac{m-m_f}{k_2 s_y}$ ， $B^2 = \frac{mg - \rho_w \phi g}{k_2 s_y}$ ，其中 s_y 为物体在竖直方向与水接触的有效面积。

(1) 当 $v_y(t) = -B$ 时，物体的速度为一常数，物体触底时间： $t = \frac{d}{B}$ 。

当 $v_y(t) = -B$ 时，实验物体在水中的运动过程的方程为：

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(k_1 s_x v_0 t + m + m_f) + \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(m + m_f) \\ y(t) = 0.275 - Bt \\ x(t)|_{t=0} = 0 \\ y(t)|_{t=0} = 0.275 \end{cases}, \quad t \in [0, b]$$

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{v_0^2 k_1 s_x (m+m_f)}{(k_1 s_x v_0 t + m + m_f)^2} \\ a_y(t) = 0 \end{cases}$$

由此分析得物体在水中运动时速度的变化率越来越小，当水域的宽度和深度为无限大时，物体则在水中做匀速运动，即 $\lim_{t \rightarrow \infty} (v_x(t), v_y(t)) = (v_0, -B)$ 。

物体从接触水面到物体触底的过程中，物体竖直方向上的速度的大小是增大的，但增加的速率愈来愈小的，在考虑 $v_y(t)$ 与 $-B$ 的关系时只需考虑 v_2 与 $-B$ 的关系，所以分下面两种情况分别进行讨论：

(2) 当 $v_2 > -B$ 时，(4.4) 式可以化为： $\frac{A}{v_y^2 - B^2} dv_y = dt$

解得
$$v_y(t) = B \times \frac{1 - c_4 e^{\frac{2Bt}{A}}}{c_4 e^{\frac{2Bt}{A}} + 1}, \text{ 其中 } c_4 = \frac{-v_2 + B}{v_2 + B}。 \quad (4.5)$$

将 (4.5) 式在 $[0, t]$ 上积分，得

$$y(t)|_0^t = \int_0^t v_y dt = \int_0^t B \times \frac{1 - c_4 e^{\frac{2Bt}{A}}}{c_4 e^{\frac{2Bt}{A}} + 1} dt ,$$

令 $z = e^{\frac{2Bt}{A}}$ ，所以 $dz = \frac{2B}{A} e^{\frac{2Bt}{A}} dt = \frac{2B}{A} z dt$ ，

$$y(t) = 0.275 + Bt - A \ln(1 + c_4 e^{\frac{2Bt}{A}}) + A \ln(1 + c_4)$$

下面考虑物体接触地面的时间：

当物体触底时 $y(t) = 0.275 + Bt - A \ln(1 + c_4 e^{\frac{2Bt}{A}}) + A \ln(1 + c_4) = 0$ ，

解得时间为： $T_d = \frac{(1 + c_4) e^{\frac{0.275}{A}} + \sqrt{[(1 + c_4) e^{\frac{0.275}{A}}]^2 - 4c_4}}{2c_4}$ ， $t_d = \frac{A}{B} \ln T_d$ 。

此时刻对应水平方向的位移为：

$$x(t_d) = v_0 t_d - \frac{m + m_f}{k_1 s_x} \ln(k_1 s_x v_0 t_d + m + m_f) + \frac{m + m_f}{k_1 s_x} \ln(m + m_f)。$$

物体触底时物体的位移为： $(x(t_d), y(t_d)) = (x(t_d), 0)$ 。

当 $v_2 > -B$ 时，实验物体在水中的运动过程的方程为：

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \frac{m + m_f}{k_1 s_x} \ln(k_1 s_x v_0 t + m + m_f) + \frac{m + m_f}{k_1 s_x} \ln(m + m_f) \\ y(t) = 0.275 + Bt - A \ln(1 + c_4 e^{\frac{2Bt}{A}}) + A \ln(1 + c_4) \\ x(t)|_{t=0} = 0 \\ y(t)|_{t=0} = 0.275 \end{cases}, \quad t \in [0, t_d]$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 - \frac{v_0(m+m_f)}{k_1 v_0 s_x t + m + m_f} \\ v_y(t) = B \times \frac{1 - c_4 e^{\frac{2Bt}{A}}}{1 + c_4 e^{\frac{2Bt}{A}}} \\ v_x(t)|_{t=0} = 0 \\ v_y(t)|_{t=0} = v_2 \end{cases}, t \in [0, t_d] \quad (4.6)$$

根据 (4.6) 式求得物体在坐标轴方向的加速度 (a_x, a_y) 为:

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{v_0^2 k_1 s_x (m+m_f)}{(k_1 s_x v_0 t + m + m_f)^2} \\ a_y(t) = \frac{4B}{A} \times \frac{-c_4 e^{\frac{2Bt}{A}}}{(1 + c_4 e^{\frac{2Bt}{A}})^2} \end{cases},$$

由此分析得出物体在水中运动时速度的变化率越来越小, 当水域的宽度和深度为无限大时, 物体最终在水中做匀速运动, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} (v_x(t), v_y(t)) = (v_0, -B)$ 。

(3) 当 $v_2 < -B$ 时,

$$\text{解 (4.4) 得 } v_y(t) = B \times \frac{1 + e^{\frac{2Bt}{A} c'_4}}{1 - e^{\frac{2Bt}{A} c'_4}}, \text{ 其中 } c'_4 = \frac{v_2 - B}{v_2 + B} \quad (4.7)$$

式 (4.7) 在 $[0, t]$ 上积分

$$y(t)|_0^t = \int_0^t v_y dt = \int_0^t B \times \frac{1 + e^{\frac{2Bt}{A} c'_4}}{1 - e^{\frac{2Bt}{A} c'_4}} dt$$

$$\text{解得 } y(t) = 0.275 + Bt - A \ln(c'_4 e^{\frac{2Bt}{A}} - 1) + A \ln(c'_4 - 1)$$

$$\text{当物体触底时 } y(t) = 0.275 + Bt - A \ln(c'_4 e^{\frac{2Bt}{A}} - 1) + A \ln(c'_4 - 1) = 0,$$

解得时间为:

$$e^{\frac{Bt}{A}} = T'_d = \frac{(c'_4 - 1)e^{\frac{0.275}{A}} + \sqrt{[(c'_4 - 1)e^{\frac{0.275}{A}}]^2 + 4c'_4}}{2c'_4}, \quad t'_d = \frac{A}{B} \ln T'_d \quad (4.8)$$

此时刻对应水平方向的位移为:

$$x(t_d) = v_0 t'_d - \frac{m + m_f}{k_1 s_x} \ln(k_1 s_x v_0 t'_d + m + m_f) + \frac{m + m_f}{k_1 s_x} \ln(m + m_f) \quad (4.9)$$

物体触底时物体的位移为: $(x(t'_d), y(t'_d)) = (x(t'_d), 0)$ 。

当 $v_2 < -B$ 时, 物体在水中的运动过程方程为:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(k_1 s_x v_0 t + m+m_f) + \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(m+m_f) \\ y(t) = 0.275 + Bt - A \ln(c'_4 e^{2Bt/A} - 1) + A \ln(c'_4 - 1) \\ x(t)|_{t=0} = 0 \\ y(t)|_{t=0} = 0.275 \end{cases}, t \in [0, t_d']$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 - \frac{v_0(m+m_f)}{k_1 v_0 s_x t + m+m_f} \\ v_y(t) = B \times \frac{1 + e^{2Bt/A} c'_4}{1 - e^{2Bt/A} c'_4} \\ v_x(t)|_{t=0} = 0 \\ v_y(t)|_{t=0} = v_2 \end{cases}, t \in [0, t_d'] \quad (5.0)$$

根据 (5.0) 式求得物体在坐标轴方向的加速度 (a_x, a_y) 为

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{v_0^2 k_1 s_x (m+m_f)}{(k_1 s_x v_0 t + m+m_f)^2} \\ a_y(t) = \frac{4B}{A} \times \frac{c'_4 e^{2Bt/A}}{(1 - c'_4 e^{2Bt/A})^2} \end{cases}$$

分析得物体在水中运动时速度的变化率越来越小, 当水域的宽度和深度为无限大时, 物体最终在水中做匀速运动, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} (v_x(t), v_y(t)) = (v_0, -B)$ 。

综上所述从理论上分析所建立的模型符合实际。

4.2.2 数据的预处理与粘滞系数

以大实心方砖的小型试验数据为例, 在试验模型建立的过程中, 由于物体被看成质点, 在水平方向上的实际位移与小型试验中实际观测到水平位移 x_c 的差为物体被投时其重心离 y 轴的距离 s_g , 称 s_g 为水平位移的修正值, 在利用程序作图时需要对观测数据进行处理即对水平方向上的位移减去 s_g 。

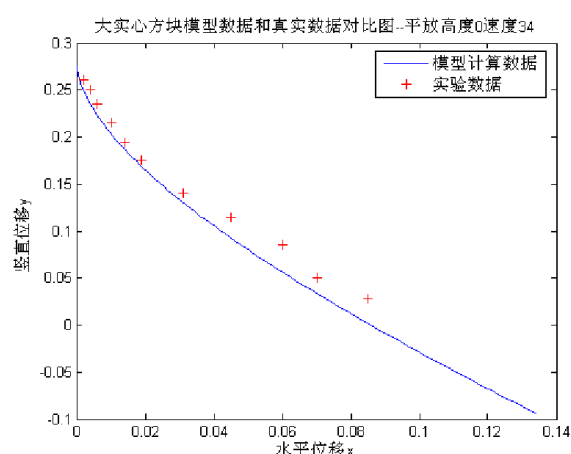
在本实验中水流在坐标轴方向上粘滞系数不同, 记水平方向的水的阻力系数 $k_1 = \frac{1}{2} \rho_w C_d$, 根据美国联邦公路管理委员会 (FHWA) [3] 的相关试验, 分析可得竖直方向的水的阻力系数 $k_2 = \frac{1}{2} \rho_w C_d \frac{1}{v_0}$, C_d 为水的粘滞系数。根据美国联邦公路

管理委员会（FHWA）采用水流作用实际面积的计算值，推荐 $C_d \in [2.0, 2.2]$ 一常数，

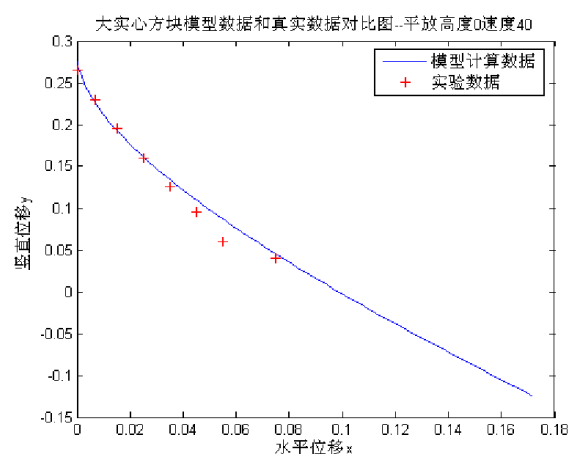
在本次试验中考虑水的密度的不确定性，为了使模型更精确，我们取 k_1 的经验范

围为 $[950, 1200]$ ，为此我们取 $k_1 = 1100$ 和 $k_2 = \frac{k_1}{v_0}$ ，对大实心方块通过不同的投放

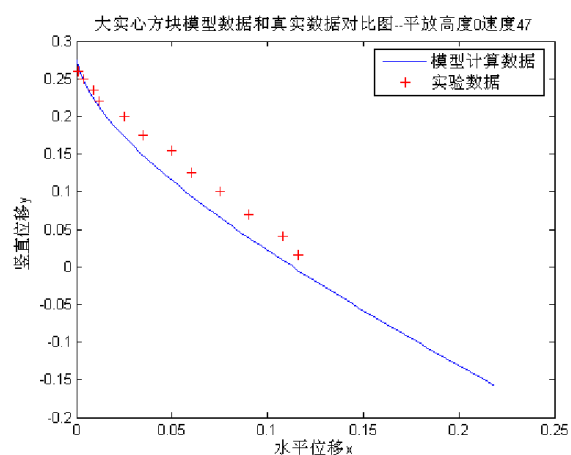
方式，不同的水速，不同的高度投放时，通过所建立的数学模型作出对应的运动轨迹图形，应用 Matlab 根据小型试验数据对上述对应状态进行描点作出图像，图形的对比如下面一系列图所示。



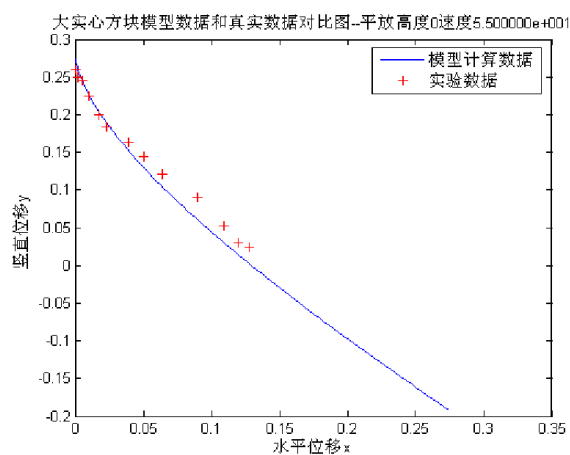
$$v_0 = 34 \text{ cm/s}$$



$$v_0 = 40 \text{ cm/s}$$

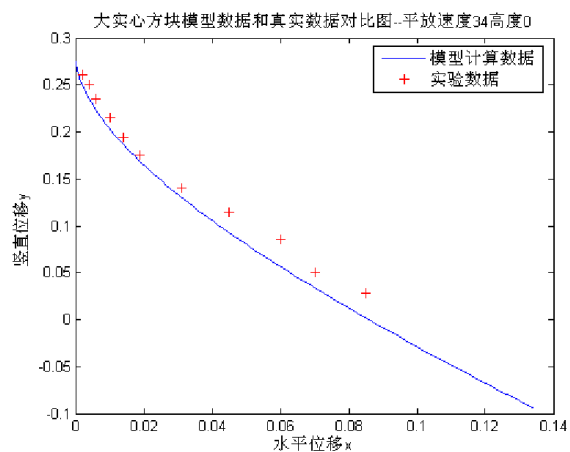


$$v_0 = 47 \text{ cm/s}$$

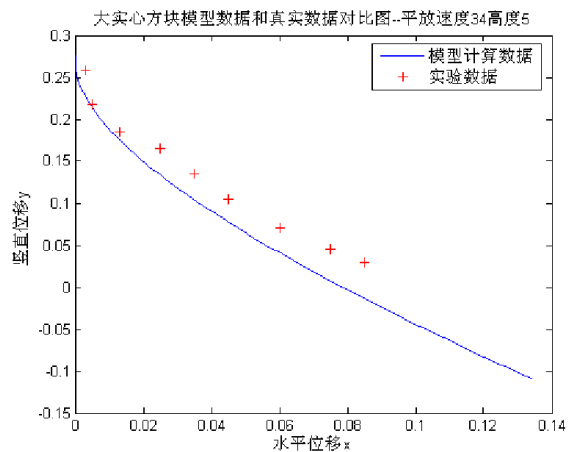


$$v_0 = 55 \text{ cm/s}$$

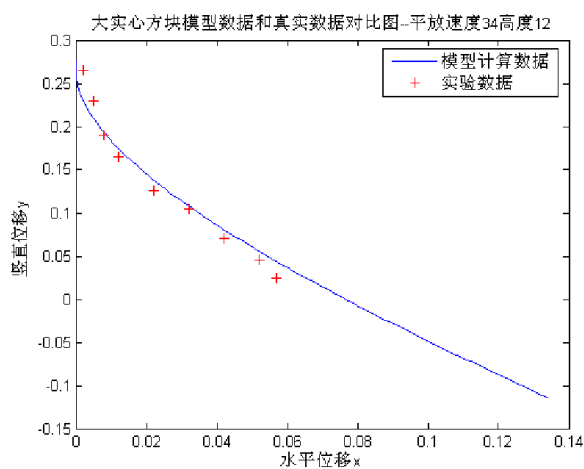
图 4-6 大实心方砖在高度为零、平放、不同水流初速度下 x 、 y 随时间变化的曲线



$h = 0cm$

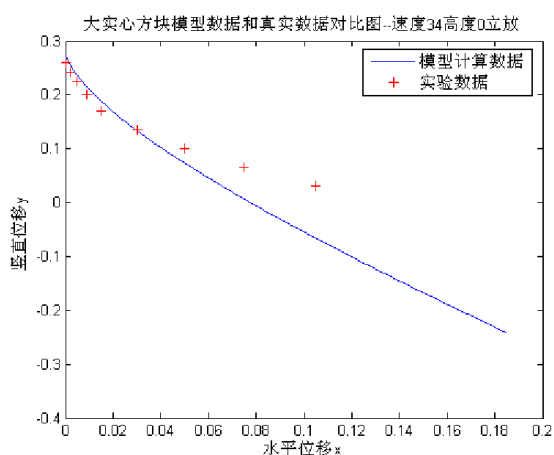


$h = 5cm$

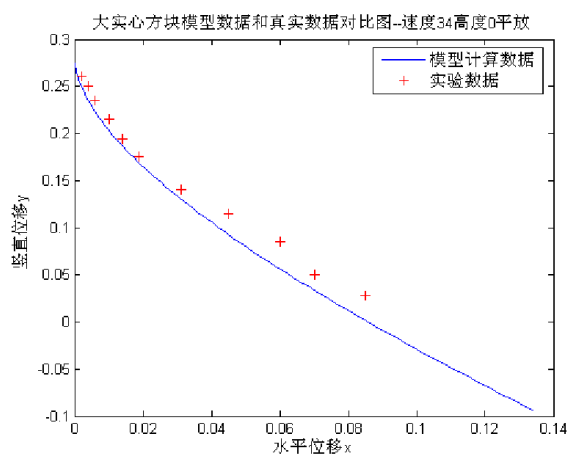


$h = 12cm$

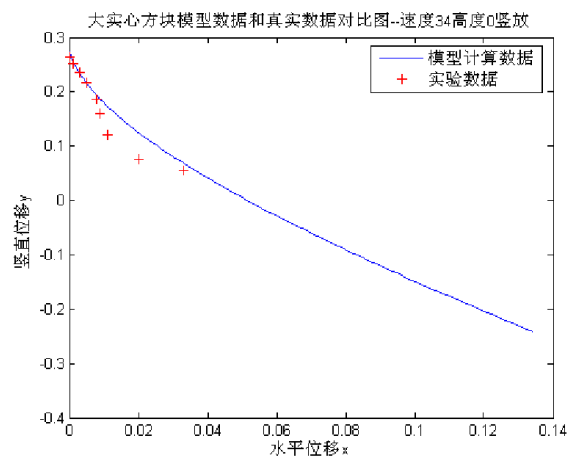
图 4-7 大实心方砖在水流初速度为 $34cm/s$ 、平放、不同高度下 x 、 y 随时间变化的曲线



立放



平放



竖放

图 4-8 大实心方砖在水流初速度为 34 cm/s 、高度为 0、不同投放方式下 x 、 y 随时间变化的曲线

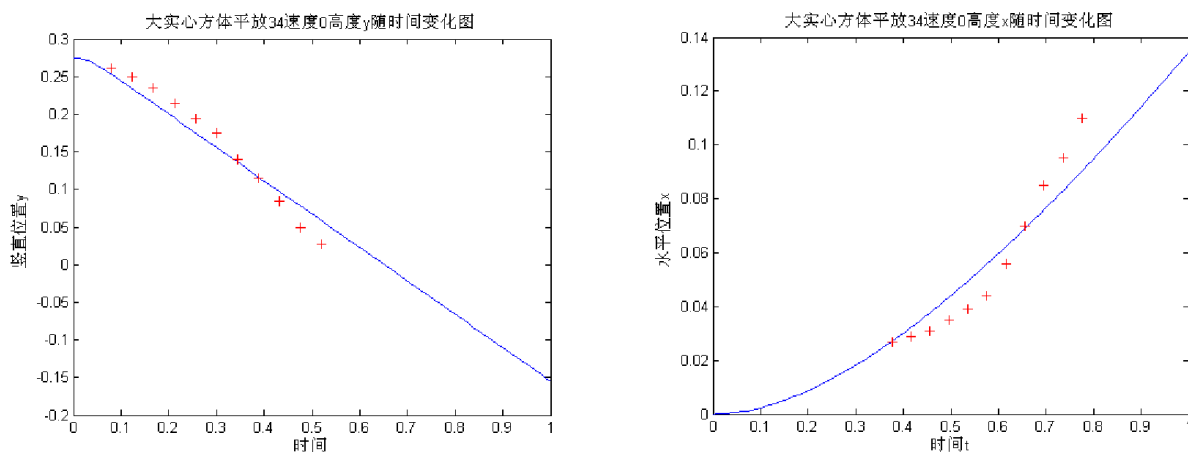


图 4-9 大实心方砖在水流初速度为 34 cm/s 、平放、高度为 0 下 x 、 y 分别随时间变化的曲线

通过观测图形可得我们所采用的 $k_1 = 1100$ 、 $k_2 = \frac{k_1}{v_0}$ 和所建立的数学模型适合大实心方块模型在水中的运动过程。

五 确定最优 k_1 、 k_2 ，建立通用数学模型

5.1 利用小型试验数据确定最优 k_1 、 k_2

为了得到适用于一般重物的数学模型，需对水的阻力系数进行调整，所以我们需对不同的阻力系数验证效果，验证效果的方法与问题一中应用的方法一致，为确定最优的 k_1 、 k_2 ，我们采用择优法。

以问题一中利用的经验阻尼系数值 $k_1 = 1100$ ，取 k_1 的经验范围为 $[950, 1200]$ ，

采用步长 50，在区间内变化，利用 Matlab 作出不同情况下不同阻力系数的图形（见图 5-1 - 5-10），并与通过附表数据描点所得图形进行比较，根据图形取出每个图形中使曲线比较符合实际观测值的粘滞系数 C_d ，并把较优粘滞系数求和，并求其算术平均值 $\overline{C_d}$ 。

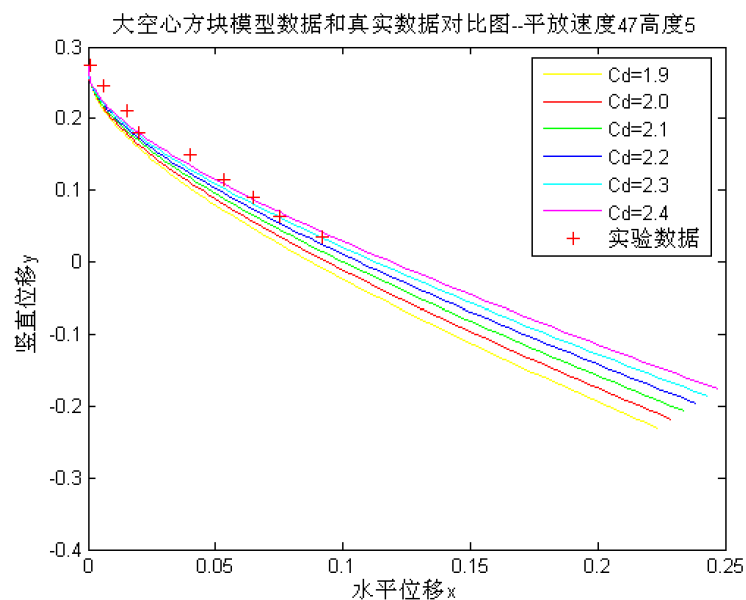


图 5-1 较优粘滞系数为 $C_d = 2.2$ 、 $C_d = 2.3$ 和 $C_d = 2.4$

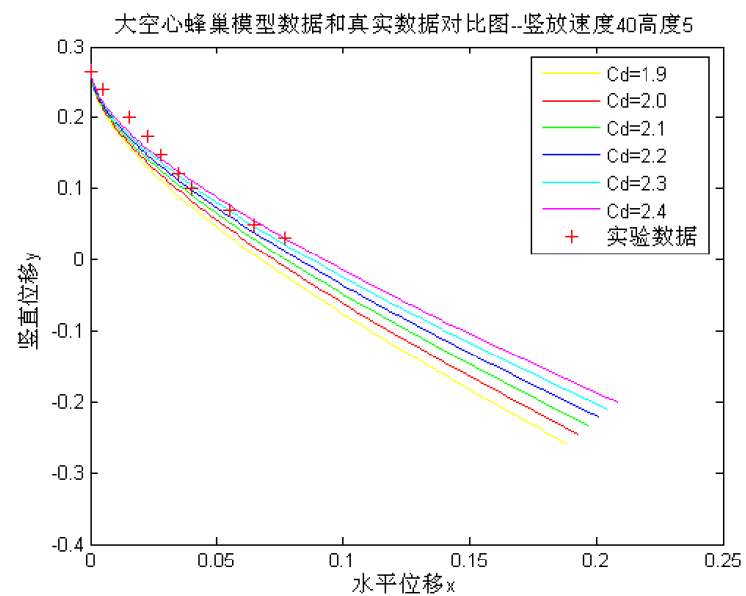


图 5-2 较优粘滞系数为 $C_d = 2.2$ 、 $C_d = 2.3$ 和 $C_d = 2.4$

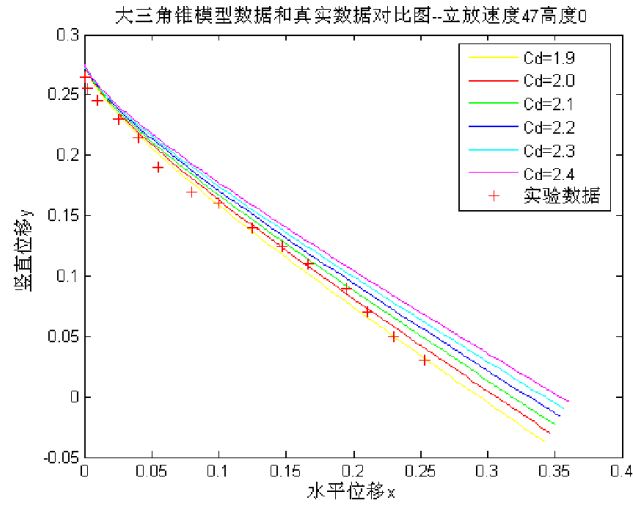


图 5-3 较优粘滞系数为 $C_d = 1.9$ 、 $C_d = 2.0$ 和 $C_d = 2.1$

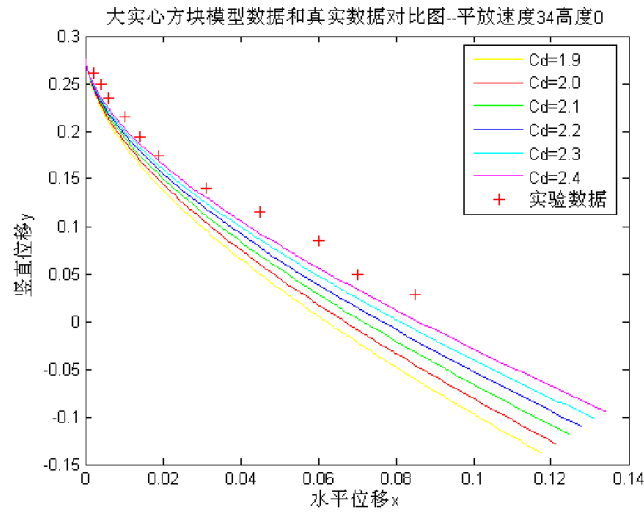


图 5-4 较优粘滞系数为 $C_d = 2.3$ 、 $C_d = 2.4$

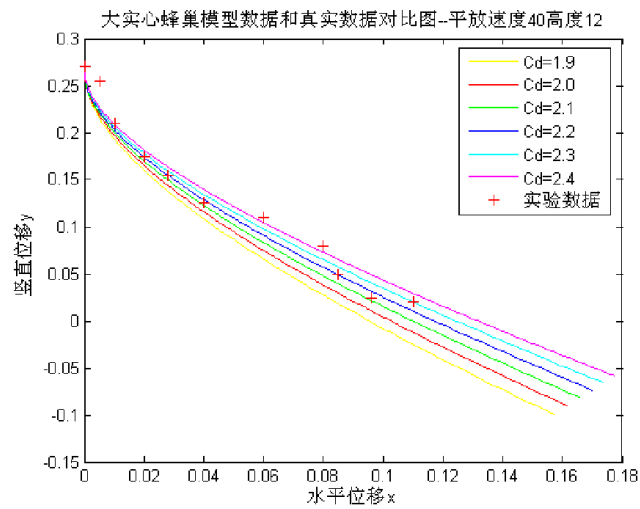


图 5-5 较优粘滞系数为 $C_d = 2.0$ 、 $C_d = 2.1$ 、 $C_d = 2.2$ 和 $C_d = 2.3$

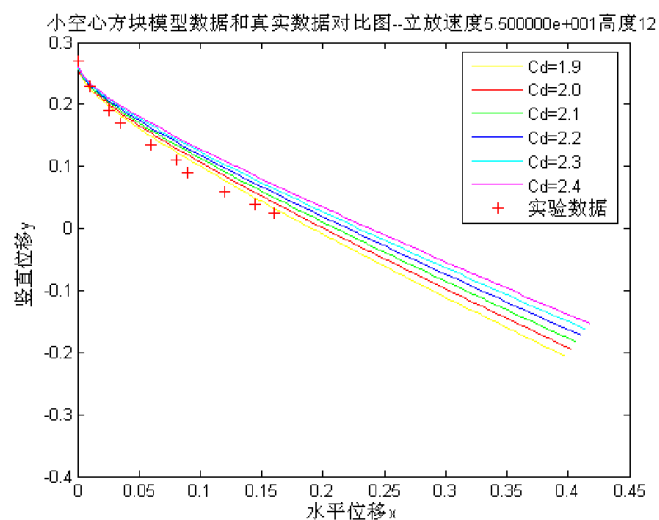


图 5-6 较优粘滞系数为 $C_d = 1.9$ 、 $C_d = 2.0$

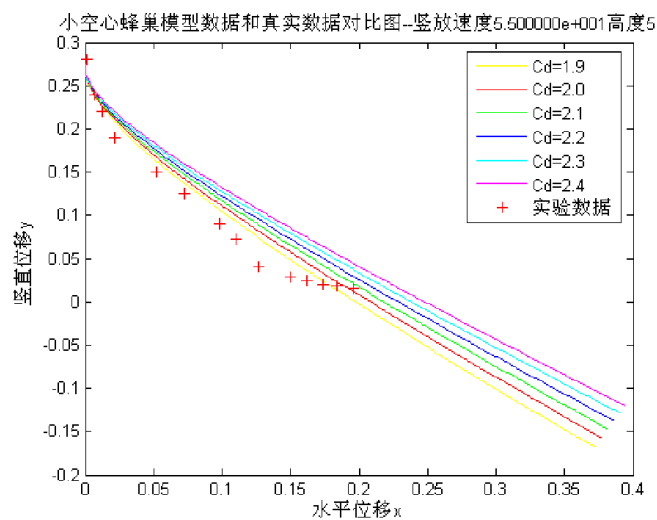


图 5-7 较优粘滞系数为 $C_d = 1.9$ 、 $C_d = 2.0$

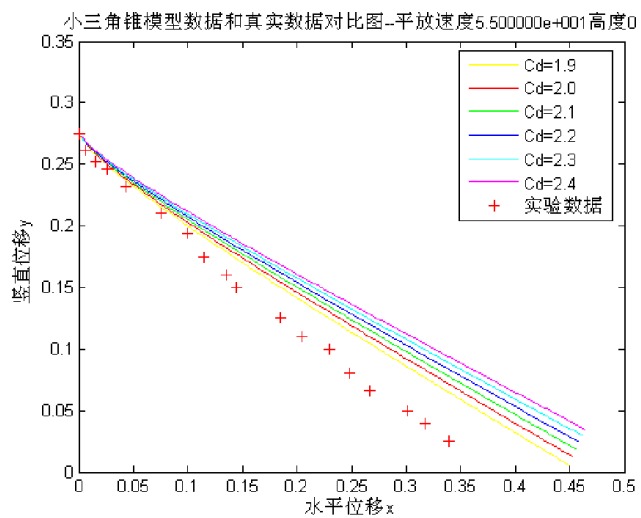


图 5-8 较优粘滞系数为 $C_d = 1.9$

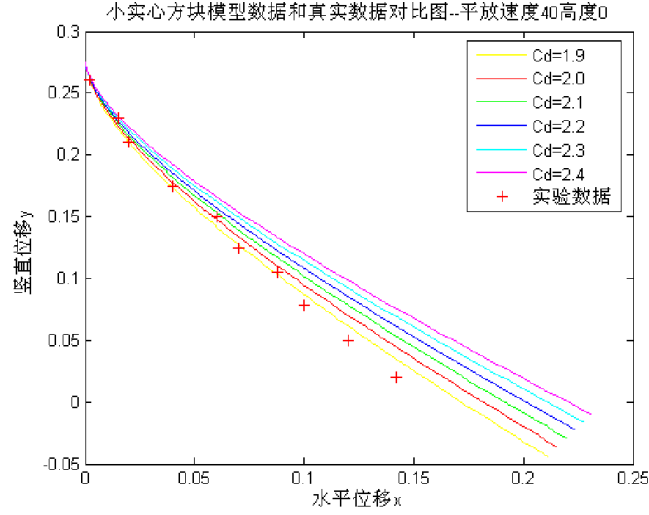


图 5-9 较优粘滞系数为 $C_d = 1.9$ 、 $C_d = 2.0$ 和 $C_d = 2.1$

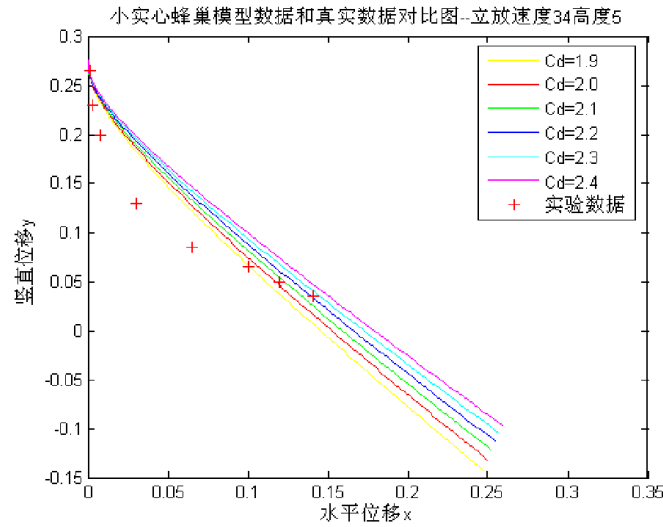


图 5-10 较优粘滞系数为 $C_d = 1.9$ 和 $C_d = 2.0$

根据曲线的结果，从十个图形中找出较优粘滞系数 25 个，如下：

2.2、2.3、2.4、2.2、2.3、2.4、1.9、2.0、2.1、2.3、2.4、2.0、2.1、
2.2、2.3、1.9、2.0、1.9、2.0、1.9、1.9、2.0、2.1、1.9、2.0，

取算术平均值得 $\bar{C}_d = 2.1$ 。

5.2 建立适用于不同情况下不同重物落水后运动过程的数学模型

大多数情况下，我们认为水的密度为 1000 kg/m^3 ，利用上述方法求得水的平均粘滞系数 $\bar{C}_d = 2.1$ ，我们可以得到水平方向的阻力系数和竖直方向的阻力系数

分别为： $\bar{k}_1 = 1050$ ， $\bar{k}_2 = \frac{\bar{k}_1}{v_0}$ 。根据问题一所建立的模型，对于不同深度 d 我们可

以得到适用于不同情况的重物落水后的运动方程为：

(1) 当 $v_2 > -B$ 时

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(\overline{k_1 s_x} v_0 t + m + m_f) + \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(m + m_f) \\ y(t) = d + Bt - A \ln(1 + c_4 e^{2Bt/A}) + A \ln(1 + c_4) \\ x(t)|_{t=0} = 0 \\ y(t)|_{t=0} = d \end{cases},$$

其中 $A = \frac{m-m_f}{k_2 s_y}$, $B^2 = \frac{mg - \rho_w \varphi g}{k_2 s_y}$, $c_4 = \frac{-v_2 + B}{v_2 + B}$, 其中 d 在所做的小实验中的值为 $d = 0.275$ 。

(2) 当 $v_2 < -B$ 时

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(k_1 s_x v_0 t + m + m_f) + \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(m + m_f) \\ y(t) = d + Bt - A \ln(c_4' e^{2Bt/A} - 1) + A \ln(c_4' - 1) \\ x(t)|_{t=0} = 0 \\ y(t)|_{t=0} = d \end{cases},$$

其中 $A = \frac{m-m_f}{k_2 s_y}$, $B^2 = \frac{mg - \rho_w \varphi g}{k_2 s_y}$, $c_4' = \frac{v_2 - B}{v_2 + B}$, 其中 d 在所做的小实验中的值为 $d = 0.275$ 。

(3) 当 $v_2 = -B$ 时

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(k_1 s_x v_0 t + m + m_f) + \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(m + m_f) \\ y(t) = d - Bt \\ x(t)|_{t=0} = 0 \\ y(t)|_{t=0} = d \end{cases},$$

其中 d 在所做的小实验中的值为 $d = 0.275$ 。

六 模型的误差分析与检验模型的合理性

6.1 建立数学模型的误差分析

因为在建立模型把主要的因素考虑进去, 这些因素对模型的影响体现在微分方程中则为参数变量的微小扰动对微分方程的影响, 可以得到数学模型的误差限。

所建数学模型具有以下几个参数变量, 先对其参数进行误差分析^[4], 然后求

出所建数学模型的误差限 W ，之后再求出所建模型与观测数据的误差 R ，如果 $R \leq W$ ，则所建数学模型具有合理性。

(1) $m_f = \rho_w g \varphi$ ，分析得 m_f 的误差源为 $\Delta \varphi$ ，

$$|\Delta m_f| \leq \rho_w g |\Delta \varphi| = \rho_w \times g \times 10^{-6} \equiv m'.$$

(2) $A = \frac{m - m_f}{k_2 s_y}$ ，由此可分析 A 的误差源为 Δs_y ， Δm_f ，因此

$$|\Delta A| \leq \left| \frac{1}{k_2 s_y} \right| |\Delta m_f| + \frac{m - m_f}{k_2 s_y^2} |\Delta s_y| \leq (m' + 10^{-4}) \times \max \left\{ \left| \frac{1}{k_2 s_y} \right|, \frac{m - m_f}{k_2 s_y^2} \right\} \equiv a,$$

其中 $|\Delta s_y| = 10^{-4}$ 。

(3) $B = \sqrt{\frac{mg - \rho_w \varphi g}{k_2 s_y}}$ ，由此可分析得 B 的误差源为 Δs_y ，所以

$$|\Delta B| \leq \left| \frac{\partial B}{\partial s_y} \right| |\Delta s_y| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mg - \rho_w \varphi g}{k_2 s_y}} \frac{1}{s_y} |\Delta s_y| \leq 0.5 \times 10^{-4} \times \sqrt{\frac{mg - \rho_w \varphi g}{k_2 s_y}} \frac{1}{s_y} \equiv b.$$

(4) $v_2 = -\frac{m}{m + m_f} \sqrt{2gh}$ ，分析得 v_2 的误差源为 Δm_f

$$\begin{aligned} |\Delta v_2| &\leq \max \left\{ \frac{m \sqrt{2gh}}{(m + m_f)^2}, \frac{m}{(m + m_f) \sqrt{8gh}} \right\} \times (|\Delta m_f| + |\Delta h|) \\ &\leq \max \left\{ \frac{m \sqrt{2gh}}{(m + m_f)^2}, \frac{m}{(m + m_f) \sqrt{8gh}} \right\} \times (m' + 10^{-2}) \equiv e \end{aligned}$$

，其中 $|\Delta h| = 10^{-2}$

(5) (i) 当 $v_2 > -B$ 时, $c_4 = \frac{-v_2 + B}{v_2 + B}$

物体触底时 $y(t) = 0.275 + Bt - A \ln(1 + c_4 e^{\frac{2Bt}{A}}) + A \ln(1 + c_4) = 0$ ，

$$\text{解得时间为: 令 } T_d = \frac{(1 + c_4) e^{\frac{0.275}{A}} + \sqrt{[(1 - c_4) e^{\frac{0.275}{A}}]^2 - 4c_4}}{2c_4}$$

$$t_d = \frac{A}{B} \ln T_d,$$

$y(t) = 0.275 + Bt - A \ln(1 + c_4 e^{\frac{2Bt}{A}}) + A \ln(1 + c_4)$ ，分析得 $y(t)$ 的误差源为

ΔB 、 ΔA ，所以

$$|\Delta y(t)| \leq \max_{t \in [0, t_d]} \left\{ \left| t + \frac{2tc_4 e^{2Bt/A}}{1 + c_4 e^{2Bt/A}} \right|, \left| -\ln(1 + c_4 e^{2Bt/A}) - \frac{2Btc_4 e^{2Bt/A}}{A(1 + c_4 e^{2Bt/A})} + \ln(1 + c_4) \right| \right\} \times [b + a] \equiv F_1$$

$$x(t) = v_0 t - \frac{m + m_f}{k_1 s_x} \ln(k_1 s_x v_0 t + m + m_f) + \frac{m + m_f}{k_1 s_x} \ln(m + m_f), \text{ 分析得 } x(t) \text{ 的误差}$$

源为 Δm_f 、 Δs_x ，所以

$$\begin{aligned} |\Delta x(t)| &\leq (|\Delta m_f| + |\Delta s_x|) \times \max_{t \in [0, t_d]} \left\{ \left| \frac{1}{k_1 s_x} \ln \frac{m + m_f}{k_1 s_x v_0 t + m + m_f} + \frac{v_0 t}{k_1 s_x v_0 t + m + m_f} \right|, \right. \\ &\quad \left| \frac{m + m_f}{k_1 s_x^2} \ln \frac{k_1 s_x v_0 t + m + m_f}{m + m_f} - \frac{v_0 t(m + m_f)}{s_x (k_1 s_x v_0 t + m + m_f)} \right| \Big\} \\ &= [|m'| + 10^{-6}] \times \max_{t \in [0, t_d]} \left\{ \left| \frac{1}{k_1 s_x} \ln \frac{m + m_f}{k_1 s_x v_0 t + m + m_f} + \frac{v_0 t}{k_1 s_x v_0 t + m + m_f} \right|, \right. \\ &\quad \left| \frac{m + m_f}{k_1 s_x^2} \ln \frac{k_1 s_x v_0 t + m + m_f}{m + m_f} - \frac{v_0 t(m + m_f)}{s_x (k_1 s_x v_0 t + m + m_f)} \right| \Big\} \equiv E_1, \quad |\Delta s_x| = 10^{-4}, \end{aligned}$$

所以此时模型的误差限为 $W_1 \leq \max\{E_1, F_1\}$ 。

$$(ii) \text{ 当 } v_2 < -B \text{ 时, } c_4' = \frac{v_2 - B}{v_2 + B}$$

$$\text{物体触底时 } y(t) = 0.275 + Bt - A \ln(c_4' e^{2Bt/A} - 1) + A \ln(c_4' - 1) = 0,$$

$$\text{解得时间为: 令 } e^{Bt/A} = T_d' = \frac{(c_4' - 1)e^{\frac{0.275}{A}} + \sqrt{[(c_4' - 1)e^{\frac{0.275}{A}}]^2 + 4c_4'}}{2c_4'}, \quad t_d' = \frac{A}{B} \ln T_d'.$$

$y(t) = 0.275 + Bt - A \ln(-1 + c_4' e^{2Bt/A}) + A \ln(-1 + c_4')$ ，分析得 $y(t)$ 的误差源为 ΔB 、 ΔA ，所以

$$|\Delta y(t)| \leq \max_{t \in [0, t_d]} \left\{ \left| t - \frac{2tc_4' e^{2Bt/A}}{c_4' e^{2Bt/A} - 1} \right|, \left| \ln(-1 + c_4' e^{2Bt/A}) + \frac{2Btc_4' e^{2Bt/A}}{A(-1 + c_4' e^{2Bt/A})} - \ln(-1 + c_4') \right| \right\} \times [b + a] \equiv F_2$$

$$x(t) = v_0 t - \frac{m + m_f}{k_1 s_x} \ln(k_1 s_x v_0 t + m + m_f) + \frac{m + m_f}{k_1 s_x} \ln(m + m_f), \text{ 分析得 } x(t) \text{ 的误差}$$

源为 Δm_f 、 Δs_x ，所以

$$\begin{aligned}
|\Delta x(t)| &\leq (|\Delta m_f| + |\Delta s_x|) \times \max_{t \in [0, t_d]} \left\{ \left| \frac{1}{\overline{k_1 s_x}} \ln \frac{m + m_f}{\overline{k_1 s_x} v_0 t + m + m_f} + \frac{v_0 t}{\overline{k_1 s_x} v_0 t + m + m_f} \right| \right. \\
&\quad \left. \left| \frac{m + m_f}{\overline{k_1 s_x}^2} \ln \frac{\overline{k_1 s_x} v_0 t + m + m_f}{m + m_f} - \frac{v_0 t (m + m_f)}{s_x (\overline{k_1 s_x} v_0 t + m + m_f)} \right| \right\} \\
&= [m' + 10^{-6}] \times \max_{t \in [0, t_d]} \left\{ \left| \frac{1}{\overline{k_1 s_x}} \ln \frac{m + m_f}{\overline{k_1 s_x} v_0 t + m + m_f} + \frac{v_0 t}{\overline{k_1 s_x} v_0 t + m + m_f} \right| \right. \\
&\quad \left. \left| \frac{m + m_f}{\overline{k_1 s_x}^2} \ln \frac{\overline{k_1 s_x} v_0 t + m + m_f}{m + m_f} - \frac{v_0 t (m + m_f)}{s_x (\overline{k_1 s_x} v_0 t + m + m_f)} \right| \right\} \\
&\equiv E_2, \text{ 其中 } |\Delta s_x| = 10^{-4}
\end{aligned}$$

所以此时模型的误差限为 $W_1 \leq \max\{E_2, F_2\}$ 。

(iii) 当 $v_2 = -B$ 时,

$y(t) = 0.275 + Bt$, 分析得 $y(t)$ 的误差源为 ΔB

$$|\Delta y(t)| \leq \frac{d}{B} b \equiv F_3$$

$x(t) = v_0 t - \frac{m + m_f}{k_1 s_x} \ln(k_1 s_x v_0 t + m + m_f) + \frac{m + m_f}{k_1 s_x} \ln(m + m_f)$, 分析得 $x(t)$ 的误差

源为 Δm_f 、 Δs_x , 所以

$$\begin{aligned}
|\Delta x(t)| &\leq (|\Delta m_f| + |\Delta s_x|) \times \max_{t \in [0, \frac{d}{B}]} \left\{ \left| \frac{1}{\overline{k_1 s_x}} \ln \frac{m + m_f}{\overline{k_1 s_x} v_0 t + m + m_f} + \frac{v_0 t}{\overline{k_1 s_x} v_0 t + m + m_f} \right| \right. \\
&\quad \left. \left| \frac{m + m_f}{\overline{k_1 s_x}^2} \ln \frac{\overline{k_1 s_x} v_0 t + m + m_f}{m + m_f} - \frac{v_0 t (m + m_f)}{s_x (\overline{k_1 s_x} v_0 t + m + m_f)} \right| \right\} \\
&= [m' + 10^{-4}] \times \max_{t \in [0, \frac{d}{B}]} \left\{ \left| \frac{1}{\overline{k_1 s_x}} \ln \frac{m + m_f}{\overline{k_1 s_x} v_0 t + m + m_f} + \frac{v_0 t}{\overline{k_1 s_x} v_0 t + m + m_f} \right| \right. \\
&\quad \left. \left| \frac{m + m_f}{\overline{k_1 s_x}^2} \ln \frac{\overline{k_1 s_x} v_0 t + m + m_f}{m + m_f} - \frac{v_0 t (m + m_f)}{s_x (\overline{k_1 s_x} v_0 t + m + m_f)} \right| \right\} \\
&\equiv E_3, \text{ 其中, } |\Delta s_x| = 10^{-4},
\end{aligned}$$

所以此时模型的误差限为 $W_3 \leq \max\{E_3, F_3\}$ 。

利用 C++ 语言设计程序, 可以求得 $W_1 = 0.0361759$, $W_2 = 0.0372965$,

$W_3 = 0.0301973$ ，综上所述模型的误差限 $W = \max\{W_1, W_2, W_3\} = 0.0372965$ 。

6.2 验证数学模型

根据观测到的数据 $(x_c^n(t_n), y_c^n(t_n))$ 与 $(x(t_n), y(t_n))$ 的均方误差，来检验所建模型的合理性。

试验中观测到的坐标记为 $(x_c^1(t_1), y_c^1(t_1)), \dots, (x_c^n(t_n), y_c^n(t_n))$ ，其中 n 表示观测到的第 n 个数据。

$$(i) \text{ 当 } v_2 > -B \text{ 时, } c_4 = \frac{-v_2 + B}{v_2 + B}$$

根据: $y_c^1(t_1) = 0.275 + Bt - A \ln(1 + c_4 e^{2Bt/A}) + A \ln(1 + c_4)$,

$$\text{令 } e^{Bt_1/A} = \Gamma = \frac{(1 + c_4)e^{\frac{0.275 - y_c^1(t_1)}{A}} + \sqrt{[(1 + c_4)e^{\frac{0.275 - y_c^1(t_1)}{A}}]^2 - 4c_4}}{2c_4},$$

解得 $t_1 = \frac{A}{B} \ln \Gamma$, $t_n = 0.04(n-1)$, 其中 $A = \frac{m - m_f}{\overline{k_2 s_y}}$, $B^2 = \frac{mg - \rho_w \phi g}{\overline{k_2 s_y}}$, $c_4 = \frac{-v_2 + B}{v_2 + B}$ 。

根据下面的方程组解得所建模型对应观测时刻的位移 $(x^i(t_i), y^i(t_i))$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \frac{m + m_f}{\overline{k_1 s_x}} \ln(\overline{k_1 s_x} v_0 t + m + m_f) + \frac{m + m_f}{\overline{k_1 s_x}} \ln(m + m_f) \\ y(t) = 0.275 + Bt - A \ln(1 + c_4 e^{2Bt/A}) + A \ln(1 + c_4) \\ x(t)|_{t=0} = 0 \\ y(t)|_{t=0} = 0.275 \end{cases}$$

利用下式表示根据模型所得 $(x(t), y(t))$ 与观测数据 $(x_c(t), y_c(t))$ 的误差 R_1 ,

$$R_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (|x^i(t_i) - x_c^i(t_i)|^2 + |y^i(t_i) - y_c^i(t_i)|^2)}{n}。$$

$$(ii) \text{ 当 } v_2 < -B \text{ 时, } c_4^1 = \frac{-v_2 + B}{-v_2 - B}$$

$$y_c^1(t_1') = 0.275 + Bt - A \ln(-1 + c_4^1 e^{2Bt_1'/A}) + A \ln(-1 + c_4^1),$$

$$\text{令 } e^{Bt_1'/A} = \Gamma' = \frac{(-1 + c_4^1)e^{\frac{0.275 - y_c^1(t_1')}{A}} + \sqrt{[(-1 + c_4^1)e^{\frac{0.275 - y_c^1(t_1')}{A}}]^2 + 4c_4^1}}{2c_4^1}, \quad t_1' = \frac{A}{B} \ln \Gamma'$$

根据下面的方程组解得所建模型对应观测时刻的位移 $(x^n(t'_n), y^n(t'_n))$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(\overline{k_1 s_x v_0 t + m + m_f}) + \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(m+m_f) \\ y(t) = 0.275 + Bt - A \ln(-1 + c_4' e^{2Bt/A}) + A \ln(-1 + c_4') \\ x(t)|_{t=0} = 0 \\ y(t)|_{t=0} = 0.275 \end{cases},$$

其中 $A = \frac{m-m_f}{k_2 s_y}$, $B^2 = \frac{mg - \rho_w \varphi g}{k_2 s_y}$, $c_4' = \frac{-v_2 + B}{-v_2 - B}$ 。

利用下式表示根据模型所得 $(x(t'), y(t'))$ 与观测数据 $(x_c(t'), y_c(t'))$ 的误差 R_2 ,

$$R_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (|x^i(t'_i) - x_c^i(t'_i)|^2 + |y^i(t'_i) - y_c^i(t'_i)|^2)}{n}$$

(iii) 当 $v_2 = -B$ 时, $t'_1 = \frac{0.275 - y_c^1(t'_1)}{B}$ 。

根据下面的方程组解得所建模型对应观测时刻的位移 $(x^i(t''_i), y^i(t''_i))$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(k_1 s_x v_0 t + m + m_f) + \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(m+m_f) \\ y(t) = 0.275 - Bt \\ x(t)|_{t=0} = 0 \\ y(t)|_{t=0} = 0.275 \end{cases}$$

我们利用下式表示根据模型所得 $(x(t), y(t))$ 与观测数据 $(x_c(t), y_c(t))$ 的误差 R_3 ,

$$R_3 = \frac{\sum_{i=1}^n (|x^i(t''_i) - x_c^i(t''_i)|^2 + |y^i(t''_i) - y_c^i(t''_i)|^2)}{n}$$

$R = \max\{R_1, R_2, R_3\}$ 为所建模型与观测数据的均方误差。若 $W \geq R$, 则说明建立的数学模型合理。

随机选取了大实心方砖为例通过计算机得到的关于 (W_1, W_2, W_3) 和 (R, R', R'') 的情况如表 1-1、1-2, 有表中数据可知 $R = 0.006747$, $W = 0.0372965$, 显然 $W \geq R$, 模型是合理的, 其它试件的计算数据详见附表。

表 1-1 大实心方砖均方误差

速度	投放方式	高度		
		0	0.05	1.12
0.34	平放	0.001566	0.002107	0.002113
	立放	0.001302	0.001063	0.001523
	竖放	0.001439	0.001882	0.002859
0.4	平放	0.002431	0.001359	0.002075
	立放	0.002182	0.001	0.001126
	竖放	0.005259	0.001748	0.002544
0.47	平放	0.002524	0.001349	0.001998
	立放	0.002448	0.000835	0.001732
	竖放	0.002222	0.001784	0.002945
0.55	平放	0.004984	0.003018	0.002924
	立放	0.00245	0.001281	0.001298
	竖放	0.006747	0.001623	0.002739

表 1-2 大实心方砖稳态误差

速度	投放方式	高度		
		0	0.02	1.12
0.34	平放	(0.0106868, 0.0251363)	(0.0164187, 0.0343819)	(0.0161273, 0.0321065)
	立放	(0.0195204, 0.0361759)	(0.0239937, 0.0372965)	(0.0226749, 0.0301973)
	竖放	(0.0253688, 0.0329123)	(0.0327531, 0.0372965)	(0.0371483, 0.0301973)
0.4	平放	(0.0125643, 0.0151363)	(0.0184703, 0.0343819)	(0.0178628, 0.0321065)
	立放	(0.0212572, 0.0104541)	(0.0302171, 0.0372965)	(0.0335154, 0.0301973)
	竖放	(0.0367399, 0.0371545)	(0.0326786, 0.0372965)	(0.0348264, 0.0301973)
0.47	平放	(0.0100321, 0.0271545)	(0.0106853, 0.0343819)	(0.0191493, 0.0321065)
	立放	(0.0255497, 0.0314116)	(0.0275107, 0.0372965)	(0.0241475, 0.0301973)
	竖放	(0.0352668, 0.0271545)	(0.0351183, 0.0372965)	(0.0262096, 0.0301973)
0.55	平放	(0.0126554, 0.0271545)	(0.0132803, 0.0343819)	(0.0123602, 0.0321065)
	立放	(0.0251034, 0.0278484)	(0.0245935, 0.0372965)	(0.0150564, 0.0301973)
	竖放	(0.028477, 0.0261759)	(0.0270181, 0.0372965)	(0.0178756, 0.0301973)

6.3 根据模型找出最有效触底位置

根据我们的数学模型让堵口重物恰好在最有效位置触底的理想猜想点为：

$$(i) \text{ 当 } v_2 > -B \text{ 时, } c_4 = \frac{-v_2 + B}{v_2 + B},$$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(\bar{k}_1 s_x v_0 t + m + m_f) + \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(m + m_f) \\ y(t) = d + Bt - A \ln(1 + c_4 e^{2Bt/A}) + A \ln(1 + c_4) \\ x(t)|_{t=0} = 0 \\ y(t)|_{t=0} = d \end{cases},$$

$$\text{令 } e^{Bt_d/A} = T_d = \frac{(1+c_4)e^{\frac{d}{A}} + \sqrt{[(1+c_4)e^{\frac{d}{A}}]^2 - 4c_4}}{2c_4},$$

$$\text{解得 } t_d = \frac{A}{B} \ln T_d,$$

$$\text{则 } x_d = x(t_d) = v_0 t_d - \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(\bar{k}_1 s_x v_0 t_d + m + m_f) + \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(m + m_f)。$$

即需在离最有效位置触底的水平距离为 x_d ，且满足 $h < \frac{B^2(m+m_f)^2}{2gm^2}$ 的位置

投放物体才能够在最有效位置触底。

$$(ii) \text{ 当 } v_2 < -B \text{ 时, } c'_4 = \frac{-v_2 + B}{-v_2 - B}$$

根据下述方程组可解得触底的时间 t'_d ：

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(\bar{k}_1 s_x v_0 t + m + m_f) + \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(m + m_f) \\ y(t) = d + Bt - A \ln(-1 + c'_4 e^{2Bt/A}) + A \ln(-1 + c'_4) \\ x(t)|_{t=0} = 0 \\ y(t)|_{t=0} = d \end{cases},$$

$$\text{其中 } A = \frac{m-m_f}{k_2 s_y}, \quad B^2 = \frac{mg - \rho_w \varphi g}{k_2 s_y}, \quad c'_4 = \frac{-v_2 + B}{-v_2 - B}$$

$$\text{令 } e^{Bt'_d/A} = T'_d = \frac{(-1+c'_4)e^{\frac{d}{A}} + \sqrt{[(-1+c'_4)e^{\frac{d}{A}}]^2 + 4c'_4}}{2c'_4},$$

$$\text{解得 } t'_d = \frac{A}{B} \ln T'_d。$$

要想在最有效位置触底，需满足：

$$x'_d = x(t'_d) = v_0 t'_d - \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(\bar{k}_1 s_x v_0 t'_d + m + m_f) + \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(m + m_f)$$

即需离最有效位置触底的水平距离为 x'_d ，且满足 $h > \frac{B^2(m+m_f)^2}{2gm^2}$ 的位置投放物体才能够在最有效位置触底。

(iii) 当 $v_2 = -B$ 时

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(k_1 s_x v_0 t + m + m_f) + \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(m + m_f) \\ y(t) = d - Bt \\ x(t)|_{t=0} = 0 \\ y(t)|_{t=0} = d \end{cases}$$

解得触底时的时间为： $t = \frac{d}{B}$ ，

$$x'_d = v_0 \frac{d}{B} - \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(k_1 s_x v_0 \frac{d}{B} + m + m_f) + \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(m + m_f)$$

即需在水平位移为 $x'_d = v_0 \frac{d}{B} - \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(k_1 s_x v_0 \frac{d}{B} + m + m_f) + \frac{m+m_f}{k_1 s_x} \ln(m + m_f)$ ，

且满足 $h = \frac{B^2(m+m_f)^2}{2gm^2}$ 时投放物体才能够在最有效的地点触底。

我们可以通过以下几种新试验来验证上述猜想：

(1) 分别对 $v_2 > -B$ ， $v_2 < -B$ ， $v_2 = -B$ 的三种情况进行一个测试试验，测试试验的结果（包括触底时间、触底时水平位移值）是否满足对应的公式。

(2) 分别针对 $v_2 > -B$ ， $v_2 < -B$ ， $v_2 = -B$ 三种情况的高度限制条件做一次试验，测试不满足高度限制的投放点是否能达到预定的触底位置，是否满足各自高度限制的投放点进行的试验能够得到预期的效果。

七 模型的相似性与应用

7.1 模型的相似性

本题所提及的小型试验：

(1) 满足几何相似，由于试验是对真实情况的模拟，因此试验模型和原型的对应线形长度的比值为一定常数，即试验模型为原型的缩影。不满足运动相似在实际的河流堤坝溃口，水在 x 、 y 两个方向速度和河流的堤岸、地理位置等客观环境相关，并且河流真实的水流速度不可能保持恒定，例如越接近溃口则水流的速度越大。

(2) 满足重力相似准则（弗劳德准则），在试验中的模型和真实情况下使

用的原型具有相同的密度，因此满足重力相似准则。

依据相似准则的原理，要使得实验模型可以准确无误的推广到实际情况中，必须使得二者的满足更多的相似准则。因此，要使得本模型在实际应用中得到推广使用，实际应用模型所处的环境和本模型的假设环境应满足相似准则。可以从两方面做到：

1、实际环境适应试验环境：在实际应用中使得现实环境满足本模型试验假设的环境，比如在实际应用中使用本模型中使用的各种形状，有相同的水流环境等。这是不符合实际情况的。

2、试验环境模拟实际环境：即对模型的试验环境加以修改，使得试验环境和实际溃口处的环境满足更多的相似性准则。

未来要进行的试验主要分为两部分：首先是不断对本模型的试验环境进行改进，使之更符合实际应用环境，提高模型的健壮性和稳定性；其次是在实际环境中逐步应用本实验模型，明确模型的缺点和局限性，进而加以改进。

7.2 模型的应用

溃口几何形状及水流速度与小型试验相似，因而可以在此环境下使用本模型。

假设使用正方形的实验模型封堵溃口。设正方形的边长为 a 。则由 $a^3 \times \rho = m$ 可以求得边长为 $0.8672m$ 。根据已知条件和前文公式，可求得 $V_2 = -4.3641$ ， $A = 1.074$ ， $B = 3.2442$ ， $C_4 = 6.7937$ 。根据（4.8）式可求得重物触底的时间，然后利用（4.9）式求得该时刻的水平位移。

以下用 $X_{(d,v)}$ 表示根据本模型求得的水平位移值，其中 d 表示水深，分别可以取 3 和 4， v 表示水流速度，分别可以取 4 和 5。则结果如下：

$$X_{(3,4)} = 1.242608$$

$$X_{(3,5)} = 1.756905$$

$$X_{(4,4)} = 1.981767$$

$$X_{(4,5)} = 2.761079$$

即当溃口水深分别为 $3m$ 和 $4m$ ，溃口流速为 $4m/s$ 和 $5m/s$ ，投放高度距水面 $2m$ 时应分别在距预定位置的水平距离分别为 $1.242608m$ 、 $1.756905m$ 、 $1.981767m$ 、 $2.761079m$ 放才能使重物沉底到预定位置（本问题的求解程序见附件）。

八 模型的评价与改进

本文围绕封堵溃口的重物落水后运动规律的问题，从重物落水后的受力分析出发，结合原题提供的实时数据，通过对模型的不断改进，建立了通用的重物落水后的运动模型，并对此模型做了稳定性分析和均值误差分析来验证模型的合理性与准确性。

本模型是在对特定重物受力分析的基础上，结合给定的实验数据建立起来的微分方程模型，并将该模型推广，给出了该模型通用的解析解，得到的模型准确，

结论可靠，具有普遍意义和适用性。文中对模型进行了必要的误差分析，从理论上和数值上都证明了其有效性。

同时，模型也存在一定的局限性与不完整性。在模型的建立过程中，模型要求的环境较为苛刻，不符合实际情况，在实际应用中得到推广还有待改进。同时，在模型的建立过程中，没有考虑所有的影响因素，比如在重物落水时会产生水波，空泡等，它们都会对重物的运动规律产生一定的影响，因此在空间坐标系 $X-Y-Z$ 下， Z 轴为过原点垂直于 $X-Y$ 平面的直线。考虑重物从高度 h 处落下，进入水速为 (u, w) ，其中 u ， w 为在 x 轴， y 轴方向上的点流速， p 为动水压强， ν 为运动粘性系数，可建立如下偏微分方程^[5]，来更准确描述这一现象：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - g \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ m \frac{dv_x}{dt} = \overline{k_1} s_x (v_x - u)^2 \\ m \frac{dv_y}{dt} = mg - \overline{k_2} s_y (v_y - v)^2 \end{cases}$$

由于时间限制，本文只给出偏微分方程模型，不再求解。

参考文献

- [1]宣建明、陈九锡, 锥和球形头部物体的垂直入水计算, 水动力学研究与进展, A 辑第 6 卷第 1 期: 26-32, 1991 年 3 月。
- [2]陈福, 结构入水问题的流固耦合仿真分析, 中国期刊网中国优秀硕士学位论文全文数据库, 2010 年 9 月 18 日。
- [3]庞启秀, 水流作用下块体受力试验研究, 中国期刊网中国优秀硕士学位论文全文数据库, 2010 年 9 月 18 日。
- [4]张飞猛、战延谋、周刚峰、陈万玉、焦军, 声学力靶弹着点测试数学模型与误差分析, 应用声学, 第 25 卷第 4 期: 252-257, 2006 年 7 月。
- [5]陈占晖、卢永锦, 高速运动物体砰击水面后的动力学特性研究, 船舶工程, 总第 31 卷第 3 期: 62-65, 2009 年 12 月 31 日。