

参赛密码 _____
(由组委会填写)

全国第八届研究生数学建模竞赛

学 校	南京师范大学
参赛队号	10319002
队员姓名	1. 梅书原
	2. 李啸芳
	3. 纪海峰

参赛密码 _____
(由组委会填写)

全国第八届研究生数学建模竞赛



题 目 吸波材料与微波暗室问题的数学模型

摘 要：

关于尖劈形状吸波体的性能分析这一问题的求解，我们首先考虑较为简单的二维情形，光线的反射只是沿着 yOz 平面传播，此时我们建立入射波线在一个尖劈几何空缺间反射过程的数学模型，得到了辐射强度 p_i 与 p_{i+1} 的递推公式。在此基础上，求出了反射波的辐射强度、最终反射方向与已知反射率及诸几何参数之间的定量关系，也给出了如何确定反射次数的具体公式。然后考虑三维情形，我们通过投影转化和分解的思想，将光波和尖劈分别向 yOz 平面和 xOy 两个平面投影，转化为二维情形，我们得出了在两个投影平面的初始入射角公式，利用二维模型的结果刻画了三维空间中反射情况。我们进一步编制了 *Matlab* 程序，绘制出了三维反射光线图，证实了三维情形与二维情形一致。

关于暗室性能的分析这个问题，我们首先建立了面到面的辐射模型，导出辐射公式，然后把这些公式应用到本题目中，算出间接辐射通量和直接辐射通量的比值 γ ，再用 *Matlab* 进行数值计算，得到如下结论：当 $\rho = 0.5$ 时，不符合要求；当 $\rho = 0.05$ 时， γ 的取值范围是 $(0.014, 0.017)$ ，并且当 P 点处于圆弧中点处的时候 γ 取最小值，因此这种反射率可以达到仿真要求。我们还建立了微波暗室的积分方程模型，由于模型较为复杂，我们将模型进行了简化，数值计算结果与前述模型的结果稍有不同，进一步验证上述结果的合理性。

关键词：吸波材料；微波暗室；余弦辐射体；辐射强度

一、尖劈形状吸波体的研究

1 问题重述

尖劈形状吸波体及其坐标系如图 1 所示，尖劈的长度沿 x 方向为无限长，其他尺寸记号同图 2。由射向角 θ （ z 轴正向与入射线负方向的夹角）和方位角 φ （ x 轴正向与射线在 xOy 平面上投影的夹角）确定入射波线的方向，试建立入射波线在一个尖劈几何空缺间反射过程的数学模型，即分别刻画最终反射波线的方向，反射次数，反射波的辐射强度与已知反射率、诸几何参数之间的定量关系。

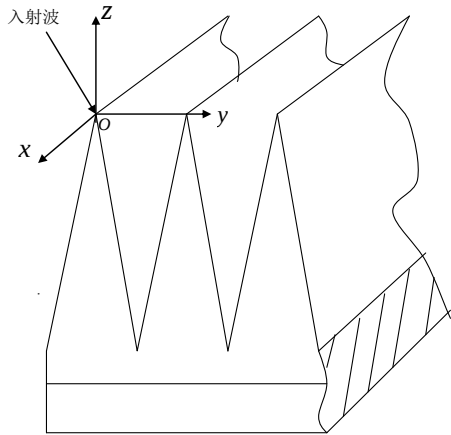


图 1

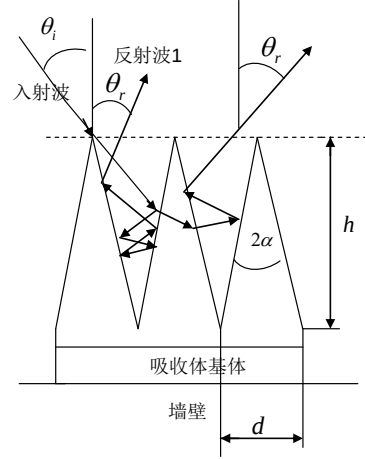


图 2

2 问题假设

- 1) 波在两种不同介质界面处只有反射，不考虑边缘处的绕射，以及波的内射。
- 2) 尖劈材料的电性能参数各处均匀，垂直入射的反射率为 ρ ，斜入射时的反射率满足前述的余弦法则，设入射波线的辐射强度为 1 单位。

3 问题的分析及求解

3.1 问题分析

根据题意，问题一可以归纳为如下数学模型

$$\begin{cases} B_r = f(\alpha, \theta, \varphi, h, d) \\ m = g(\alpha, \theta, \varphi, h, d) \\ \rho = y(\alpha, \theta, \varphi, h, d) \end{cases}$$

其中 B_r 为射出角， m 为反射的次数， ρ 为反射后的辐射强度， $f(\alpha, \theta, \varphi, h, d)$ ， $g(\alpha, \theta, \varphi, h, d)$ ， $y(\alpha, \theta, \varphi, h, d)$ 分别为关于 $\alpha, \theta, \varphi, h, d$ 的函数。

3.2 二维光线反射模型

3.2.1 递推关系和通项公式

光线在 yOz 平面内的反射情形，如下图所示，第 i 次反射光线与斜面交于 M_i 点，光线与斜面上半部分夹角为 β_i ，反射点与 O 点的距离为 OM_i 。

当 $\beta_i \geq 90^\circ$ 时，如图 3，得到如下递推关系

$$\begin{cases} \beta_{i+1} = \beta_i + 2\alpha \\ |OM_{i+1}| = \frac{|OM_i| \sin \beta_i}{\sin \beta_{i+1}} \\ P_{i+1} = P_i \rho \sin \beta_i \end{cases}$$

当 $\beta_i \leq 90^\circ$ 时，如图 4，同样有

$$\begin{cases} \beta_{i+1} = \beta_i + 2\alpha \\ OM_{i+1} = \frac{|OM_i| \sin \beta_i}{\sin \beta_{i+1}} \\ P_{i+1} = P_i \rho \sin \beta_i \end{cases}$$

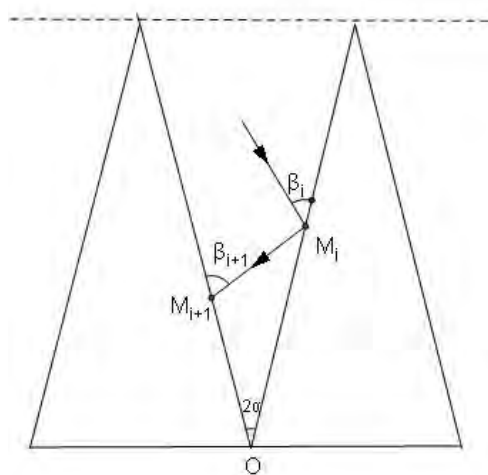


图 3

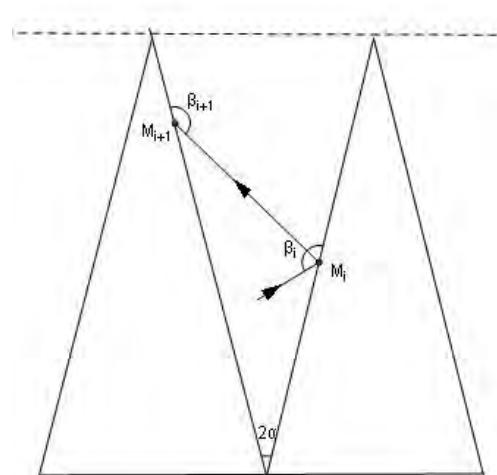


图 4

给定 β_1 , $|OM_1|$, P_1 , 由上述公式得到第 m 次的通项公式如下

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_m = \beta_1 + 2(m-1)\alpha = \theta + (2m-1)\alpha \dots\dots\dots(1) \\ |OM_m| = |OA_{m-1}| \frac{\sin \beta_{m-1}}{\sin \beta_m} \\ \quad = |OM_1| \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_3} \cdot \dots \cdot \frac{\sin \beta_{m-2}}{\sin \beta_{m-1}} \cdot \frac{\sin \beta_{m-1}}{\sin \beta_m} \\ \quad = |OM_1| \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_m} \dots\dots\dots(2) \\ P_m = \frac{P_m}{P_{m-1}} \cdot \frac{P_m}{P_{m-1}} \cdot \dots \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot P_1 \\ \quad = \rho^m \sin \beta_m \cdot \sin \beta_{m-1} \cdot \sin \beta_2 \cdot \sin \beta_1 \dots\dots\dots(3) \end{array} \right.$$

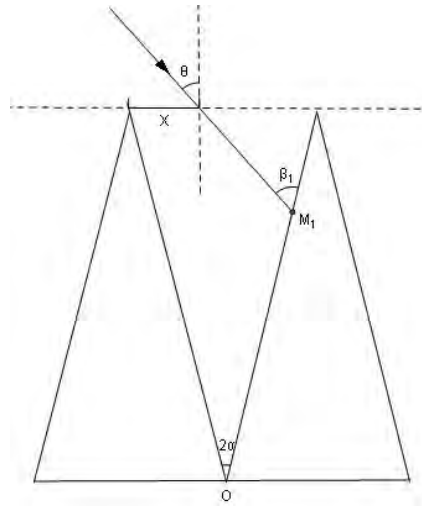


图 5

根据上图中几何关系得到 β_1 , OM_1 , P_1

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \theta - \alpha \\ |OM_1| = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\theta + \alpha)} \cdot \frac{h}{\cos \alpha} + \frac{x \cos \theta}{\sin(\theta + \alpha)} \\ P_1 = \rho \end{array} \right.$$

3.2.2 反射次数的判别

当 $|OM_m| \geq \frac{h}{\cos \alpha}$ 时, 表示光线的反射点不在斜面上, 由此确定光线的反射次数。

令

$$\begin{aligned}
\eta &= |OM_m| \Big/ \frac{h}{\cos \alpha} \\
&= \left(\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\theta + \alpha)} \bullet \frac{h}{\cos \alpha} + \frac{x \cos \theta}{\sin(\theta + \alpha)} \right) \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin(\theta + (2m-1)\alpha)} \Big/ \frac{h}{\cos \alpha} \\
&= \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\theta + (2m-1)\alpha)} + \frac{x \cos \theta \cos \alpha}{h \sin(\alpha + (2m-1)\alpha)} \\
&= \frac{1}{\sin(\theta + (2m-1)\alpha)} \left(\sin(\theta - \alpha) + \frac{x \cos \theta \cos \alpha}{h} \right)
\end{aligned}$$

若满足 $\eta \geq 1$ 这个三角不等式的最小正整数 m ，则反射次数为 $m-1$ 。

3.2.3 特殊光线的反射次数、最终反射光线的方向、辐射强度的确定

当 $x=0$ ，用入射光线过顶点，出射光也恰好过顶点时候，即临界情况来验证上述公式。在这种情况下，存在 m ，使得 $\eta=1$ 。

①恰好在尖劈空缺间反射一次的情形，如图 6

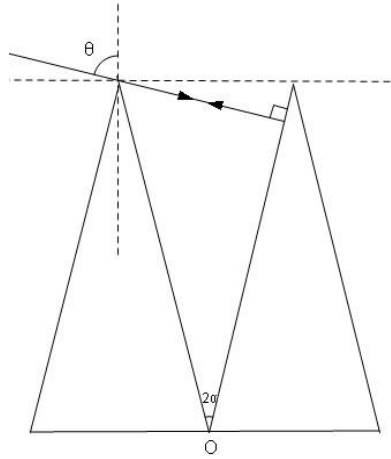


图 6

根据几何关系，算出 $\theta = 90^\circ - \alpha$ ，

②恰好在尖劈空缺间反射两次情形，如图 7

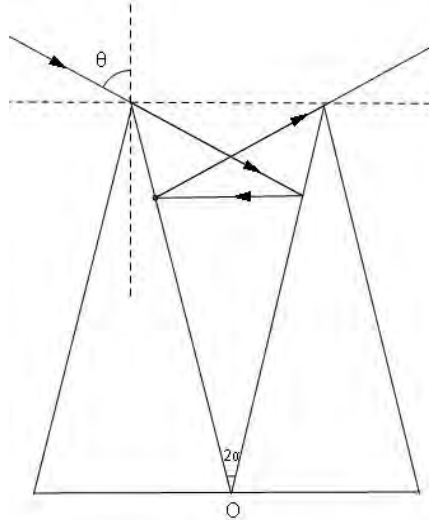


图 7

根据算出 $\theta = 90^\circ - 2\alpha$

③恰好在尖劈空缺间反射三次的情形, 如图 8

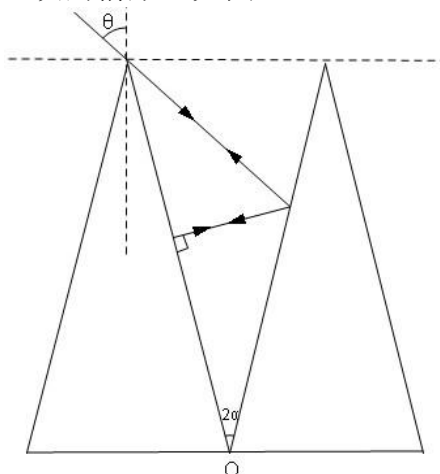


图 8

算出 $\theta = 90^\circ - 3\alpha$

④最后归纳猜想出, 当 $\theta = 90^\circ - k\alpha$ 时, 光线恰好在尖劈空缺间恰好反射了 k 次。

由计算得到在这种情况下 $\eta = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\theta + (2m - 1)\alpha)}$

把 $\theta = 90^\circ - k\alpha$ 代入 η 表达式, 即 $\eta = \frac{\sin(90^\circ - k\alpha - \alpha)}{\sin(90^\circ + (2m - k - 1)\alpha)}$,

当 $m = k + 1$ 时候, $\eta = 1$, 表明反射次数是 k 。这样就验证了归纳猜想的合理性, 在后文中我们将用 *Matlab* 仿真进一步验证此结论的正确性。

⑤最终反射次数 m 与 θ 的函数表达式

在 $x=0$ 的大前提下, 固定尖劈角 2α 的情况下, 射向角 θ 变动的前提下, 我们有如下结果

$$m(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \geq 90^\circ - \alpha \\ 2, & 90^\circ - 2\alpha \geq \theta > 90^\circ - \alpha \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ n, & 90^\circ - n\alpha \geq \theta > 90^\circ - (n-1)\alpha \end{cases} \quad (4)$$

⑥给定 θ, α ，就能用公式确定反射次数 n ，由公式(1)就确定了 β_n ，而最终反射角 θ_n 和 β_n 总有 $\cos \theta_n = \sin \beta_n$ ，也就确定了最终反射角的方向，最终反射。

⑥经过第 i 个反射点反射出来的光线辐射强度 I 的公式为

$$I = \rho^i \sin(\theta + \alpha) \sin(\theta + 3\alpha) \cdots \sin(\theta + (2i - 1)\alpha)$$

3.2.4 结果分析

根据模型直接用 *Matlab* 仿真来验证是否与上面的理论分析相吻合

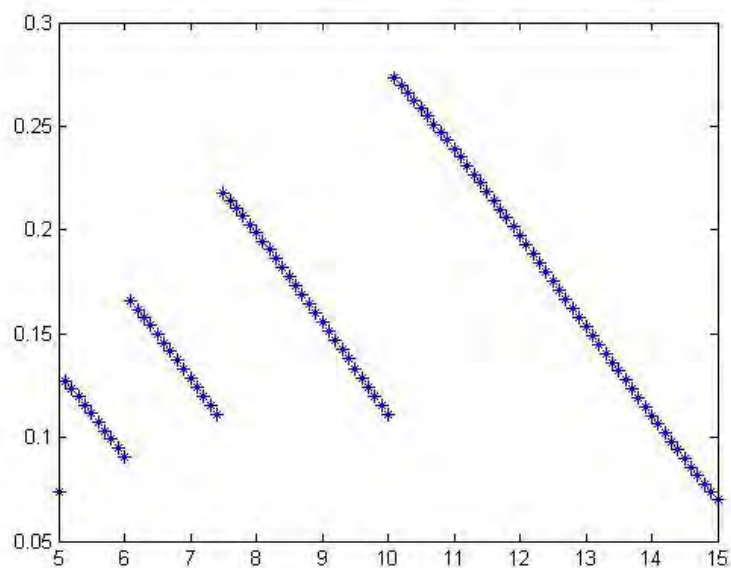


图 9 辐射强度与 α 关系图

当 $\theta = 60^\circ$ ， α 从 5° 到 15° 变化时，辐射强度与 α 关系如图 9，辐射强度随着 α 的增大时，总体上增大，局部递减。

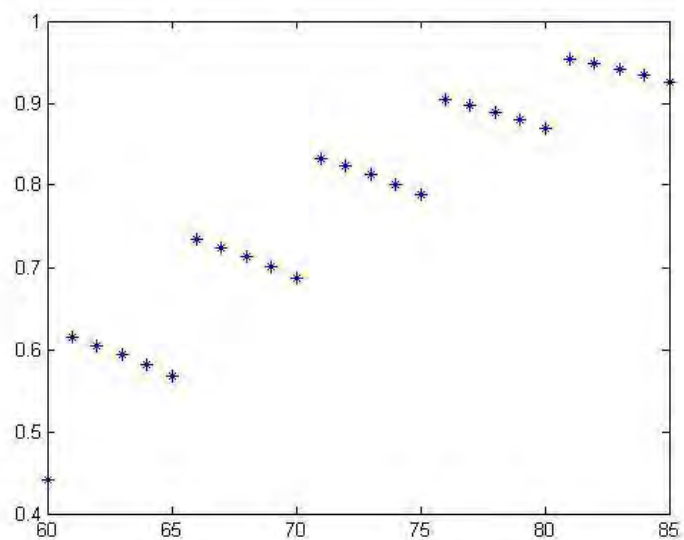


图 10 辐射强度与 θ 关系图

当 $\alpha = 5^\circ$ ， θ 从 60° 到 85° 变化时从图中看出当 θ 变大时，辐射强度总体递增，局部递减，由图像看出每段正好是 5° ，即 α 的度数，这跟理论分析得到的公式

相吻合。

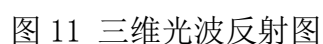
3.3.1 总体思路

3.3.2 具体分析

投影到 xOy 平面上, 投影光线与 x 轴夹角 $\theta = \varphi$, 此时 φ 即为 xOy 平面内的入射角。

3.3.3 模型检验

Matlab 绘制 $\varphi = 60^\circ, i = 30^\circ, \alpha = 10^\circ$ 三维图像如下



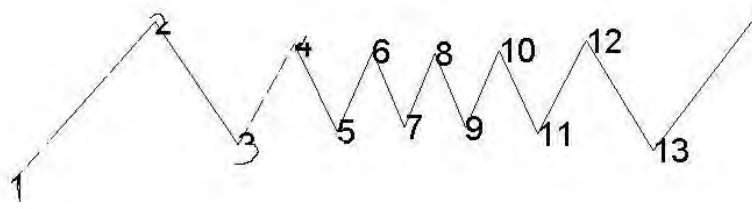


图 12 xOy 面投影图

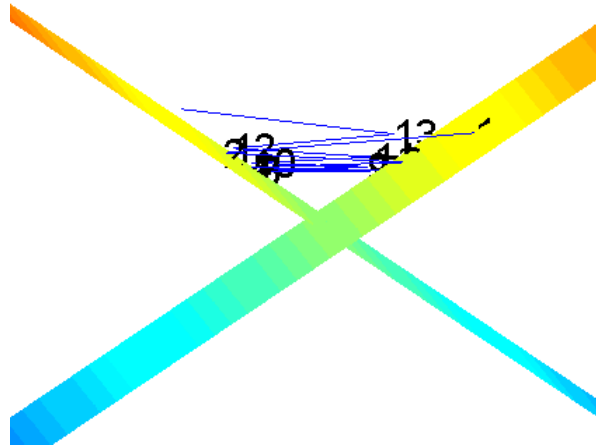


图 13 yOz 面投影图

当 α 固定, θ, φ 变化时, 辐射强度与 α, φ 的关系图如下:

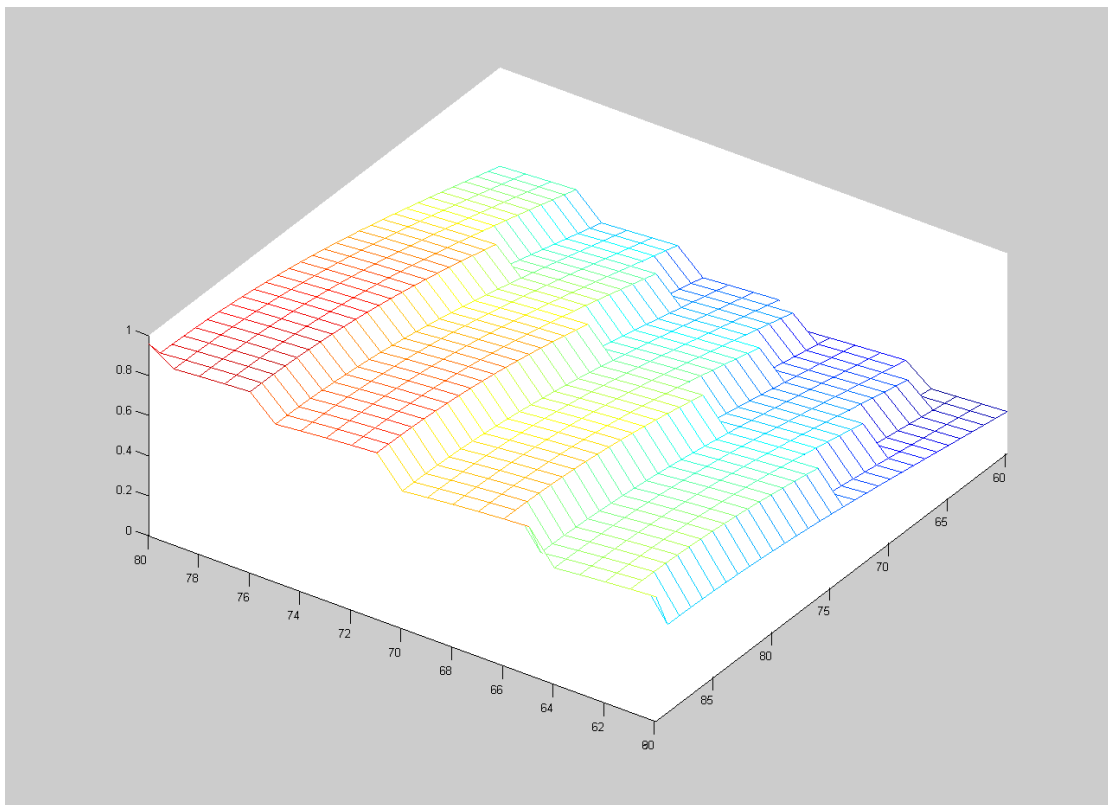


图 14

图 14 为 $\alpha = 5^\circ$ ， θ 从 60° 到 80° 变动， φ 从 60° 到 90° 变动，辐射强度变化分布图，由此图可以看出呈现出阶梯形状，与模型吻合。

当 θ 固定， α, φ 变化时，辐射强度与 α, φ 的关系图如下：

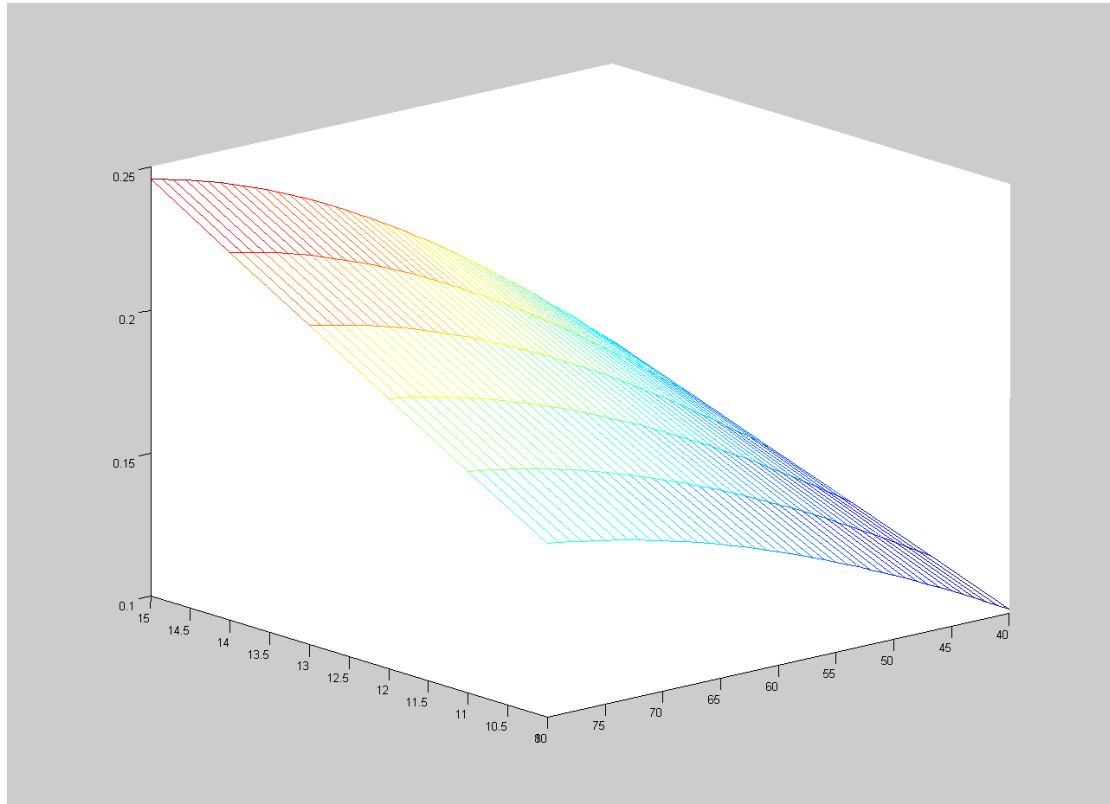


图 15

图 15 为 $\theta = 60^\circ$ ， α 从 10° 到 15° 变动， φ 从 40° 到 80° 变动，辐射强度变化分布图。当 α 和 θ 都变大时，辐射强度变大，与实际情况符合。

二、微波暗室的性能研究

1 问题重述

在微波暗室里，目标模拟器安装在靠近一面墙的中心水平面内，目标模拟器在圆弧线上从左端开始，以匀角速运动到右端，圆弧线对两边的墙处于对称位置，各天线轴线对准圆心，前后共 4 秒，视在天线中心轴线对准静区中心，中心轴线处的发射功率强度随时间线性增大，结束时比初始时增大了一倍。设暗室的宽 $B=18$ ，高 $H=14$ ，长 $L=15$ ， $b=1$ ，线阵列的圆弧半径 $R=14$ ，单位均为米。所有墙面铺设同一规格的吸波体（上述数据均从吸波体的顶端平面算起）。如下图所示，暗室右端中心的 $s \times s$ 的小方块面积处是安置导引头的部位，称为“静区”。静区从诸墙面得到的反射信号的功率之和与从信号源直接得到的微波功率之比 γ ，设 $s=0.3\text{m}$ 。若 γ 满足 $\gamma \leq 0.03$ 则该仿真满足技术要求。

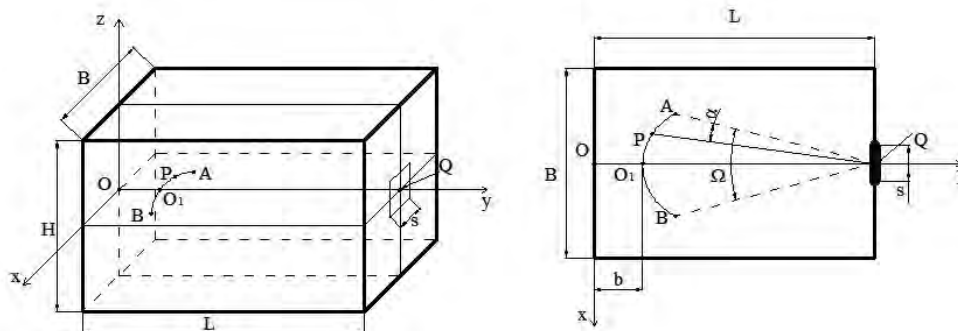


图 1

若暗室铺设平板形吸波材料，其垂直反射率 $\rho = 0.50$ ，判断这样的微波暗室能否满足仿真技术要求？在此弹目相对运动过程中，何时的 γ 值最小？

若暗室改为铺设尖劈形吸波材料，为 $\rho = 0.05$ （相当于尖劈形吸波体被换成另一种吸波性能更好材料的平板形吸波体的垂直反射率），这样的暗室是否能满足仿真技术要求？何时的 γ 值最小？

2 问题假设

- 1) 视在天线发射功率强度分布满足余弦辐射体；
- 2) 只考虑所有墙面对辐射的反射，不计入墙面的散射；
- 3) 不计入模拟器的天线及其安装支架，以及导引头本身对辐射的影响；

3 问题的分析求解

3.1 面到面的辐射模型

3.1.1 公式推导

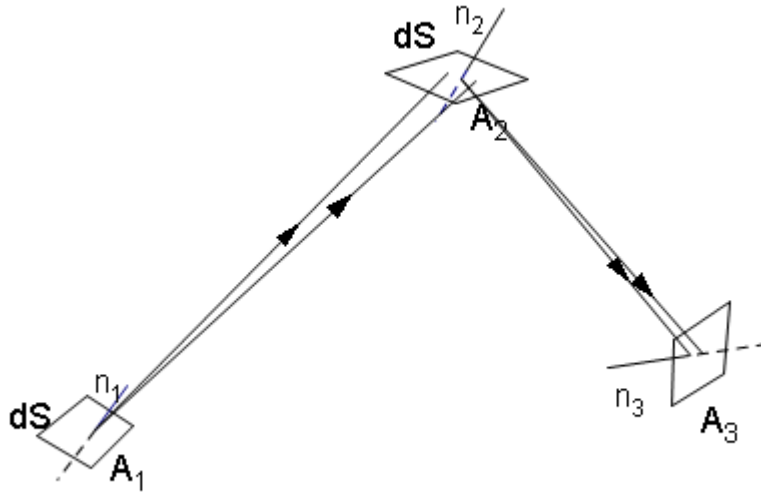


图 2

如图 2，光波从余弦发射体 A_1 辐射到 A_2 面，再经过 A_2 面反射到 A_3 面， A_1 法线方向的辐射强度 I_{A_1} ，

A_2 面微元的照射度

$$E_{A_2} = \frac{I_{A_1} \cos \langle n_1, A_1 A_2 \rangle \cos \langle n_2, A_2 A_3 \rangle}{|A_1 A_2|^2}$$

A_2 面的照射度

$$M = \rho E_{A_2}$$

A_2 面微元因为反射造成的沿法线方向的辐射强度

$$I_{A_2} = \frac{E_{A_2} \rho}{2\pi}$$

A_3 面得到的辐射照度

$$E_{A_3} = \int_{A_2} \frac{I_{A_2} \cos \langle n_2, A_2 A_3 \rangle \cos \langle n_3, A_2 A_3 \rangle}{|A_2 A_3|^2} ds$$

A_3 面接受到的辐射通量

$$\Phi = \int_{A_3} E_{A_3} ds = \int_{A_1} \left(\int_{A_2} \frac{E_{A_2} \rho \cos \langle n_2, A_2 A_3 \rangle \cos \langle n_3, A_2 A_3 \rangle}{|A_2 A_3|^2} \cdot 2\pi ds \right) ds$$

3.1.2 间接辐射通量和直接辐射通量的比值

首先，计算静区直接得到的辐射通量。如图 3， P 点为余弦辐射体，静区范围为 Q ，则静区直接受到的辐射通量

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_s \frac{I_0 \cos \beta}{|PQ|^2} ds \\ &= \int_{-0.15}^{0.15} \int_{-0.15}^{0.15} \frac{I_0 \cos \beta}{x^2 + (1-15)^2 + z^2} dx dz \end{aligned}$$

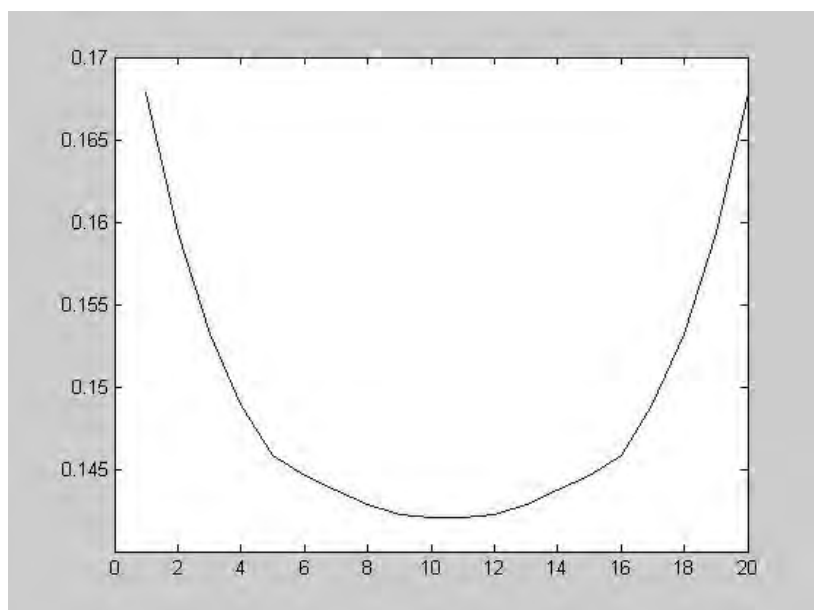


图 4

显然，在这种情况下，第一次反射就不符合暗室要求。由图 4 可以看出，时间在中间点，即 $\theta = 0^\circ$ ， P 点处于圆弧中点处的时候 γ_1 最小。

②当 $\rho = 0.05$ 时， γ_1 和时间 t 的关系如图 5，横坐标时间 4 秒时分成 20 份，纵坐标是 γ_2 的值。从图中的表格很容易读出 γ_1 的取值范围是 $\gamma_1 \in (0.014, 0.017)$ 。 $(\gamma_1)_{\max} < 0.017 < 0.03$ ，所以这样的反射率是能够满足仿真要求的。 P 点同样处于圆弧中点处的时候 γ_1 取得最小值。

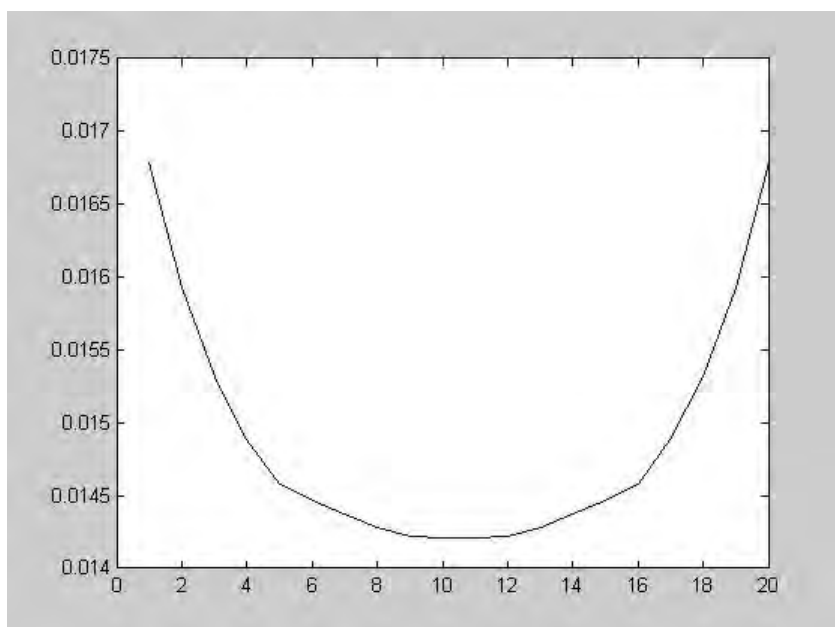


图 5

3.1.4 分析多次反射

暗室的六个面中直接通过辐射体辐射而变成无数多个余弦辐射体的部分设为 U ，则第 1 次反射就是 U 部分辐射给静区的辐射通量，第 2 次反射就是 U 部分通过

一次反射辐射给静区的辐射通量，类推，第 n 次反射就是 U 部分通过 $n-1$ 次反射辐射给静区的辐射通量。

一次反射静区接受到的辐射通量 Φ_1 ，

两次反射静区接受到的辐射通量 $\Phi_2 < \Phi_1 \rho$ ，

.....
第 n 次反射静区接受到的辐射通量 $\Phi_n < \Phi_1 \rho^{n-1}$ ，

故总共静区间接接受到的辐射通量

$$\Phi_{\text{总}} < \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_1 \rho^{n-1} = \frac{\Phi_1}{1-\rho},$$

所以，

$$\gamma < \frac{\Phi_1}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\Phi_1} = \frac{\gamma_1}{1-\rho}$$

所以，当 $\rho = 0.05$ 时候， $\gamma < \frac{0.017}{1-0.05} = 0.01789$ ，仍然是符合仿真要求的。

3.2 积分模型的建立和分析

3.2.1 积分模型的建立

由于 P 点发出辐射后，辐射波在 6 个面有无穷次反射，如果考虑单个波的反射，相当复杂。换个角度，从整体看，暗室的 6 个面实际上是面辐射体，而每个面的辐射照度和辐射出射度有一定关系，因此 6 个面的辐射照度相互影响，且满足某种关系。

我们建立如下模型，

每个面上的微元接受到的辐射强度都是由于辐射源 P 和其余 5 个面辐射得到的。

不妨设暗室右边的面为 A_1 ，左面 A_2 上面 A_3 ，下面 A_4 ，前面 A_5 ，后面 A_6 ，对应的

法线为， $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ ，第 i 个面上的点 X_i ，接受到的辐射照度为 $f_i(P, X_i)$ ，其

中 P 点 X_i 点都是空间点即 (x, y, z) 。 $f_i(P, X_i)$ 应满足如下关系式：

$$\begin{aligned} f_j(P, X_j) = & \frac{I_0 \cos \langle PX_j, n_j \rangle}{|PX_j|^2} \\ & + \sum_{i=1, i \neq j}^6 \int_{A_i} \frac{f_i(P, X_i) \rho \cos \langle n_i, X_i X_j \rangle}{2\pi |X_i X_j|^2} ds, j=1, \dots, 6 \end{aligned} \quad (*)$$

由于这个模型求解比较复杂，因此我们可以考虑简化模型。

3.2.2 积分模型的简化

根据上面思想，我们可以把面简单等效成面上的某一点，这样 6 个面辐射体等效成 6 个点辐射。这样六个面辐射简单等效成了六个点辐射，静区接受到的辐射就是这 5 个点和 P 点辐射的总和，间接接受到的辐射就是 5 个点辐射的

总和。

这样(*)式简化成了一个包含 6 个未知量的线性方程组。

求等效点

假设各个面不反射光波，这时候，把每个面上的辐射照度分看作质量的分布，求出在这个分布下的重心 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 、 Q_4 、 Q_5 、 Q_6 ，的坐标。

P 点为辐射源， Q 是圆弧圆心， P 点辐射法向始终是 PQ ， X 点为接受点，则在 X 点的辐射照度公式如下：

$$E(P, X) = \frac{I_0 \cos \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PX} \rangle}{|\overrightarrow{PX}|^2},$$

上述公式中，当 X 在 A_i 面上的时候通过 *Matlab* 算出 A_i 面的重心坐标 Q_i 。

则公式(*)可以简化成

$$\begin{cases} f_i = \frac{I_0 \cos \langle \overrightarrow{PQ_1}, \overrightarrow{PQ} \rangle}{|\overrightarrow{PQ_1}|^2} + \frac{\rho \cos \langle \overrightarrow{Q_2Q_1}, \overrightarrow{n_2} \rangle}{|\overrightarrow{Q_2Q_1}|^2} f_1 + \dots + \frac{\rho \cos \langle \overrightarrow{Q_6Q_1}, \overrightarrow{n_6} \rangle}{|\overrightarrow{Q_6Q_1}|^2} f_6 \\ f_2 = \frac{I_0 \cos \langle \overrightarrow{PQ_2}, \overrightarrow{PQ} \rangle}{|\overrightarrow{PQ_2}|^2} + \frac{\rho \cos \langle \overrightarrow{Q_1Q_2}, \overrightarrow{n_1} \rangle}{|\overrightarrow{Q_1Q_2}|^2} f_1 + \dots + \frac{\rho \cos \langle \overrightarrow{Q_6Q_2}, \overrightarrow{n_6} \rangle}{|\overrightarrow{Q_6Q_2}|^2} f_6 \\ \vdots \\ f_6 = \frac{I_0 \cos \langle \overrightarrow{PQ_6}, \overrightarrow{PQ} \rangle}{|\overrightarrow{PQ_6}|^2} + \frac{\rho \cos \langle \overrightarrow{Q_1Q_6}, \overrightarrow{n_1} \rangle}{|\overrightarrow{Q_1Q_6}|^2} f_1 + \dots + \frac{\rho \cos \langle \overrightarrow{Q_5Q_6}, \overrightarrow{n_5} \rangle}{|\overrightarrow{Q_5Q_6}|^2} f_6 \end{cases}$$

3.2.3 模型的计算步骤

- (1) 根据时间计算辐射源的位置
- (2) 计算暗室 6 个面无反射光线时的辐射强度分布函数
- (3) 将分布函数看成质量分布函数，计算暗室 6 个面的“质心”
- (4) 利用 6 个“质心”和辐射源满足的方程，求出 6 个“质心”的辐射强度
- (5) 分别计算辐射源和 6 个质心对静区的辐射通量，求出 γ

利用 *Matalab* 编程计算结果为

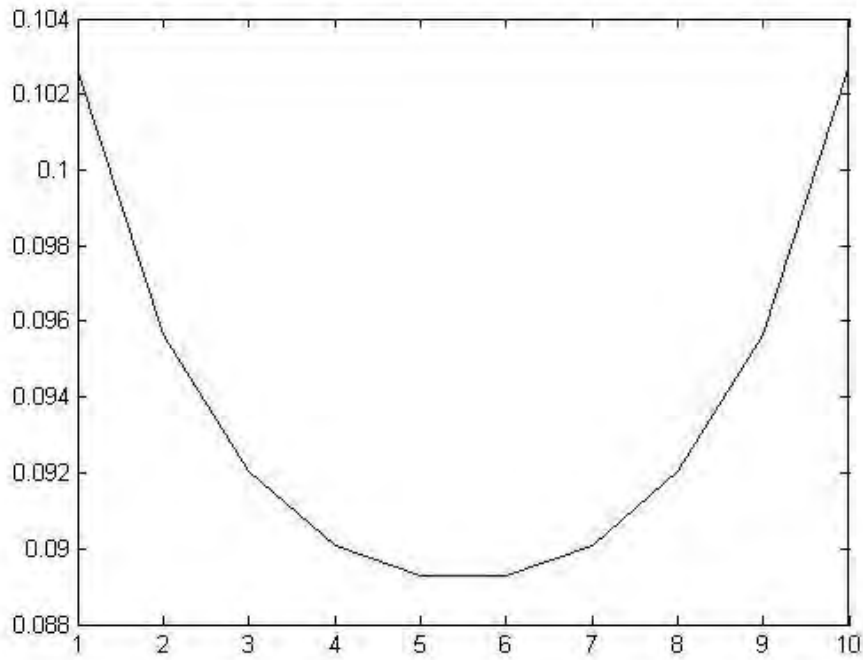


图 6

图 6 为 $\rho = 0.5$ 时, γ 随时间的变化图, 其中横坐标表示时间 0 到 4 秒被分成 10 份, 纵坐标表示 γ 值, 由图看出 γ 值超过 0.03, 不满足仿真要求。

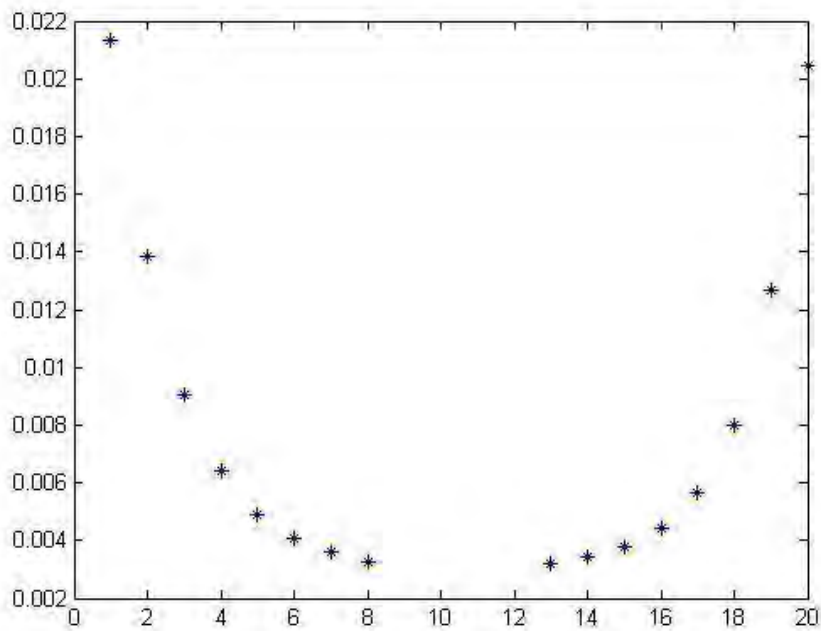


图 7

图 7 为 $\rho = 0.05$ 时, γ 随时间的变化图, 其中横坐标表示时间 0 到 4 秒被分成 20 份, 纵坐标表示 γ 值, 由图看出 γ 值小于 0.03, 满足仿真要求。

图 6 和图 7 都可以看出 γ 值在时间为 2 秒的时候达到最小, 即发射源 P 在圆弧中点时, γ 取得最小值。

3.3 结果分析

由两种模型的计算结果，我们看到，虽然结果略有不同，但是，总体的结论是吻合的。两个模型的数值计算都表明当反射率为 0.5 时，不能满足仿真要求，而当反射率为 0.05 时，间接辐射通量与直接辐射通量的比值小于 0.03，可以满足仿真要求，因此，我们得到的结果应是合理的。

[参考文献]

- [1] 刘顺华等, 电磁波屏蔽及吸波材料, 化学工业出版社, 2007. 8.
- [2] Bhag Singh Gurn, Huseyin R. Hiziroglu, Electromagnetic Field Theory Fundamentals.
- 周克定, 张肃文等译, 机械工业出版社, 2000.
- [3] 张以谟, 应用光学, 机械工业出版社, 1988.
- [4] 吴鹏, MATLAB 高效编程技巧于应用: 25 个案例分析, 北京航空航天大学出版社, 2010.
- [5] 王志宇, 乔闪等人, 微波暗室的静区性能的测量方法, 微波学报, 2007.
- [6] 吕述平, 用谐振角锥吸波材料的研究[D], 大连理工大学, 2006.
- [7] 肖本龙等, 微波暗室吸收材料及其性能测试方法, Ship Electronic Engineering , Vol. 30. NO. 7: 140-148, 2010. 7.
- [8] 马科斯·玻恩, 光学原理, 电子工业出版社, 2005.