参赛密码 _____
（由组委会填写）

全国第八届研究生数学建模竞赛

学　　校	福州大学	
参赛队号	10386003	
队员姓名	1.潘能渊	
	2.胡爱杰	
	3.汤振立	

参赛密码 _____
（由组委会填写）

全国第八届研究生数学建模竞赛

题 目　　吸波材料与微波暗室问题的数学建模

摘　　要：

为了分析微波暗室的性能，本文采用几何光学的方法，用虚像延拓来刻画辐射波在暗室诸墙面上的反射过程，从而建立微波暗室模型。

问题一考虑单个尖劈几何空缺间反射过程的数学模型，利用平面镜成像原理，实物与虚像，反射点在同一直线上，在这基础上，本文考虑采用延拓的方法，将尖劈几何空缺空间延拓到一个圆上（三维情况延拓到一圆柱上），将入射波在尖劈空缺间的反射过程等价地看成入射波在一个圆内的直线传播过程（三维情况下，是在圆柱内的空间直线传播过程），本文中称为“虚像传播直线”。那么，入射波的反射次数可利用“虚像传播直线”在圆内的张角幅度来确定，结合“虚像传播直线”方向的旋转对称变化可确定反射方向，利用“虚像传播直线”与各个延拓后的尖劈空缺面的夹角可以来确定反射角，从而确定反射波的辐射强度。

问题二中要分析微波暗室的性能，主要采用的指标是静区从诸墙面得到的反射信号的功率之和与从信号源直接得到的微波功率比之比γ，由于各墙面之间是相互影响的，所有反射情况的反射次数也可以从 1 变化到无穷，整个反射过程组成一个复杂的系统。因此本文采用静区延拓的方法，将微波暗室暗箱化，首先建立一个余弦辐射体的点辐射源到一有界平面的辐射模型，然后通过该模型计算点辐射源到各个静区虚像的辐射功率总和作为静区从诸墙面得到的总功率，建立微波暗室的反射模型。实验证明，当采用平板吸波材料时（垂直反射率为 0.5），无法满足导引仿真要求，当采用性能较好的尖劈形吸波体时（垂直反射率为 0.05），能够满足仿真要求。

关键词：几何光学　虚像传播直线　微波暗室模型　虚像延拓

1. 模型假设与符号约定

模型假设

（1） 在问题一中，只考虑入射波在一尖劈空缺空间中的反射过程，不考虑其折射情况。

（2） 不考虑静区的反射，即当辐射波反射或者直射到静区上时，辐射功率能完全被吸收，不会发生反射。

符号约定

P_0 入射点

P_i 入射波与反射面的第 i 个反射点

P_i' 延拓空间中入射波与延拓空间第 i 次交点

$\vec{l}_{in}$ 入射波线方向向量

$\vec{l}_{out}$ 出射波线方向向量

$\vec{l}'_{out}$ 最后一次反射面为 OP_1 的出射波线关于 OP_1 的对称方向向量

n 反射次数

β 延拓空间中 $\angle P_0OP$

θ_γ 出射波线与 z 轴正向的夹角

φ_r 出射波线在 xOy 平面投影与 x 轴正向夹角

ω_k 第 k 次反射时入射角

$\vec{n}_k$ 延拓空间中第 k 个平面（OP_i'）的法向量（二维平面中为直线 OP_i' 的法向量）

ρ_k 第 k 次反射时反射率

ρ_r 出射波线的功率

ρ 暗室墙壁铺设材料的反射率

γ $\vec{l}_{out}$ 在 xOy 平面投影

θ_t t 时刻 $\angle PQO_1$ 的大小，即 t 时刻动点 P 的中心轴线与静区中心轴线的夹角

P_t t 时刻 P 点的坐标

I_0 初始时刻，辐射源法向方向的辐射强度

I_t t 时刻辐射源法向方向的辐射强度

$\Phi_{direct}(t)$ t 时刻，静区从辐射源直接得到的功率

$\Phi_{indirect}(t)$ t 时刻，静区从诸墙面反射得到的功率

Q_{ijk} 表示向 x 方向延拓 i 个单位，向 y 方向延拓 j 个单位，向 z 方向延拓 k 个单位的静区虚像的中心点

N_{ijk} 表示辐射源到第 Q_{ijk} 个静区虚像反射过程的反射次数

$\Phi_{ijk,t}$ t 时刻，第 Q_{ijk} 个静区虚像得到的功率

2.问题重述

飞机隐身，是指在飞机有关部位涂覆或粘贴吸波材料，合理设计飞机外形与布局等使敌方探测系统（如无线电雷达，红外雷达，激光雷达等）只接收到大大减弱后的飞机反射信号，从而降低被发现或跟踪的可能。

隐身技术的基础研究包括探索不同频段上吸波的机理，研制高效吸波的特殊材料，将吸波材料设计成合理的形状使之发挥最大效能。早期的功能与性能的测试一般选择在无电磁干扰的偏僻空旷山区进行，但在近代各种干扰已无法全部避免，所以近三十多年来这样的测试与仿真一般都放置在被称为“无回波暗室”的实验室中进行。

无回波暗室能够屏蔽外界干扰信号，通过内墙（包括地面与天顶面）敷设的吸波体，吸收各类反射信号，使室内反射大为减弱，被测设备接收到的“似乎”只有测试信号源发出的实验所需信号。这样，它为测试设备提供了一个几乎没有反射信号的“自由空间”。

为了提高无回波暗室的吸波性能，一般使用锥体（正四棱锥或正圆锥体等）或尖劈形状的吸波体，大量锥体或尖劈有规律地排列组成的整体粘贴在墙上构成吸波体。采用这些形状的主要理由是它们能使得辐射波在尖形的几何空缺间形成多次反射和透射-反射，降低反射出去的能量，实现高效率吸波。

吸波体的吸波性能计算需要考虑多次反射，微波暗室的电磁特性分析应研

究各个墙面间的相互影响（即一个墙面既接受其他墙面的辐射又同时反射给其他墙面）。本题拟采用较简单直观的几何光学模型，来初步研究分析特殊吸波体和微波暗室的性能这两类问题。

2.1 问题一重述

问题一，建立入射波线在一个尖劈几何空缺间反射过程的数学模型，分别刻画最终反射波线的方向，反射次数，反射波的辐射强度与已知反射率、诸几何参数之间的定量关系。

2.2 问题二重述

问题二，着重于分析微波暗室的性能上，暗室的性能指标体现在静区接收到的电磁能量直接对导弹的导引仿真的影响，根据导引仿真要求，静区从诸墙面得到的反射信号的功率之和与从信号源直接得到的微波功率之比γ，始终满足$\gamma \leq 0.03$。因此，如何建立一个微波暗室模型来计算静区从诸墙面得到的反射信号的功率之和与从信号源直接得到的微波功率，进而判断给定的吸波材料能否满足仿真要求。

3. 问题一分析与模型求解

3.1 问题一分析

在尖劈形状吸波几何空缺间反射过程的数学模型中，入射波线的方向由射向角 θ（z 轴正向与入射线负方向的夹角）和方位角 φ（x 轴正向与射线在 xOy 平面上投影的夹角）唯一确定。考虑将入射波线投影到 yOz 平面，模型可以简化为二维平面 yOz 上三角形区域内多次反射模型。通过求解二维平面多次反射模型的反射波线的方向、反射次数、反射波的辐射强度与已知反射率、诸几何参数之间的定量关系，再引入方位角 φ，可以将二维模型推广到三维，从而得到所需模型。进而可以得到三维空间中，反射波线的方向、反射次数、反射波的辐射强度与已知反射率、诸几何参数之间的定量关系。

3.2 二维平面多次反射模型

尖劈形状吸波几何空缺间反射过程如图 1 所示，

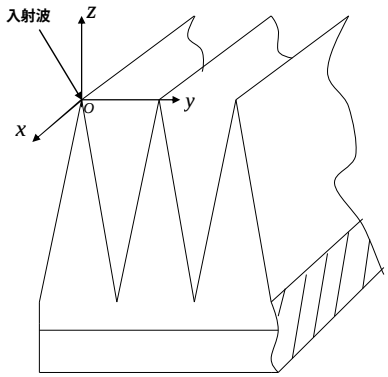

图 1 尖劈形状吸波体反射模型

首先考虑将入射波投影到二维平面 yOz 上，此时不考虑方位角，入射角为射向角 θ_i，得到二维模型，入射波在尖劈几何空缺间的反射过程如下：

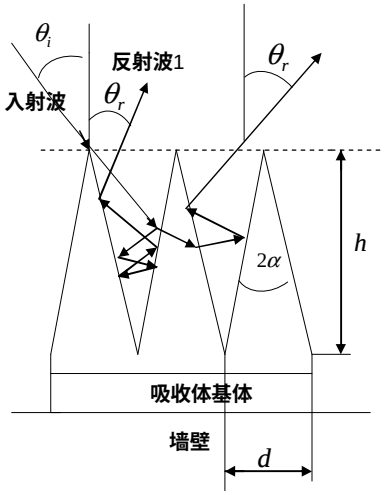

图 2 二维空间尖劈形状吸波体反射投影模型

由图 2 可知，入射波线在两尖劈空缺间可能发生多次反射，如果对单个尖劈几何空缺间建立反射过程模型，就显得比较复杂。本文考虑将尖劈空缺空间进行延拓，将入射波在尖劈空缺间的反射过程延拓到入射波在一个圆上的传播过程，下面我们举个两次反射例子来说明延拓的过程：

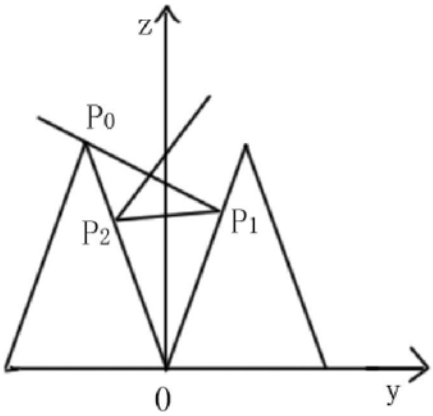

图 3 尖劈空间两次反射路线图

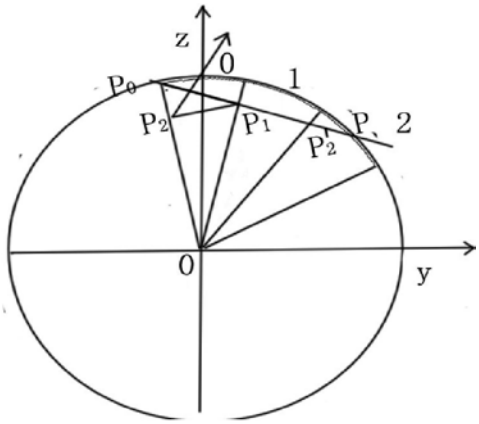

图 4 尖劈空间两次反射延拓图

如图 3 所示，假设在一个尖劈空间发生两次反射后出射离开尖劈空间，入射点为 P_0，第一次反射点为 P_1，第二次反射点为 P_2，扇形 P_0OP_1 表示尖劈空缺。则可以将扇形 P_0OP_1 如图 4 作延拓，将尖劈空缺绕着原点 O 顺时针旋转，使得扇形左边界先与右边界线重合，重复这个过程可延拓成一个圆或半圆。 则由平面镜的虚像原理，入射波在尖劈空缺间的反射过程 $P_0-P_1-P_2$ 等价于入射波在圆内沿着反射点的虚像进行直线传播，即传播过程为 $P_0-P_1(P_1')-P_2'$，我们称这个直线为“虚像传播直线”。则该传播直线跑出圆外就等价于入射波被反射出尖劈空缺空间，反射次数就可以依“虚像传播直线”经过多少个延拓尖劈空缺来确定，而反射方向只需依“虚像传播直线”方向逆向延拓回去既可以确定。

而对于计算反射波的辐射强度，依题中将反射率简化为满足余弦法则，反射率与入射角相关，得到入射角即可知道每次反射时反射率，经过 n 次反射后，入射波功率依次衰减，乘以每次反射时的反射率即可知道最终出射光线的功率。对于反射角的求解，本文考虑将入射光线向量化，入射光线向量与反射面法向向量之间夹角为入射角，在本模型中，第 k 次反射时的入射角即为入射光线与镜像对称后的反射面 OP_k' 法向量的夹角。基于此思想，我们建立更一般的模型。

建立模型前，利用几何关系，我们先给出两个后续有用到的定理结论：

定理 1 平面向量关于直线对称

设平面中向量 $\vec{a}$ 关于任意向量 $\vec{b}$ 的对称向量为 $\vec{c}$，那么

$$\vec{c} = 2\cos\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} - \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \qquad (3\text{-}2\text{-}1)$$

定理 2 空间向量关于平面对称

设空间任意向量 $\vec{a}$ 关于法向量为 $\vec{n}$ 的平面对称的向量为 $\vec{c}$，那么

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - 2\cos\left\langle \vec{a}, \vec{n} \right\rangle \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \qquad (3\text{-}2\text{-}2)$$

3.3 二维模型建立与求解

由上面介绍，可以将该多次反射过程延拓为波在一个圆中传播的路线，如图 5 所示， P_0 为延拓图的入射点、入射波与扇形的交点 P_1 对应第一次反射点、P_2' 对应第二次反射点的虚像、P_3' 对应第三次反射点的虚像，P_n' 对应于最后一次反射点的虚像。P_0P_1 交圆于 P 点， $P_n'P$ 是延拓图的出射波线。

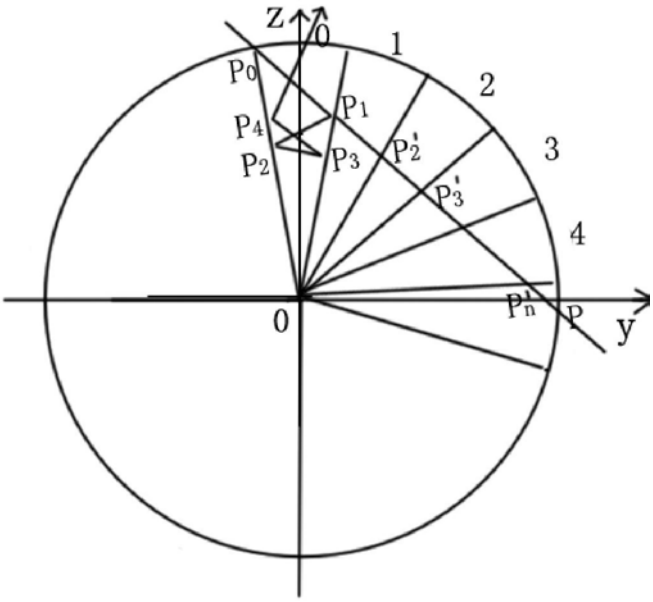

图 5 尖劈空间多次反射延拓图

记扇形 P_0OP_1 为第 0 块扇形区域，扇形 P_1OP_2 为第 1 块扇形区域，当 P 点所在扇形区域是偶数块时，将该区域逆时针旋转到第 0 块扇形区域，那么 $P_n'P$ 将与尖劈空间中经多次反射后出射的波线重合 当 P 点所在扇形区域是奇数块时，将该区域逆时针旋转到第 1 块扇形区域，延拓图的出射波线 $P_n'P$ 与尖劈空间出射波线关于 OP_1 对称。

从图中可以看出，发生奇数次反射时，出射光线从 OP_1 面射出，发生偶数次反射时，出射光线从 OP_0 面射出。延拓图中波线从第 k 块($k>1$)扇形射出时，相当于该扇形逆时针旋转 $(k-1)g2\alpha$ 后，从 OP_0 或 OP_1 面反射出去。

3.3.1 建立坐标系

考虑二维模型，将入射波投影在 yOz 平面上，只在 yOz 平面上发生多次反射，建立直角坐标系 yOz（如图 6 所示），以入射波反复反射的两个尖劈相交的谷底为原点 O，y 轴正方向平行于吸收体基体向右，z 轴正方向垂直于吸收体基体，竖直向上。入射波线负方向与 z 轴正向成夹角 θ_i，在 yOz 平面上入射波

线的方向向量为 $\vec{l}_{in}=\left(\sin\left(\theta_i\right),-\cos\left(\theta_i\right)\right)$，入射点 P_0 的坐标为

$P_0=\left(-R\sin\left(\alpha\right),R\cos\left(\alpha\right)\right)$，其中 $R=\sqrt{h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}$。

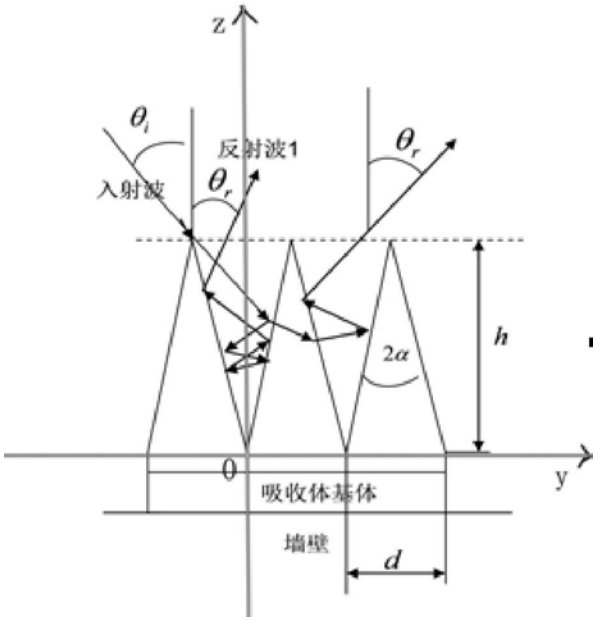

图 6 尖劈形状吸波体直角坐标系

在直角坐标系 yOz 中，将尖劈形状吸波体波多次反射延拓为入射波在圆上传播， 尖劈空间入射波分别在 P_1、P_2、P_3、…、P_n 发生反射，延拓空间中，入射波与扇形相交于 P_1、P_2'、P_3'、…、P_n'，交圆于 P，在 P 点出射。

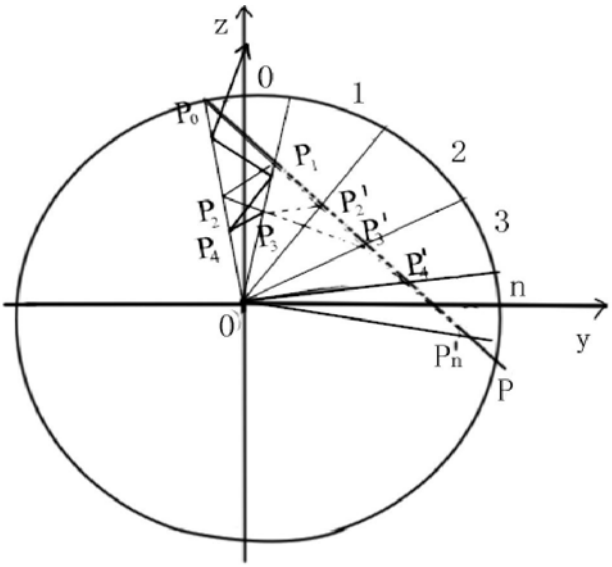

图 7 尖劈形状吸波体模型

3.3.2 二维模型求解

反射次数

入射波 P_0P_1 与圆的相交于 P，表示反射波将超出两个尖劈斜面之间，不再反射。入射波与扇形相交的次数反映了入射波在尖劈空间中发生反射的次数。在 $\mathrm{V}P_0OP$ 中，令 $\angle P_0OP=\beta$，（$0<\beta<\pi$），

$\because OP=OP_0=R$

$\therefore \Delta P_0OP$ 是等腰三角形

又 $\because \angle OP_0P=\theta_i-\alpha$，

$\therefore \beta=\pi+2\alpha-2\theta_i$

反射次数 n 是对 $\dfrac{\beta}{2\alpha}$ 的取整，$n=\left[\dfrac{\beta}{2\alpha}\right]=\left[\dfrac{\pi-2\theta_i}{2\alpha}\right]+1$。

结论：反射次数 n 可以表示为

$$n=\left[\frac{\pi-2\theta_i}{2\alpha}\right]+1 \qquad (3\text{-}3\text{-}1)$$

出射角度

$\overrightarrow{\mathrm{P}_0P}$ 为延拓图中的出射波线方向，先考虑如果 $\overrightarrow{\mathrm{P}_0P}$ 方向逆延拓回第 0 块扇形区域（尖劈空缺）以求得反射波线的出射方向。当 P 点处于偶数块扇形区域时，尖劈空间发生偶数次反射，反射波从 OP_0 面出射，将延拓图中的出射方向 $\overrightarrow{\mathrm{P}_0P}$ 逆时针旋转 $n\cdot 2\alpha$ 度，即为尖劈空缺空间中的反射波方向。当 P 点处于奇数块扇形区域时，尖劈空间发生奇数次反射，反射波从 OP_1 面出射，将延拓图中的出射方向 $\overrightarrow{\mathrm{P}_0P}$ 逆时针旋转 $(n-1)2\alpha$ 度，然后将旋转后的出射方向关于 OP_1 做对称即为真实的尖劈空缺空间中的反射波方向。

考虑当 $n=2k(k\geq 1,k\in N)$ 时，$\overrightarrow{\mathrm{P}_0P}$ 逆时针旋转 $2n\alpha$，所得向量即为反射波的出射向量，可通过向量 $\overrightarrow{\mathrm{P}_0P}$ 左乘旋转矩阵获得。

设出射波线向量为 $\overrightarrow{l_{out}}$，入射波线向量为 $\overrightarrow{l_{in}}=(\sin\theta_i,-\cos\theta_i)$

$$\therefore n=\left[\frac{\pi-2\theta_i}{2\alpha}\right]+1$$

所以可以求得，尖劈空缺空间中的反射波方向为：

$$\begin{pmatrix} l_{out\,y} \\ l_{out\,z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 2n\alpha & -\sin 2n\alpha \\ \sin 2n\alpha & \cos 2n\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_{in\,y} \\ l_{in\,z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin\left(\theta_i+2n\alpha\right) \\ -\cos\left(\theta_i+2n\alpha\right) \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}3\text{-}2)$$

设 θ_γ **为反射波线与** z **轴夹角，则可以计算为：**

$$\cos\left(\theta_\gamma\right)=\frac{\vec{l}_{out}\cdot(0,1)}{\left\|\vec{l}_{out}\right\|}=-\cos\left(\theta_i+2n\alpha\right) \qquad (3\text{-}3\text{-}3)$$

$$\theta_\gamma=\pi-\theta_i-2n\alpha \qquad (3\text{-}3\text{-}4)$$

当 $n=2k+1$ **时，将延拓图的出射波线** $\overrightarrow{\mathrm{P}_0P}$ **逆时针旋转** $2\left(n-1\right)\alpha$ **角度，得到** $\vec{l}'_{out}$ **，然后将** $\vec{l}'_{out}$ **关于** OP_1 **面对称，就可得到反射波的方向** $\vec{l}_{out}$ **：**

$$\begin{pmatrix} l_{out\,y}' \\ l_{out\,z}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 2(n-1)\alpha & -\sin 2(n-1)\alpha \\ \sin 2(n-1)\alpha & \cos 2(n-1)\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_{in\,y} \\ l_{in\,z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin\left(\theta_i+2(n-1)\alpha\right) \\ -\cos\left(\theta_i+2(n-1)\alpha\right) \end{pmatrix}$$

$$(3\text{-}3\text{-}5)$$

然后依据定理 1**（式子** 3-2-1**），将反射方向** $\vec{l}'_{out}$ **关于向量** $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=\left(\sin\alpha,\cos\alpha\right)$ **做对称，得到**

$$\vec{l}_{out}=2\cos\left\langle\vec{l}_{out}',\overrightarrow{OP_1}\right\rangle\frac{\overrightarrow{OP_1}}{\left|\overrightarrow{OP_1}\right|}-\frac{\vec{l}_{out}'}{\left|\vec{l}_{out}'\right|}=\begin{pmatrix} -\sin\left(\theta_i+2n\alpha\right) \\ -\cos\left(\theta_i+2\left(n-1\right)\alpha\right) \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}3\text{-}6)$$

设 θ_γ **为反射波线与** z **轴夹角，则可以计算为：**

$$\cos\left(\theta_\gamma\right)=\frac{\vec{l}_{out}\cdot(0,1)}{\left\|\vec{l}_{out}\right\|}=-\cos\left(\theta_i+2\left(n-1\right)\alpha\right) \qquad (3\text{-}3\text{-}7)$$

$$\theta_\gamma=\pi-\theta_i-2\left(n-1\right)\alpha \qquad (3\text{-}3\text{-}8)$$

结论：综合反射次数 n **为奇数和偶数情况，反射波的出射角度** θ_γ **可以一般地表示为**

$$\theta_\gamma=\begin{cases} \pi-\theta_i-\left(\left[\dfrac{\pi-2\theta_i}{2\alpha}\right]\right)2\alpha & \text{当}n=2k+1\text{时} \\ \pi-\theta_i-\left(\left[\dfrac{\pi-2\theta_i}{2\alpha}\right]+1\right)2\alpha & \text{当}n=2k\text{时} \end{cases} \qquad (3\text{-}3\text{-}9)$$

反射波线功率

由于每次反射时，反射率与波的入射角度相关，考虑第 n 次反射，计算出第 n 次反射时的入射角 ω_n，根据反射率满足余弦法则，得到 $\rho_n = \rho\cos(\omega_n)$。

入射波线 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 方向用向量可以表示为 $\vec{l}_{in} = (\sin\theta_i, -\cos\theta_i)$，入射波线的负方向向量 $(-\sin\theta_i, \cos\theta_i)$ 与反射面上法向量之间夹角 $\left\langle \overrightarrow{P_1P_0}, \vec{n}_k \right\rangle$ 即为第 k 次反射时入射角 ω_n。

第 k 个反射面向量表示为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_k} &= \left(\cos(\frac{\pi}{2}-(2k-1)\alpha), \sin(\frac{\pi}{2}-(2k-1)\alpha)\right) \\ &= \left(\sin(2k-1)\alpha, \cos(2k-1)\alpha\right)\end{aligned} \tag{3-3-10}$$

该反射面的法向量为

$$\begin{aligned}\vec{n}_k &= \left(\cos(\pi-\left(2k-1\right)\alpha), \sin(\pi-\left(2k-1\right)\alpha)\right) \\ &= \left(-\cos\left(2k-1\right)\alpha, \sin\left(2k-1\right)\alpha\right)\end{aligned} \tag{3-3-11}$$

则入射波线在该反射面上的反射角可以计算为：

$$\begin{aligned}\cos(\omega_k) &= \cos\left(\left\langle \overrightarrow{P_1P_0}, \vec{n}_k \right\rangle\right) = \frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}_k}{\left\|\overrightarrow{P_1P_0}\right\| \cdot \left\|\vec{n}_k\right\|} \\ &= \sin\theta_i \cos\left(2k-1\right)\alpha + \cos\theta_i \sin\left(2k-1\right)\alpha \\ &= \sin\left(\theta_i + \left(2k-1\right)\alpha\right)\end{aligned} \tag{3-3-12}$$

第 k 次反射时反射率为

$$\rho_k = \rho\cos(\omega_k) \tag{3-3-13}$$

出射光线的功率为

$$\begin{aligned}\rho_r &= \rho^n \prod_{k=1}^{n} \cos(\omega_k) \\ &= \rho^n \prod_{k=1}^{n} \left(\sin\left(\theta_i + \left(2k-1\right)\alpha\right)\right)\end{aligned} \tag{3-3-14}$$

结论：反射波的辐射强度可以表示为：

$$\rho_r = \rho^n \prod_{k=1}^{n} \left(\sin\left(\theta_i + \left(2k-1\right)\alpha\right)\right) \tag{3-3-17}$$

接下来我们将模型推广到三维空间。

3.4 三维模型分析与求解

3.4.1 三维模型分析

二维平面中，我们将问题抽象成入射波线在圆上传播问题，推广到三维空间中，我们将反射模型延拓为入射波线在圆柱体内传播问题。如图所示，入射波线以射向角θ和方位角φ射入尖劈空间，可以延拓为入射波线以射向角θ和方位角φ射入一个半径为 R 的圆柱体中。

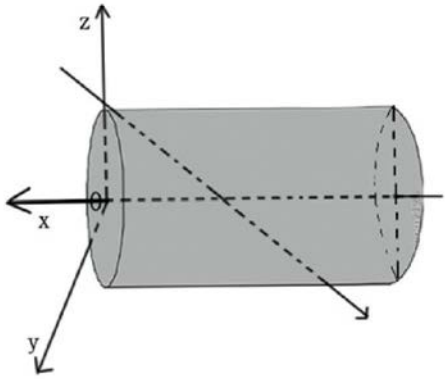

图 9 三维空间延拓

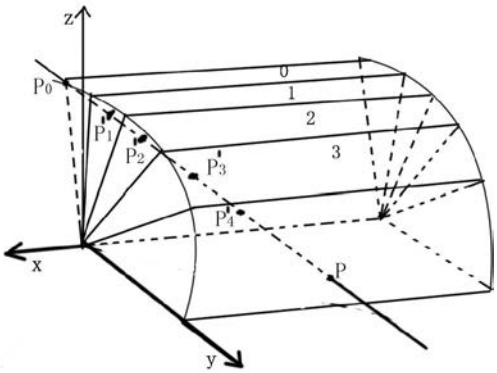

图 10 三维延拓空间坐标系

因为尖劈长度在x方向上无限长，所以我们认为不存在因为x方向导致应该出射却没有出射的情况。类似于二维模型，由平面镜的虚像原理，入射波在尖劈空缺间的反射过程$P_0-P_1-P_2$等价于入射波在圆柱体内沿着反射点的虚像进行直线传播，即传播过程为$P_0-P_1(P_1')-P_2'$，我们称这个直线为“虚像传播直线”。入射波发生反射的尖劈空间是个底面为圆心角为2α的扇形柱块，由于反射面和x轴平行，所以延拓出的空间是一个以x轴为中心、半径为R的圆柱体。

入射波沿传播直线出射圆柱体外就等价于入射波被反射出尖劈空缺空间，反射次数就可以依“虚像传播直线”经过多少个延拓尖劈吸波体空间来确定，而反射方向只需依“虚像传播直线”方向逆向延拓回去即可确定。

同样，对于计算反射波的辐射强度，依题中将反射率简化为满足余弦法则，反射率与入射角相关，得到入射角即可知道每次反射时反射率。区别于二维模型的是，三维模型中入射波与反射面的夹角为空间角，向量化后，入射角实际是入射波向量与平面法向量的夹角。经过 n 次反射后，入射波功率依次衰减，乘以每次反射时的反射率即可知道最终出射光线的功率。在本模型中，第 k 次反射时的入射角即为入射光线与镜像对称后的反射面OP_k'法向量的夹角。

在三维空间模型中，反射次数可以根据“虚像传播直线”经过多少个延拓尖劈吸波体空间来确定，由于圆柱体以x轴为中心，因此可将入射波线投影到

yOz 平面，通过计算投影直线经过多少扇形区域来确定。记第 0 块扇形柱块为尖劈空间，第 1 块扇形柱块为第一次反射区间，第 2 块扇形柱块为第二次反射区间，以此类推。

3.4.2 建立坐标系

如图 10 所示，在三维空间中建立一个直角坐标系 $x-yOz$，以两相邻尖劈谷底为原点 O，x 轴正方向为尖劈波脊延伸方向，y 轴正方向为平行于吸收体基体水平向右，z 轴正方向为垂直于吸收体基体竖直向上。

入射波的入射点为 P_0，第一次反射点为 P_1，第二次反射点为 P_2，第三次反射点为 P_3，第四次反射点为 P_4，…，最后一次反射点为 P_n。相应的将三维空间中反射模型延拓为入射波在圆柱体中传播路线，入射波与扇形柱块第一次相交为 P_1'，第二次相交于 P_2'，第三次相交于 P_3'，第四次相交于 P_4'，…，最后一次与扇形柱块相交于 P_n'。入射波线的方向由射向角 θ 和方位角 φ 唯一确定，延拓图中入射波线与圆柱体相交于 P 点，表明在三维空间中反射波出射离开尖劈空间，不再发生反射，此时 P 点与 x 轴距离应与圆柱体底面半径 R 相等，其中 $R=\sqrt{h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}$。

入射波线负方向与 z 轴正向成夹角 θ，x 轴正向与射线在 xOy 平面上投影的夹角为方位角 φ。

在 $x-yOz$ 空间中，入射波线的方向向量为

$$\vec{l}_{in}=\left(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,-\cos\theta\right),$$

入射点 P_0 的坐标为 $P_0=\left(0,-\frac{d}{2},h\right)$。

3.4.3 三维模型建立与求解

反射次数

与二维的模型求解一样，不过需要计算入射波方向关于 z 轴的方位角，即计算 z 轴正方向与入射波在 yOz 平面投影的反向量所成的夹角。由入射波的射

向角θ和方位角φ，可计算入射波的方向向量为：

$$\vec{l}_{in}=\left(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,-\cos\theta\right) \tag{3-4-1}$$

投影在 yOz 平面上的向量为：

$$\vec{l}_{in/yoz}=\left(0,\sin\theta\sin\varphi,-\cos\theta\right) \tag{3-4-2}$$

则入射波方向关于 z 轴的方位角 θ_i 可计算为：

$$\theta_i=\arccos\left(\frac{(0,0,1)\cdot(-\vec{l}_{in/yoz})}{|\vec{l}_{in/yoz}|}\right)=\arccos\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta\sin^2\varphi}}\right) \tag{3-4-3}$$

同二维模型中的计算一样。

结论：三维模型中反射次 n 为：

$$n=\left[\frac{\pi-2\theta_i}{2\alpha}\right]+1 \tag{3-4-4}$$

其中θ_i可由（3-4-3）式子计算得到。

出射角度

同二维中的模型一样，$\overrightarrow{P_0P}$为延拓图中的出射波线方向，当 P 点处于偶数块扇形柱区域时，将延拓图中的出射方向$\overrightarrow{P_0P}$逆时针绕 x 轴旋转$n\cdot 2\alpha$度，即为尖劈空缺空间中的反射波方向。当 P 点处于奇数块扇形柱区域时，将延拓图中的出射方向$\overrightarrow{P_0P}$逆时针绕 x 轴旋转$(n-1)2\alpha$度，然后将旋转后的出射方向关于OP_1与 x 轴组成的平面做对称即为真实的尖劈空缺空间中的反射波方向。

考虑当$n=2k(k\geq 1,k\in N)$时，将$\overrightarrow{P_0P}$绕x轴逆时针旋转$2n\alpha$，所得向量即为反射波的出射向量，可通过向量$\overrightarrow{P_0P}$左乘旋转矩阵获得。

设出射波线向量为$\vec{l}_{out}$，入射波线向量为$\vec{l}_{in}=\left(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,-\cos\theta\right)$

$$\begin{pmatrix} l_{out\,x} \\ l_{out\,y} \\ l_{out\,z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2n\alpha & -\sin 2n\alpha \\ 0 & \sin 2n\alpha & \cos 2n\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_{in\,x} \\ l_{in\,y} \\ l_{in\,z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \cos 2n\alpha\sin\theta\sin\varphi+\sin 2n\alpha\cos\theta \\ \sin 2n\alpha\sin\theta\sin\varphi-\cos 2n\alpha\cos\theta \end{pmatrix} \tag{3-4-5}$$

设θ_γ为反射波线与 z 轴正方向的夹角，则可以计算为：

$$\cos\left(\theta_\gamma\right)=\frac{\vec{l}_{out}\cdot\left(0,0,1\right)}{\left\|\vec{l}_{out}\right\|}=\sin 2n\alpha\sin\theta\sin\varphi-\cos 2n\alpha\cos\theta$$

$$\theta_\gamma=\arccos\left(\sin 2n\alpha\sin\theta\sin\varphi-\cos 2n\alpha\cos\theta\right) \qquad (3\text{-}4\text{-}6)$$

设φ_γ为反射波线在 xOy 平面上的投影与 x 轴正方向的夹角，则可以计算为：

$\vec{l}_{out}$在xOy平面投影为

$$\vec{\gamma}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \cos 2n\alpha\sin\theta\sin\varphi+\sin 2n\alpha\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

计算φ_γ为：

$$\cos\varphi_r=\frac{\vec{\gamma}\cdot(1,0,0)}{\left\|\vec{\gamma}\right\|}=\frac{l_{outx}}{\sqrt{{l_{outx}}^2+{l_{outy}}^2}}$$

$$\varphi_r=\arccos\left(\frac{l_{outx}}{\sqrt{{l_{outx}}^2+{l_{outx}}^2}}\right) \qquad (3\text{-}4\text{-}7)$$

当$n=2k+1$时，将$\overrightarrow{P_0P}$逆时针旋转$2\left(n-1\right)\alpha$角度，得到$\vec{l}'_{out}$，再将$\vec{l}'_{out}$关于$\mathrm{OP_1}$和 x 轴组成的平面做对称，即可得出射波线向量$\vec{l}_{out}$，计算过程如下：

同上可计算$\vec{l}'_{out}$为：

$$\begin{pmatrix}l_{outx}\\ l_{outy}\\ l_{outz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \cos 2(n-1)\alpha\sin\theta\sin\varphi+\sin 2(n-1)\alpha\cos\theta\\ \sin 2(n-1)\alpha\sin\theta\sin\varphi-\cos 2(n-1)\alpha\cos\theta\end{pmatrix}$$

$\mathrm{OP_1}$和 x 轴组成的平面的法向量可计算为：

$$\vec{n}=(1,0,0)\times\overrightarrow{OP_1}=\left(1,0,0\right)\times\left(0,\sin\alpha,\cos\alpha\right)=\left(0,-\cos\alpha,\sin\alpha\right)$$

根据定理 2（式子 3-2-2），将$\vec{l}'_{out}$关于$\mathrm{OP_1}$和 x 轴组成的平面做对称：

$$\vec{l}_{out} = \frac{\vec{l}'_{out}}{|\vec{l}'_{out}|} - 2\cos\left\langle \vec{l}'_{out}, \vec{n} \right\rangle \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ -\cos 2(n+1)\alpha\sin\theta\sin\varphi - \sin 2(n+1)\alpha\cos\theta \\ \sin 2(n+1)\alpha\sin\theta\sin\varphi - \cos 2(n+1)\alpha\cos\theta \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}4\text{-}8)$$

则射向角 θ_γ 和方位角 φ_γ 可分别计算为：

$\vec{l}_{out}$ **在 xOy 平面投影为**

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \cos 2n\alpha\sin\theta\sin\varphi + \sin 2n\alpha\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos\varphi_r = \frac{\vec{\gamma}\cdot(1,0,0)}{\|\vec{\gamma}\|} = \frac{l_{outx}}{\sqrt{l_{outx}^{\ 2} + l_{outy}^{\ 2}}}$$

$$\varphi_r = \arccos\left(\frac{l_{outx}}{\sqrt{l_{outx}^{\ 2} + l_{outx}^{\ 2}}}\right)$$

结论：综合反射次数 n 为奇数和偶数的情况，反射波出射角分为射向角和方位角，

射向角 θ_γ 可以一般地表示为

$$\theta_\gamma = \begin{cases} \arccos\left(\sin 2(n+1)\alpha\sin\theta\sin\varphi - \cos 2(n+1)\alpha\cos\theta\right) & \text{当} n = 2k+1 \text{时} \\ \arccos\left(\sin 2n\alpha\sin\theta\sin\varphi - \cos 2n\alpha\cos\theta\right) & \text{当} n = 2k \text{时} \end{cases}$$

(3-4-9)

方位角 φ_r 可以一般地表示为

$$\varphi_r = \arccos\left(\frac{l_{outx}}{\sqrt{l_{outx}^{\ 2} + l_{outy}^{\ 2}}}\right)。 \qquad (3\text{-}4\text{-}10)$$

其中

$$l_{outx} = \sin\theta\cos\varphi$$

$$l_{outy} = \begin{cases} -\cos 2(n+1)\alpha\sin\theta\sin\varphi - \sin 2(n+1)\alpha\cos\theta & \text{当} n = 2k+1 \text{时} \\ \cos 2n\alpha\sin\theta\sin\varphi + \sin 2n\alpha\cos\theta & \text{当} n = 2k \text{时} \end{cases}$$

出射波线功率

入射光线 P_0P_1 的方向用向量表示为

$\vec{l}_{in} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, -\cos\theta)$，

第 k 块扇形柱块面法向量可以表示为：

$$\vec{n}_k = (1,0,0)\times(0,\sin(2k-1)\alpha,\cos(2k-1)\alpha)$$
$$= (0,-\cos(2k-1)\alpha,\sin(2k-1)\alpha)$$

入射光线 P_0P_1 的相反向量与该反射面的法向量 $\vec{n}_k$ 之间夹角 $\left\langle \overrightarrow{P_1P_0},\vec{n}_k \right\rangle$ 即为第 k 次反射的入射角 ω_k。

$$\cos(\omega_k) = \cos\left(\left\langle \overrightarrow{P_1P_0},\vec{n}_k \right\rangle\right) = \frac{\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}_k}{\left\|\overrightarrow{P_1P_0}\right\|\cdot\left\|\vec{n}_k\right\|}$$
$$= \cos(2k-1)\alpha\sin\theta\sin\varphi + \sin(2k-1)\alpha\cos\theta$$

第 k 次反射时反射率为 $\rho_k = \rho\cos(\omega_k)$

出射光线的功率为 $\rho_r = \rho^n\prod_{k=1}^{n}\cos(\omega_k)$

结论：出射光线功率可以一般地表示为

$$\rho_r = \rho^n\prod_{k=1}^{n}\left(\cos(2k-1)\alpha\sin\theta\sin\varphi + \sin(2k-1)\alpha\cos\theta\right) \qquad (3\text{-}4\text{-}11)$$

4. 问题二分析与求解

4.1 问题二分析

为了分析微波暗室的性能，主要是分析静区从诸墙面得到的反射信号的功率之和与从信号源直接得到的微波功率之比 γ，看是否满足仿真要求。因此，本文需要建立微波暗室的反射模型，以求得静区得到的反射信号功率之和。由于各墙面之间是相互影响的，所以它们之间的特征量不是谁先谁后的问题，而是组成一个复杂系统。因此，为了建立暗室反射模型，本文采用延拓的办法，结合平面镜成像的虚像原理，将暗室延拓成无数个暗室进行计算，后面本文将对具体延拓模型进行详细的介绍。

4.2 建立坐标系

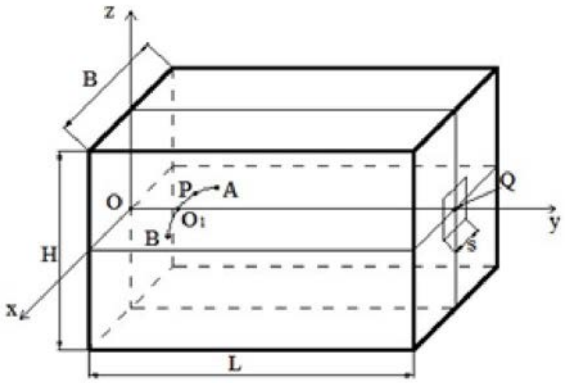

图 11 暗室反射模型空间直角坐标系

如上图所示，以 O 点为圆心，建立空间直角坐标系，则 Q 点坐标为 $(0, L, 0)$，$O_1(0,1,0)$。

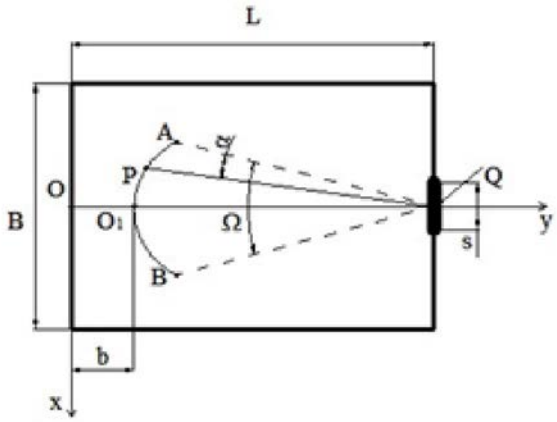

图 12 暗室反射模型空间横切面直角坐标系

接下来分析 xoy 截面上，视在目标的运动过程，如上图所示，视在目标由 B 点匀角速运动到 A 点，前后共 4 秒，且目标模拟器对导引头的总张角为 45°，所以可知角速度为 $\frac{\pi}{16} rad/s$，记 θ_t 为 t 时刻 $\angle PQO_1$ 的大小，规定在 x 轴正方向，即弧 BO_1 上 θ_t 符号为正，在 x 轴负方向，即弧 AO_1 上 θ_t 取负号，则可知在 t 时刻，QP 与 QO_1 的夹角为：

$$\theta_t = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} t, \quad 0 \le t \le 4 \tag{4-2-1}$$

则转化到上面的空间直角坐标系中，P 点在 t 时刻的坐标为：

$$P_t = (R\sin\theta_t, L - R\cos\theta_t, 0) \tag{4-2-2}$$

接下来，考虑 P 点在 t 时刻中心轴线处的发射功率强度，依题意知，其发射功率强度随时间线性增大，结束时比初始时增大一倍，设 I_0 为初始时刻的发射功率强度，则 t 时刻 P 点的发射功率强度为：

$$I_t = I_0(1+\frac{t}{4}), \quad 0 \le t \le 4 \qquad (4\text{-}2\text{-}3)$$

接下来为了计算静区从信号源直接得到的功率和从诸墙面得到的反射信号的功率之和，我们首先建立了一个余弦辐射体点信号源到一个余弦辐射体点信号源上的辐射模型，便于后面计算。

4.3 余弦辐射体的点信号源到有界平面的辐射模型

首先，本文建立一个余弦辐射体点信号源到一个有界平面上的辐射模型，如图 13 所示，这里假定该有界平面为一正方形平面 Ω，其大小为 $s \times s$，$\vec{n}$ 为该平面的单位法向量，$Q' = (Q_x, Q_y, Q_z)$ 为该正方形平面的中心点，$P = (P_x, P_y, P_z)$ 为信号源点，$\overrightarrow{PQ}$ 为该点信号源辐射体的法向方向，也就是该点信号源辐射强度最大的方向。

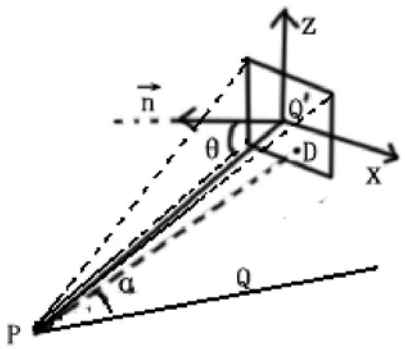

图 13 单个余弦辐射体点信号源到一个有界平面上的辐射模型

则该平面 Ω 上任意一点 D，$D \in \Omega$ 的坐标可以写成：

$$D = Q' + (x, 0, z), \quad -s/2 \le x, z \le s/2 \qquad (4\text{-}3\text{-}1)$$

则当点信号源 P 辐射到 D 点时，在平面上 D 的辐射照度为：

$$E(x,z) = E(D) = \frac{I}{r^2}\cos\theta \qquad (4\text{-}3\text{-}2)$$

其中

$$I = I_N \cos\alpha = I_N \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PD}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \left|\overrightarrow{PD}\right|} \qquad (4\text{-}3\text{-}3)$$

表示与点辐射源的法向成 α 角方向的辐射强度。

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{PD} \cdot \vec{n}}{\left|\overrightarrow{PD}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \frac{\overrightarrow{PD} \cdot \vec{n}}{\left|\overrightarrow{PD}\right|} \qquad (4\text{-}3\text{-}4)$$

表示辐射方向与平面法向的夹角。

$$r = \frac{\overrightarrow{PD} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} = \overrightarrow{PD} \cdot \vec{n} \qquad (4\text{-}3\text{-}5)$$

结合式（4-3-1**）-（**4-3-5**），则整个平面得到的辐射功率为：**

$$\begin{aligned}\Phi(P,Q',I_N) &= \int_{\Omega} E(D)dD \\ &= \int_{\Omega} I_N \frac{(\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PD})}{\left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \left|\overrightarrow{PD}\right|} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{(\overrightarrow{PD} \cdot \vec{n})}{\left|\overrightarrow{PD}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} dD \qquad (4\text{-}3\text{-}6) \\ &= \frac{I_N}{\left|\overrightarrow{PQ}\right| \left|\vec{n}\right|} \int_{\Omega} \frac{(\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PD})(\overrightarrow{PD} \cdot \vec{n})}{r^2 \left|\overrightarrow{PD}\right|^2} dD\end{aligned}$$

特别的，由前面的空间直角坐标系中可以看到，信号源点都落在在圆弧 AB **上，所以有** $P_z = 0$ **，而在我们后面考虑的正方形平面都是垂直于** y **轴（平行于** xoz **平面），所以有** $\vec{n} = (0,1,0)$ **，则：**

$$r = \overrightarrow{PD} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{PQ'} \cdot \vec{n} = Q'_y - P_y \qquad (4\text{-}3\text{-}7)$$

因为 Q **点表示静区的中心点，其坐标为** $Q = (0, L, 0)$ **，所以有：**

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = R$$

$$\overrightarrow{PQ} = (-P_x, L - P_y, P_z) \qquad (4\text{-}3\text{-}8)$$

又因为：

$$\overrightarrow{PD} = (Q'_x +_x - P_x, Q'_y - P_y, Q'_z + z - P_z) \qquad (4\text{-}3\text{-}9)$$

$$\left|\overrightarrow{PD}\right|^2 = (Q'_x +_x - P_x)^2 + (Q'_y - P_y)^2 + (Q'_z + z - P_z)^2 \qquad (4\text{-}3\text{-}10)$$

将式（4-3-7**）-（**4-3-10**）代入到式子（**4-3-6**）中，则有：**

$$\Phi(P,Q',I_N)=\frac{I_N}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\left|\vec{n}\right|}\int_{\Omega}\frac{(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PD})(\overrightarrow{PD}\cdot\vec{n})}{r^2\left|\overrightarrow{PD}\right|^2}dD$$

$$=\frac{I_N(Q'_y-P_y)}{(Q'_y-P_y)^2\left|\overrightarrow{PQ}\right|\left|\vec{n}\right|}\int_{\Omega}\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PD}}{\left|\overrightarrow{PD}\right|^2}dD$$

$$=\frac{I_N}{(Q'_y-P_y)R}\int_{\Omega}\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PD}}{\left|\overrightarrow{PD}\right|^2}dD$$

$$=\frac{I_N}{(Q'_y-P_y)R}\int_{Q_x'-\frac{s}{2}}^{Q_x'+\frac{s}{2}}\int_{Q_z'-\frac{s}{2}}^{Q_z'+\frac{s}{2}}\frac{-P_x(Q_x'+x-P_x)-P_z(Q_z'+z-P_z)+(L-P_y)(Q_y'-P_y)}{(Q_x'+x-P_x)^2+(Q_y'-P_y)^2+(Q_z'+z-P_z)^2}dxdz$$

$$\overset{\substack{u=Q_x'+x-P_x\\ v=Q_z'+z}}{=}\frac{I_N}{(Q'_y-P_y)R}\int_{-\frac{s}{2}-P_x}^{\frac{s}{2}-P_x}\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}}\frac{-P_xu+(L-P_y)(Q_y'-P_y)}{u^2+(Q_y'-P_y)^2+v^2}dudv$$

（4-3-11）

上式的被积分式比较复杂，没有显示积分解，考虑到后面运算，求其一个近视解，因为 $s=L$ **，因此对于** $\left|\overrightarrow{PD}\right|$ **，我们可以用** $\left|\overrightarrow{PQ'}\right|$ **来近似求解，即：**

$$\Phi(P,Q',I_N)=\frac{I_N}{(Q'_y-P_y)R}\int_{-\frac{s}{2}-P_x}^{\frac{s}{2}-P_x}\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}}\frac{-P_xu+(L-P_y)(Q_y'-P_y)}{u^2+(Q_y'-P_y)^2+v^2}dudv$$

$$=\frac{I_N}{(Q'_y-P_y)R\cdot\left|\overrightarrow{PQ'}\right|^2}\int_{-\frac{s}{2}-P_x}^{\frac{s}{2}-P_x}\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}}-P_xu+(L-P_y)(Q_y'-P_y)dudv \quad（4-3-12）$$

$$=\frac{I_Ns^2(P_x^2+(L-P_y)(Q_y'-P_y))}{(Q'_y-P_y)R\cdot\left|\overrightarrow{PQ'}\right|^2}$$

当然，如果在点辐射源到该平面辐射的过程中，有遇到反射的过程，还需要成上反射次数乘以辐射衰减因子，即设在该过程中反射次数为 N **，反射表面的反射率为** ρ **，则该平面的辐射功率为：**

$$\Phi(P,Q',I_N)=\rho^N\frac{I_Ns^2(P_x^2+(L-P_y)(Q_y'-P_y))}{(Q'_y-P_y)R\cdot\left|\overrightarrow{PQ'}\right|^2} \quad（4-3-13）$$

4.4 计算从信号源直接得到的微波功率

有了上面的余弦辐射体点信号源到有界平面的辐射模型，我们现在计算各个时刻 t **静区从信号源直接得到的微波功率，即在上面介绍的模型中，** Q' **与** Q

点重合。

由上面的分析知，t 时刻，信号源点 P 的坐标为：

$$P_t = (R\sin\theta_t, L - R\cos\theta_t, 0)\text{，}\ \theta_t = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16}t,\quad 0 \le t \le 4$$

则 t 时刻信号源点法向方向的发射强度为：

$$I_t = I_0(1+\frac{t}{4}),\quad 0 \le t \le 4$$

则 t 时刻，利用式子（4-3-12）静区平面从信号源直接得到的微波功率为：

$$\Phi_{direct}(t) = \Phi(P_t, Q, I_t)$$

$$= \frac{I_N s^2 (P_{t,x}^2 + (L - P_{t,y})(Q_y - P_{t,y}))}{(Q_y - P_{t,y}) \cdot R \cdot \left|\overrightarrow{PQ}\right|^2}$$

$$= \frac{I_t s^2 ((R\sin\theta_t)^2 + (L - (L - R\cos\theta_t))(L - (L - R\cos\theta_t)))}{(L - (L - R\cos\theta_t))) \cdot R \cdot R^2}$$

$$= \frac{I_t s^2}{R^2 \cos\theta_t}$$

$$= \frac{I_0(1+\frac{t}{4})s^2}{R^2\cos(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16}t)} = \frac{I_0(4+t)s^2}{4R^2\cos(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16}t)}$$

4.5 计算从诸墙面反射得到的微波功率

由于各墙面之间是相互影响的，因此，辐射源发出信号，经过各个墙面的反射到达静区的路径有多种多样，如果要一一去计算这些路径过程中传送的功率显然不可能，本文通过延拓的方法，应用平面镜反射成像中虚像的方法，将每个路径等价看成在一直线上传播的过程,当该直线每穿过一微波暗箱表面时，都被该表面吸收一部分辐射能。并结合上面建立的余弦辐射体点信号源到有界平面的辐射模型进行求解。下面，我们举个简单例子，就辐射波沿后表面反射一次到达静区时的延拓情况：

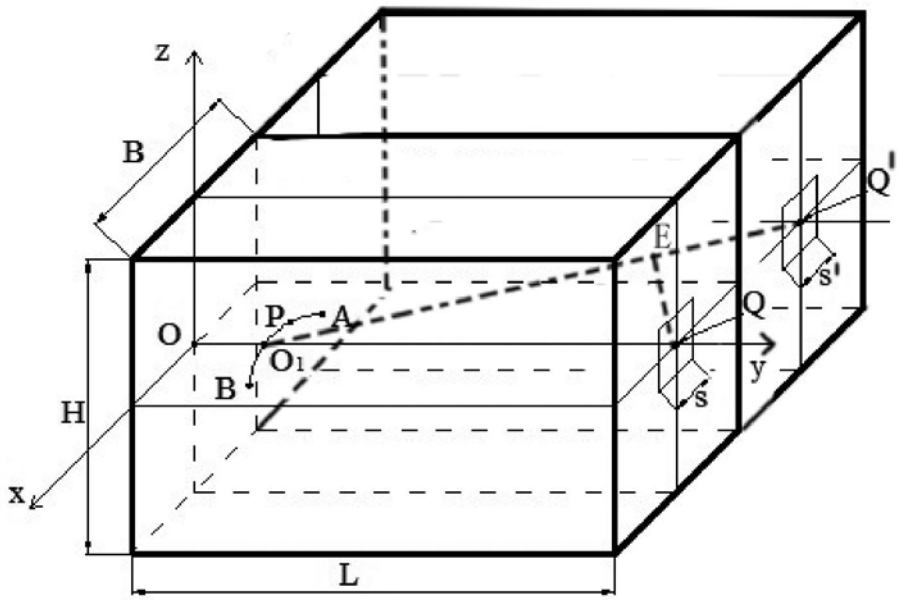

图 14 辐射波沿后表面反射一次到达静区时的延拓情况图

从上图可以看出，信号源点 P 沿后表面反射，反射点为 E，到达静区中心点 Q（这里信号源点辐射的路径应该是一束路径，而不是一条直线，反射点是一个四边形小区域，而不是一个点，为了画图方便，我们用直线来表示），从平面镜成像可知，信号的辐射路径等价于直线 PEQ'，直线与后表面的交点即是反射点 E，因此，此时要计算该情况下静区从后表面反射一次得到反射信号的功率可以通过以下式子计算：

$$\Phi = \rho \cdot \Phi(P, Q', I_N) \qquad (4\text{-}5\text{-}1)$$

其中，ρ 表示后表面的反射率，$\Phi(P, Q', I_N)$ 是 4.3 中我们建立的点信号源到有界平面的辐射模型中计算辐射功率的方法。

鉴于这种思想，我们建立一般情况下的延拓模型，由于要考虑到暗箱中各表面相互之间的影响，因此，我们将暗箱长方体在 x 轴正负方向，z 轴正负方向，y 轴正负方向（即整个空间上）进行无限延拓，如下图所示（为了图上看得更清楚，我们只画出包含静区的那个暗箱平面的延拓）：

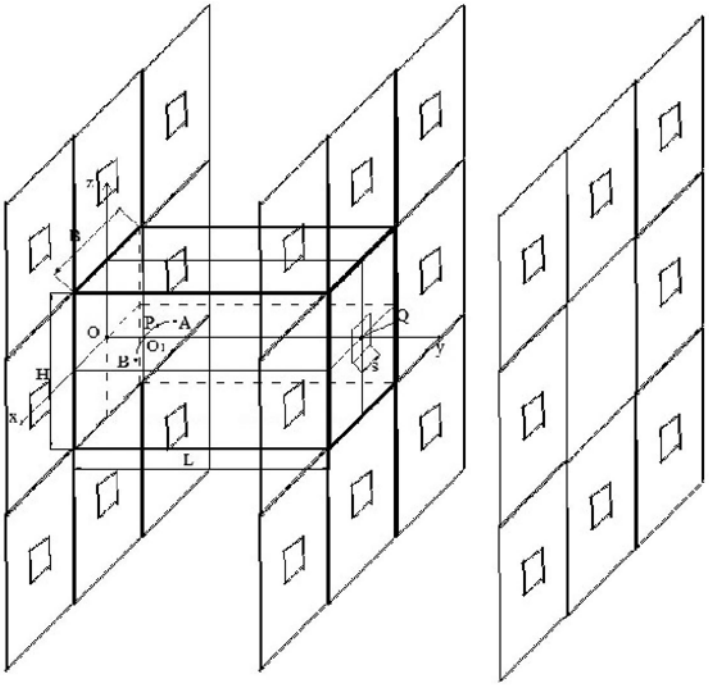

图 15 包含静区的暗箱平面延拓图

将上面的延拓图抽象出来，只取静区及静区的各个虚像，则可以用下图抽象的表示延拓的情况，则静区从诸墙面得到的反射信号的功率就等价于静区所有虚像直接从信号源点得到的功率之和（直射到虚像过程中需要考虑由于经过暗室表面所引起的功率耗损的情况）。

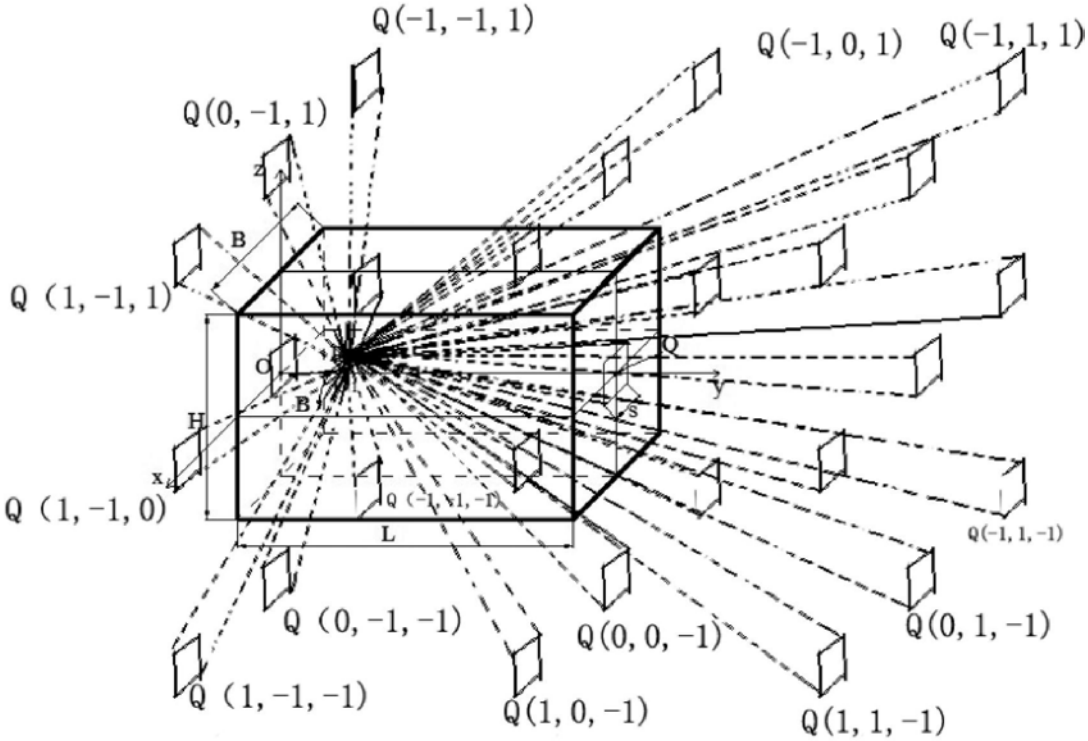

图 16 包含静区的暗箱平面延拓抽象图

记 Q_{ijk} 表示向 x 方向延拓 i 个单位，向 y 方向延拓 j 个单位，向 z 方向延拓

k 个单位的暗箱（长方体）中静区（虚像）中心点（一个单位代表一个长方体，i，j，k 为负的情况表示沿负方向延拓），其坐标可以表示为：

$$\begin{aligned} Q_{ijk} &= Q + (iB, jL, kH) \\ &= (0, L, 0) + (iB, jL, kH) \\ &= (iB, jL + L, kH), \quad i, j, k \in Z \end{aligned} \tag{4-5-2}$$

因为考虑到信号源一旦辐射到静区上，静区就能全部吸收，而不会再发生反射，因此在 y 轴上除了真实的静区外，不再进行延拓其他静区虚像的延拓，即 i，k 不能同时为 0，所以有：

$$|i| + |k| > 0 \tag{4-5-3}$$

则信号源点通过反射到达 Q_{ijk} 点时，其经过的反射次数为：

$$N_{ijk} = |i| + |j| + |k| \tag{4-5-4}$$

又由于信号辐射源点是一余弦辐射体，因此，从下图可以看出，当某一方向与辐射源法向方向超过 90°时，辐射源在这一方向是不发生辐射的，所以 $\overrightarrow{PQ_{ijk}}$ 与 $\overrightarrow{PQ}$ 的夹角应该落在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内，即：

$$\overrightarrow{PQ_{ijk}} \cdot \overrightarrow{PQ} > 0 \tag{4-5-5}$$

则在 t 时刻，信号源点 P_t 经过反射到 Q_{ijk} 点所在的静区虚像的功率可以计算为（由点信号源到有界平面的辐射模型）：

$$\Phi_{ijk,t} = \rho^{N_{ijk}} \Phi(P_t, Q_{ijk}, I_t) \tag{4-5-6}$$

其中，

$$P_t = (R\sin\theta_t, L - R\cos\theta_t, 0)，\quad \theta_t = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16}t, \quad 0 \le t \le 4$$

$$I_N = I_t = I_0(1 + \frac{t}{4}), \quad 0 \le t \le 4$$

$$Q_{ijk} = (iB, jL + L, kH), \quad i, j, k \in Z \tag{4-5-7}$$

将式子（4-5-1）-（4-5-7）代入到式子（4-3-13），则有：

$$
\begin{aligned}
\Phi_{ijk,t} &= \rho^{N_{ijk}}\Phi(P_t, Q_{ijk}, I_t) \\
&= \rho^{N_{ijk}} \frac{I_t s^2 (P_{t,x}^2 + (L - P_{t,y})(Q_{ijk,y}' - P_{t,y}))}{(Q_{ijk,y}' - P_{t,y}) R \cdot \left|\overrightarrow{P_t Q'}\right|^2} \\
&= \rho^{N_{ijk}} \frac{I_t s^2 ((R\sin\theta_t)^2 + R\cos\theta_t \cdot (jL + R\cos\theta_t))}{(jL + R\cos\theta_t) R \cdot \left|\overrightarrow{P_t Q'}\right|^2} \qquad (4\text{-}5\text{-}8) \\
&= \rho^{N_{ijk}} \frac{I_t s^2 (R + jL\cos\theta_t)}{(jL + R\cos\theta_t) \cdot \left|\overrightarrow{P_t Q'}\right|^2} \\
&= \rho^{N_{ijk}} \frac{I_t s^2 (R + jL\cos\theta_t)}{(jL + R\cos\theta_t) \cdot \left((iB - R\sin\theta_t)^2 + (jL - R\cos\theta_t)^2 + k^2 H^2\right)}
\end{aligned}
$$

则可以计算出 t **时刻，静区从诸墙面得到的反射信号的功率之和为（即各个虚拟静区所接收到的功率之和）：**

$$
\begin{aligned}
\Phi_{indirect}(t) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{k=-\infty \\ |i|+|k|>0}}^{\infty} \Phi_{ijk,t} \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{k=-\infty \\ |i|+|k|>0, \overrightarrow{PQ_{ijk}} \cdot \overrightarrow{PQ}>0}}^{\infty} \rho^{N_{ijk}} \frac{I_t s^2 (R + jL\cos\theta_t)}{(jL + R\cos\theta_t) \cdot \left((iB - R\sin\theta_t)^2 + (jL - R\cos\theta_t)^2 + k^2 H^2\right)}
\end{aligned}
$$

(4-5-9)

4.6 实验结果

4.6.1 暗室铺设平板形吸波材料

分别计算各个时刻静区从诸墙面得到的反射信号功率和直接从信号源得到的功率，由于 $\Phi_{indirect}(t)$ **无穷项相加，在数值计算上，本文取反射次数在** 600 **次以内的情况（即** $-100 \le i, j, k \le 100$**），其他实验参数为：** $I_0 = 1000$**，** $B = 18m$**，** $H = 14m$**，** $L = 15m$**，** $R = 14m$**，** $\rho = 0.50$**，** $s = 0.3m$**，实验仿真结果如下：**

时间	直射得到的功率	墙面反射的功率之和	反射 /直射
0	0.497017	0.041837	0.084176
0.1	0.505429	0.043533	0.086131
0.2	0.513907	0.042206	0.082127
0.3	0.522459	0.043840	0.08391
0.4	0.531096	0.045517	0.085704
0.5	0.539826	0.047891	0.088715
0.6	0.548661	0.049537	0.090287

0.7	0.557608	0.050848	0.09119
0.8	0.566678	0.052499	0.092644
0.9	0.57588	0.054003	0.093775
1	0.585225	0.056340	0.096271
1.1	0.594721	0.057940	0.097425
1.2	0.60438	0.059839	0.09901
1.3	0.614211	0.061427	0.100009
1.4	0.624225	0.063107	0.101096
1.5	0.634433	0.047991	0.075643
1.6	0.644845	0.049083	0.076116
1.7	0.655474	0.050131	0.07648
1.8	0.66633	0.044642	0.066996
1.9	0.677426	0.042080	0.062117
2	0.688776	0.042623	0.061883
2.1	0.70039	0.043506	0.062117
2.2	0.712284	0.047721	0.066996
2.3	0.724471	0.055408	0.07648
2.4	0.736966	0.056095	0.076116
2.5	0.749784	0.056716	0.075643
2.6	0.762941	0.077130	0.101096
2.7	0.776455	0.077653	0.100009
2.8	0.790343	0.078251	0.09901
2.9	0.804623	0.078390	0.097425
3	0.819314	0.078876	0.096271
3.1	0.834438	0.078249	0.093775
3.2	0.850017	0.078749	0.092644
3.3	0.866072	0.078977	0.09119
3.4	0.882628	0.079690	0.090287
3.5	0.899711	0.079818	0.088715
3.6	0.917347	0.078620	0.085704
3.7	0.935566	0.078504	0.08391
3.8	0.954398	0.078382	0.082127
3.9	0.973876	0.083881	0.086131
4	0.994034	0.083674	0.084176

画出时间与功率比对应的关系图如下：

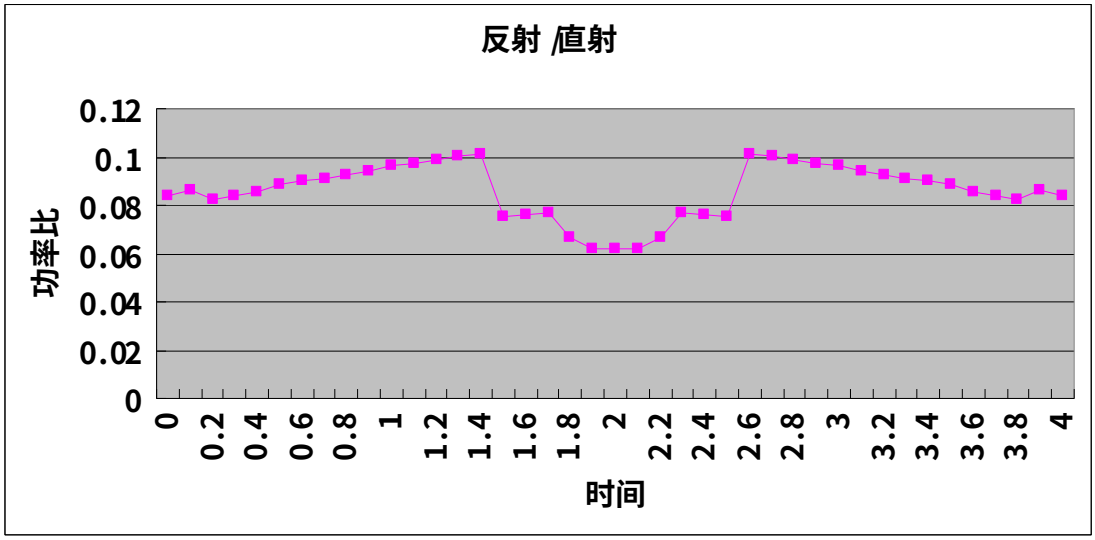

图 17 平板形吸波体时间与功率对应比

可以看出，当 t=2 的时候，即 P 点移动到圆弧的中心时，此时反射与直射的功率之比最小。但均不满足 $\gamma \le 0.03$ 的仿真要求。

4.6.2 暗室铺设尖劈形吸波材料

考虑暗室表面改为铺设尖劈形吸波材料，或者其他吸波性能更好的平板形吸波材料，其反射率为 $\rho = 0.05$，其他参数设置同上，$I_0 = 1000$，$B = 18m$，$H = 14m$，$L = 15m$，$R = 14m$，$s = 0.3m$，则仿真结果如下：

时间	直射得到的功率	墙面反射的功率之和	反射 /直射
0	0.497017	0.0000050	0.0000101
0.1	0.505429	0.0000052	0.0000104
0.2	0.513907	0.0000054	0.0000104
0.3	0.522459	0.0000056	0.0000107
0.4	0.531096	0.0000058	0.0000110
0.5	0.539826	0.0000061	0.0000113
0.6	0.548661	0.0000063	0.0000115
0.7	0.557608	0.0000066	0.0000118
0.8	0.566678	0.0000068	0.0000120
0.9	0.57588	0.0000070	0.0000122
1	0.585225	0.0000073	0.0000125
1.1	0.594721	0.0000075	0.0000127
1.2	0.60438	0.0000078	0.0000128
1.3	0.614211	0.0000080	0.0000130
1.4	0.624225	0.0000082	0.0000132
1.5	0.634433	0.0000012	0.0000019

1.6	0.644845	0.0000012	0.0000019
1.7	0.655474	0.0000012	0.0000019
1.8	0.66633	0.0000010	0.0000015
1.9	0.677426	0.0000010	0.0000015
2	0.688776	0.0000010	0.0000015
2.1	0.70039	0.0000010	0.0000015
2.2	0.712284	0.0000011	0.0000015
2.3	0.724471	0.0000014	0.0000019
2.4	0.736966	0.0000014	0.0000019
2.5	0.749784	0.0000014	0.0000019
2.6	0.762941	0.0000100	0.0000132
2.7	0.776455	0.0000101	0.0000130
2.8	0.790343	0.0000101	0.0000128
2.9	0.804623	0.0000102	0.0000127
3	0.819314	0.0000102	0.0000125
3.1	0.834438	0.0000102	0.0000122
3.2	0.850017	0.0000102	0.0000120
3.3	0.866072	0.0000102	0.0000118
3.4	0.882628	0.0000102	0.0000115
3.5	0.899711	0.0000101	0.0000113
3.6	0.917347	0.0000101	0.0000110
3.7	0.935566	0.0000100	0.0000107
3.8	0.954398	0.0000100	0.0000104
3.9	0.973876	0.0000101	0.0000104

画出时间与功率比对应的关系图如下：

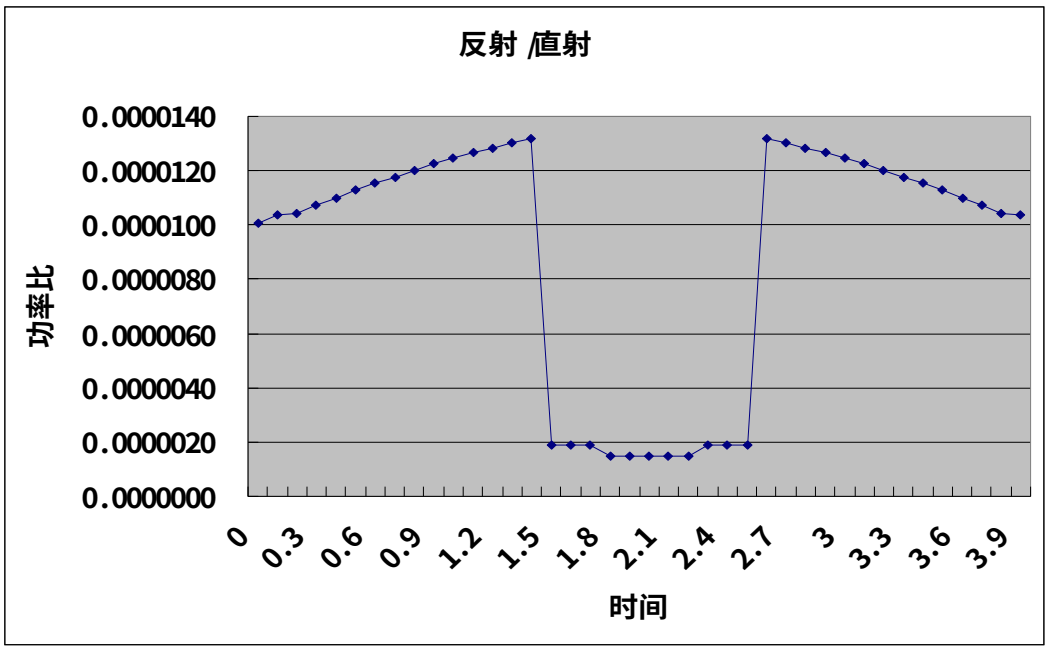

图 18 尖劈形吸波体时间与功率对应比

可以看出，当 t=2 的时候，即 P 点移动到圆弧的中心时，此时反射与直射的功率之比最小，且任何时候都能满足 $\gamma \le 0.03$ 的仿真要求。

参考文献

[1] 刘顺华等，电磁波屏蔽及吸波材料，化学工业出版社，2007.8

[2] Bhag Singh Gurn, Huseyin R. Hiziroglu, Electromagnetic Field Theory Foundamentals,周克定，张肃文等译，机械工业出版社，2000

[3] 张以漠，应用光学，机械工业出版社，1988

[4] 颜永台，积分法测量光通量的原理，2011

[5] 宋风忠，利用矩阵处理几何光学中的几个成像问题