

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

# 第九届“华为杯” 全国研究生数学建模竞赛

学 校	西北工业大学
参 赛	
队 号	B10699008
队 员	1. 程 漪
姓 名	2. 梁 雍
	3. 孟祥尧

参赛密码 \_\_\_\_\_

(由组委会填写)

# 第九届“华为杯”全国研究生数学建模竞赛



题 目 空间飞行器轨道估计与误差分析

## 摘 要:

卫星探测是当今空间飞行器观测与轨道估计的重要方式。论文针对空间飞行器轨道估计及卫星无源探测的误差分析的问题,通过使用样条插值或拟合的方法对有误差的数据进行光滑处理,然后基于交汇的思想建立了运动方程参数模型,采用最小二乘法估计参数,得到了空间飞行器的轨道估计,并使用 LMF 法进行了系统误差分析。

对于问题一,利用卫星的初始位置和速度以及简化运动模型,将问题转化为常微分方程组的初值问题,采用 4 阶龙格库塔积分求解得到结果。

对于问题二,利用逐点交汇的思路,将 0 号空间飞行器在 06、09 号卫星观测坐标系下的坐标转换到基准坐标系下,由于误差的存在,转换后的点并不交汇,于是通过最小二乘法求解飞行器在惯性系下的近似交汇位置。随后使用差分法求解飞行器在惯性系下的速度和加速度。在差分过程中,由于从观测量所得的飞行器位置信息含有随机误差,所以通过拟合的方法将其中的随机误差进行消除,防

止随机误差对差分的影响。

为建立合理的空间飞行器运动方程，根据相关文献，设  $\bar{v}_r(t)$  大小恒定，方向与  $\bar{v}(t)$  相反； $m(t)$  设为一次线性函数，质量变化率为固定值。将所求的飞行器位置点带入其运动方程得到矛盾方程组，使用最小二乘法对模型参数进行估计，得到飞行器轨道估计，相关结果符合相关文献中的记录。最后由估计值与观测值计算得残差： $\varepsilon_{6\alpha} = 0.9295 \times 10^{-3}$ ， $\varepsilon_{6\beta} = 0.5001 \times 10^{-3}$ ； $\varepsilon_{9\alpha} = 1.0696 \times 10^{-3}$ ， $\varepsilon_{9\beta} = 0.2776 \times 10^{-3}$ 。

对于问题三，由于三轴指向误差表现为二维观测数据平面上的两个平移误差和一个旋转误差，分别设为  $d\alpha$ 、 $d\beta$  和  $d\theta$ 。将这些误差量叠加到观测量  $\alpha$ 、 $\beta$  后再根据卫星同步观测逐点交汇的思路，利用 LMF 方法求解超定非线性方程组，得  $d\alpha_6 = 0.0016$ ， $d\beta_6 = -4.75 \times 10^{-5}$ ， $d\theta_6 = 0.0395$ ； $d\alpha_9 = -0.0167$ ， $d\beta_9 = -0.0241$ ， $d\theta_9 = 0.04$ 。

对于问题四，对于单星观测的情况，通过添加约束和先验信息，可以得到大致的轨道估计。一方面，认为飞行器轨道上的点共面且均在过地心的平面内，由此增加约束，并结合已知的运动方程进行求解。另一反面，可以通过建立飞行器轨道模版数据库与观测相对比，了解识别是何种飞行器。

本文所使用的方法有效地建立了空间飞行器的运动参数模型，得到了一定精度的轨道估计，分析出了系统误差，但部分方法存在求解复杂，结果不稳定的缺点。

**关键词：**样条插值，运动方程参数模型，最小二乘法，LMF 法

## 目 录

1 问题重述.....	5
2 符号说明 .....	6
3 问题背景及分析 .....	6
3.1 问题背景 .....	6
3.2 问题分析.....	9
4 基本假设.....	9
5 问题 1.....	9
6 问题 2 .....	10
6.1 观测位置求解.....	10
6.1.1 数据处理.....	10
6.1.2 坐标系的转换.....	10
6.1.3 观测位置的计算.....	11
6.2 飞行器运动方程中参数的确定 .....	11
6.2.1 参数确定的模型 .....	11
6.2.2 计算方法与结果 .....	12
6.3 飞行器轨迹结果.....	13
6.4 计算估计残差.....	14
7 问题 3.....	15
7.1 系统误差模型的证明.....	15
7.2 系统误差估计 .....	16
7.3 飞行器轨道估计 .....	17
7.3.1 观测位置的计算 .....	17
7.3.2 运动方程的确定 .....	17
7.3.3 飞行器轨迹结果 .....	18
7.4 计算估计残差.....	19
8 问题 4.....	20
9 总结与展望.....	21
参考文献.....	21

## 1 问题重述

有些国家会发射特殊目的的空间飞行器，如弹道式导弹、侦察卫星等。对他国发射具有敌意的空间飞行器实施监控并作出快速反应，对于维护国家安全具有重要的战略意义。卫星居高临下，是当今探测空间飞行器发射与轨道参数的重要平台。

观测卫星按轨道特点，可分为高轨地球同步轨道卫星和中低轨近圆轨道卫星。装置于卫星上的探测器包括有源和无源两类：有源探测器采用主动方式（如雷达，激光）搜寻目标，同时具备定向和测距两种能力；无源探测器则被动接收目标辐射。采用无源探测器的观测卫星常采用红外光学探测器，只接收目标的红外辐射信息，可定向但不能测距。

探测的目的是为了推断空间飞行器的轨道参数，推断是基于观测数据并通过数学模型与计算方法作出的。当观测卫星飞行一段时间，探测器测得目标相对于运动卫星的观测数据，以观测卫星和空间飞行器的运动模型和观测模型为基础，对空间飞行器的轨道参数（包括轨道位置、速度初值和其他模型参数）进行数学推断，为飞行器类别、飞行意图的判断提供信息基础。

本题要求在仅考虑随机误差的条件下，处理以下问题：

**问题一、**观测卫星在任意时刻的位置计算是估计的前提，请根据 `satinfo.txt` 和观测卫星的简化运动方程（2），计算 09 号观测卫星在 50.0s、100.0s、150.0s、200.0s、250.0s 五个时刻的三维位置。结果保留 6 位有效数字。

**问题二、**在本题给定的仿真数据下，06 号和 09 号观测卫星对 0 号空间飞行器形成了立体交叠观测，请结合立体几何知识按照逐点交汇定位的思路，给出 0 号空间飞行器在公式（1）框架下的轨道估计，注意选取适当的  $\vec{v}_r(t)$  和  $m(t)$  的表示模型。按照从 50.0s 到 170.0s 间隔 10.0s 进行采样，计算并列表给出 0 号空间飞行器在各个采样点的位置和速度，并给出估计残差。结果保留 6 位有效数字。同时绘制 0 号空间飞行器的三个位置  $t$ - $x$ 、 $t$ - $y$ 、 $t$ - $z$  和三个速度  $t$ - $v_x$ 、 $t$ - $v_y$ 、 $t$ - $v_z$  曲线示意图。

在同时考虑系统误差的条件下，进一步研究下列问题：

**问题三、**若 06 和 09 号两颗观测卫星均有可能带有一定的系统误差，对系统误差进行正确的估计能够有效提高精度。利用上述的逐点交汇方法能否同时对系统误差进行估计？若不能，是否还有其他的思路能够同时估计系统误差与轨道？给出你的解决方案与估计结果。在报告中除给出与第二问要求相同的结果外，还应分别给出两颗观测卫星的系统误差估计结果，共六个数值，分别是两颗卫星的  $d_\alpha, d_\beta, d_\theta$ 。

时间允许条件下，还可考虑：

**问题四、**对只有 09 号观测卫星单星观测的 01 号空间飞行器进行轨道估计，结果形式要求同第三问，注意参考第三问的系统误差估计结果。并进一步考虑在同时有多颗观测卫星观测多个空间飞行器的情况下能否联合进行系统误差估计？

## 2 符号说明

符号	含义
$G_m$	地球引力常数
$\vec{r}(t)$	空间飞行器在基础坐标系下的位置矢量
$\ddot{\vec{r}}(t)$	$\vec{r}(t)$ 对时间 $t$ 的二阶导数，即加速度
$m(t)$	瞬时质量
$\dot{m}(t)$	质量变化率
$\vec{v}_r(t)$	燃料相对于火箭尾部喷口的喷射速度的矢量

## 3 问题背景及分析

### 3.1 问题背景

空间飞行器轨道一般可分为三段，依次为：靠火箭推进的主动段、在地球外层空间的惯性飞行段和再入大气层后的攻击段。主动段通常由多级火箭相继推进，前一级火箭完成推进后脱落，由后一级火箭接力。惯性飞行段在空气阻力极小的大气层外，靠末级火箭关机前获得的速度在椭圆轨道上作无动力惯性飞行。攻击段则根据任务需求，受控制后再入大气层，飞向目标。对于卫星而言，在其寿命结束前一直绕地飞行，故无攻击段。

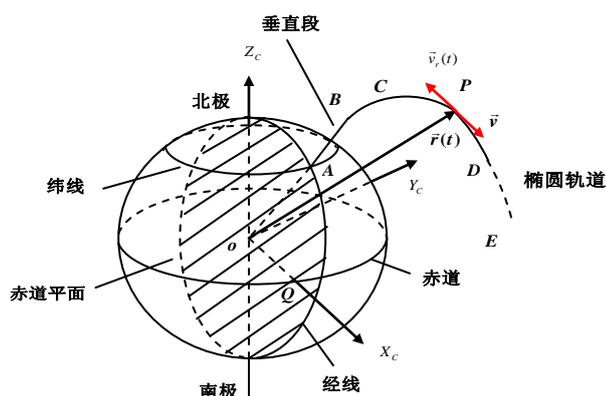


图 3-1 空间飞行器主动段轨道的示意图

图 3-1 是空间飞行器的主动段示意图（未按实际比例）。主动段又可细分为若干子段：垂直上升段，程序拐弯段和重力斜飞段。按最优轨道设计，为节约燃料，箭体应尽快穿过稠密大气层，故火箭一般先垂直发射。设 A 点为地面发射点，AB 为垂直上升段，BC 弧段为程序拐弯段，CD 弧段为重力斜飞段，DE 弧

段为椭圆轨道。程序拐弯段连接垂直上升段与重力斜飞段，在外力矩控制下使箭体转过一定角度，该段完成后外加力矩撤销，进入斜飞状态。第一级火箭通常负担“垂直段+程序拐弯段（加外力矩）+重力斜飞段的前段”的推进（视发动机的特性），重力斜飞段的后程则靠第二、第三级火箭相继完成。由于斜飞状态下地球引力与推力不在同一直线，所以箭体质心的运动轨迹为带一定弧度的光滑曲线。

为描述观测卫星和空间飞行器的运动，需要建立适当的坐标系。本题基础坐标系为随地心平移的坐标系，取地球中心 $O_c$ 为原点，地球自转轴取为 $z$ 轴，指向北极为正向， $x$ 轴由 $O_c$ 指向零时刻的0经度线，再按右手系确定 $y$ 轴，建立直角坐标系 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 。地心 $O_c$ 在绕日椭圆轨道上运动，所以理论上 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 系是非惯性系。但地球公转周期远大于空间飞行器的观测弧段时长，故本题在短时间内认定该系为惯性坐标系，该基础坐标系不随地球旋转。

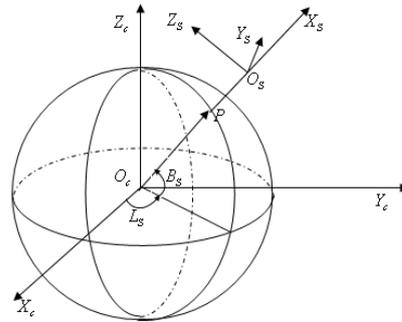


图 3-2 观测坐标系示意图

第二个坐标系是随卫星运动的观测坐标系 $O_s - X_s Y_s Z_s$ ，见图 3-2，原点取为卫星中心 $O_s$ ， $X_s$ 轴沿 $O_c O_s$ 连线，离开地球方向为正， $Z_s$ 轴与 $X_s$ 垂直指向正北， $Y_s$ 轴按右手系确定。由于一般测量卫星的轨道都不会严格经过南北极上空，所以这种坐标系的定义是明确的。如此定义的观测坐标系也叫做 UEN 坐标系，因为三个坐标轴分别指向上（UP）、东（EAST）和北（NORTH）三个方向。

记飞行器在惯性系中的位置向量为 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  速度向量为： $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ ；燃料相对于火箭尾部喷口的喷射速度的矢量用 $\vec{v}_r(t)$ 表示，其方向一般应与飞行器的速度方向接近反向共线，其大小一般较为稳定； $m_0$ 为飞行器初始总质量， $m(t)$ 为瞬时质量，而 $\dot{m}(t)$ 是质量变化率。

由牛顿第二定律知，飞行器在惯性坐标系中的运动方程可表示为：

$$m(t)\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e(t) + \vec{F}_T(t) \quad (3-1)$$

其中 $\vec{F}_e(t)$ 为火箭受到的外力之和； $\vec{F}_T(t)$ 为火箭推力，由相对于火箭喷口高速燃烧喷射物的动量产生。

假设 $\vec{F}_e$ 只包含指向地心的地球引力（不考虑空气阻力和太阳引力等），则有

$$\vec{F}_e(t) = -m(t) \frac{kM}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) = -\frac{G_m m(t)}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) \quad (3-2)$$

其中  $M$  为地球质量,  $k$  为万有引力常数,  $G_m = kM$ , 取  $G_m = 3.986005 * 10^{14} m^3 / s^2$ 。

火箭推力  $\vec{F}_T(t)$  主要受以下两个因素的影响<sup>[1]</sup>:

1、发动机的质量变化率: 单位时间内消耗的燃料质量, 用  $\frac{dm(t)}{dt} = \dot{m}(t)$  表示, 为负值。

2、喷射物在分离时对火箭尾部喷口的相对速度  $\vec{v}_r(t)$ , 方向与飞行器的速度方向接近反向共线。

则  $\vec{F}_T$  可表示为:

$$\vec{F}_T(t) = \dot{m}(t)\vec{v}_r(t) = \frac{dm(t)}{dt}\vec{v}_r(t) \quad (3-3)$$

将 (3-2) 与 (3-3) 式代入 (3-1) 式, 可得

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (\vec{F}_e + \vec{F}_T)/m(t) = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3}\vec{r}(t) + \vec{v}_r(t)\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \quad (3-4)$$

上式即为空间飞行器在惯性坐标系下主动段的简化运动方程, 可以看出, 飞行器的运动受  $\vec{v}_r(t)$  和  $\dot{m}(t)$  的影响。不同空间飞行器的本质差异就在于  $\vec{v}_r(t)$  和  $\dot{m}(t)$  的模型不同,  $\dot{m}(t)$  一般而言应为严格单调递减的非负函数。 $\vec{v}_r(t)$  的方向一般应与飞行器的速度方向接近反向共线, 其大小一般较为稳定。

对观测卫星来讲,  $\vec{F}_T(t) = 0$ , 则其简化运动方程为:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3}\vec{r}(t) \quad (3-5)$$

观测卫星对于空间飞行器的观测数据通过化简可以由观测坐标系下的两个无量纲比值确定:

$$\alpha = \frac{y_s}{x_s}; \quad \beta = \frac{z_s}{x_s} \quad (3-6)$$

其中  $x_s, y_s, z_s$  为空间飞行器在观测坐标系中的坐标。

观测数据不可避免地带有各种误差, 观测误差包括随机误差和系统误差。本题假设随机误差为直接叠加在观测数据上的白噪声, 可能产生于背景辐射干扰与信息处理等多个方面。系统误差也包括多种来源, 如卫星定位误差、指向机构误差、图像校准误差、传感器安装误差等等。在本题框架内, 我们假定只考虑与卫星平台相关的系统误差, 即不同观测卫星的系统误差相互没有关联, 同一观测卫星对于不同空间飞行器的系统误差是一样的。经由适当的简化模型, 各种系统误差最终可以折合为观测坐标系的原点位置误差和三轴指向误差。根据工程经验, 原点位置误差影响较小, 而三轴指向误差影响较大, 对三轴指向误差进行估计对于提高估计精度很有帮助, 本题只考虑三轴指向误差。三轴指向误差在二维观测数据平面上表现为两个平移误差和一个旋转误差, 具体可以用三个常值小量  $d_\alpha, d_\beta, d_\theta$  来表示, 分别表示第一观测量  $\alpha$  的平移量、第二观测量  $\beta$  的平移量以及观测量在  $\alpha\beta$  平面内的旋转量。

### 3.2 问题分析

对于问题一，已知卫星零时刻在基础坐标系下的位置和速度  $(x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$  利用运动方程 (3-5)，问题就转化常微分方程初值问题，之后利用四阶龙格库塔法，可数值积分出卫星的运动轨迹。

对于问题二，首先根据第一问求出卫星在各时刻的位置，也即观测坐标系的原点  $O_s$ 。进而求出观测坐标系和基础坐标系的在  $O_s$  处的转化关系。逐点交汇的思路为：将 06 号和 09 号卫星对 0 号空间飞行器的观测坐标分别转化到惯性坐标系，理想情况下为同一点。由此构建方程，利用最小二乘法求解，可求得空间飞行器在各观测时刻的三维坐标  $\vec{r}(t)$ 。通过  $\vec{r}(t)$  进行一阶和二阶差分，可得观测时刻点的  $\dot{\vec{r}}(t)$  和  $\ddot{\vec{r}}(t)$ ，作为已知条件并代入飞行器的运动方程 (3-4)，对  $\vec{v}_r(t)$  和  $m(t)$  建立适当模型，并利用最小二乘法，这样就得到了式 (3-4)，问题就转化为如问题一的常微分方程的初值问题，从而获得 0 号空间飞行器的轨道估计。将估计值与之前求得的观测坐标求标准差，即获得估计残差。

对于问题三，设三轴指向误差表现为二维观测数据平面上的两个平移误差和一个旋转误差，分别用  $d\alpha$ 、 $d\beta$  和  $d\theta$  表示，分别代表第一观测量  $\alpha$ 、第二观测量  $\beta$  的平移量以及观测量在  $\alpha\beta$  平面内的旋转量。将这些误差量叠加到观测量  $\alpha$  和  $\beta$  后再根据卫星同步观测逐点定位的原则，利用最小二乘法求解出  $d\alpha$ 、 $d\beta$  和  $d\theta$ 。

对于问题四，单星观测时，认为空间飞行器轨道上任意三点的位置向量在过地心的平面内，由此增加约束，并结合已知的运动方程进行求解。另外，还可以通过建立飞行器轨道模版数据库与观测相对比，了解识别是何种飞行器。

## 4 基本假设

本文基于以下基本假设：

- 1、基础坐标系以地球中心  $O_e$  为原点，由于地球公转周期远大于空间飞行器的观测弧段时长，在短时间内认定该系为惯性坐标系。
- 2、假设随机误差为直接叠加在观测数据上的白噪声。
- 3、只考虑与卫星平台相关的系统误差，即不同观测卫星的系统误差相互没有关联，同一观测卫星对于不同空间飞行器的系统误差是一样的；系统误差只考虑三轴指向误差。
- 4、假设被研究的空间飞行器处于重力斜飞段的后期段。

## 5 问题 1

已知卫星在基础坐标系下的零时刻初始位置和速度为  $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ ，简化运动方程为：

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) \quad (5-1)$$

其中， $G_m$  为地球引力常数（本题中地球引力常数取  $G_m = 3.986005 \times 10^{14} m^3/s^2$ ）； $\vec{r}(t)$  为空间飞行器在基础坐标系下的位置矢量； $\ddot{\vec{r}}(t)$

表示  $\vec{r}(t)$  对时间  $t$  的二阶导数，即加速度。

问题就转化为求解二阶常微分方程的初值问题。利用四阶龙格库塔法分别积分求解 09 号观测卫星在 50.0s、100.0s、150.0s、200.0s、250.0s 五个时刻的三维位置，结果如表 5-1 所示。

表 5-1 09 号观测卫星在规定时刻的三维坐标

坐标 (m) 时刻 (s)	$x$	$y$	$z$
0	2.04392E+06	8.18650E+06	4.34346E+06
50	1.77381E+06	8.16138E+06	4.51670E+06
100	1.50163E+06	8.12676E+06	4.68468E+06
150	1.22770E+06	8.08270E+06	4.84722E+06
200	9.52349E+05	8.02925E+06	5.00413E+06
250	6.75894E+05	7.96650E+06	5.15524E+06

## 6 问题 2

### 6.1 观测位置求解

#### 6.1.1 数据处理

由于 06 号卫星和 09 号观测卫星的观测数据不同步，无法逐点交汇，所以需要对其数据进行处理。为方便起见，利用三次样条插值求得 50s 到 170s 的观测数据  $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ ，间隔为 0.2s。

已知  $t$  时刻空间飞行器的卫星观测数据  $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ ，设该时刻空间飞行器在观测坐标系下的位置为  $\vec{r}_s(t) = (x_s(t), y_s(t), z_s(t))$ ，基础坐标系下的位置为  $\vec{r}_{0c}(t) = (X, Y, Z)$ ，则

$$\alpha(t) = y_s(t)/x_s(t), \beta(t) = z_s(t)/x_s(t)$$

#### 6.1.2 坐标系的转换

利用问题 1 的方法，可分别求出 06 号卫星和 09 号卫星在  $t$  时刻的位置  $\vec{r}_6(t)$ 、 $\vec{r}_9(t)$ 。观测坐标系到基础坐标系的转换关系包括坐标原点的平移和坐标系的旋转，其中旋转矩阵  $\mathbf{R}_6(t)$ 、 $\mathbf{R}_9(t)$ 。 $\mathbf{R}_6(t)$ 、 $\mathbf{R}_9(t)$  分别为：

$$\begin{cases} \vec{i}_6(t) = \frac{\vec{r}_6(t)}{|\vec{r}_6(t)|} \\ \vec{j}_6(t) = \frac{\vec{k}_c \times \vec{r}_6(t)}{|\vec{k}_c \times \vec{r}_6(t)|} \\ \vec{k}_6(t) = \vec{i}_6(t) \times \vec{j}_6(t) \end{cases} \quad \vec{k}_c = (0, 0, 1) \quad (6-1)$$

$$\begin{cases} \vec{i}_9(t) = \frac{\vec{r}_9(t)}{|\vec{r}_9(t)|} \\ \vec{j}_9(t) = \frac{\vec{k}_c \times \vec{r}_9(t)}{|\vec{k}_c \times \vec{r}_9(t)|} \\ \vec{k}_9(t) = \vec{i}_9(t) \times \vec{j}_9(t) \end{cases} \quad \vec{k}_c = (0, 0, 1) \quad (6-2)$$

$$\mathbf{R}_6(t) = [\vec{i}_6^T(t), \vec{j}_6^T(t), \vec{k}_6^T(t)] = \begin{bmatrix} \vec{i}_{6x}(t), \vec{j}_{6x}(t), \vec{k}_{6x}(t) \\ \vec{i}_{6y}(t), \vec{j}_{6y}(t), \vec{k}_{6y}(t) \\ \vec{i}_{6z}(t), \vec{j}_{6z}(t), \vec{k}_{6z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{6x}(t) \\ R_{6y}(t) \\ R_{6z}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_9(t) = [\vec{i}_9^T(t), \vec{j}_9^T(t), \vec{k}_9^T(t)] = \begin{bmatrix} \vec{i}_{9x}(t), \vec{j}_{9x}(t), \vec{k}_{9x}(t) \\ \vec{i}_{9y}(t), \vec{j}_{9y}(t), \vec{k}_{9y}(t) \\ \vec{i}_{9z}(t), \vec{j}_{9z}(t), \vec{k}_{9z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{9x}(t) \\ R_{9y}(t) \\ R_{9z}(t) \end{bmatrix}.$$

则  $\mathbf{R}_6(t)\vec{r}_{s6}^T(t) + \vec{r}_6^T(t) = \vec{r}_{0c}^T(t)$ ，故  $\mathbf{R}_6^{-1}(t)(\vec{r}_{0c}^T(t) - \vec{r}_6^T(t)) = \vec{r}_{s6}^T(t)$ ，同理有，  
 $\mathbf{R}_9^{-1}(t)(\vec{r}_{0c}^T(t) - \vec{r}_9^T(t)) = \vec{r}_s^T(t)$  ( )

### 6.1.3 观测位置的计算

方程组化简为：

$$\begin{cases} \frac{\begin{bmatrix} R_{6y}^{-1}(t) \\ R_{6z}^{-1}(t) \end{bmatrix} (\vec{r}_{0c}^T(t) - \vec{r}_6^T(t))}{R_{6x}^{-1}(t) (\vec{r}_{0c}^T(t) - \vec{r}_6^T(t))} = \begin{bmatrix} \alpha_6(t) \\ \beta_6(t) \end{bmatrix} \\ \frac{\begin{bmatrix} R_{9y}^{-1}(t) \\ R_{9z}^{-1}(t) \end{bmatrix} (\vec{r}_{0c}^T(t) - \vec{r}_9^T(t))}{R_{9x}^{-1}(t) (\vec{r}_{0c}^T(t) - \vec{r}_9^T(t))} = \begin{bmatrix} \alpha_9(t) \\ \beta_9(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6-3)$$

至此建立了基础坐标系下，以探测器的位置向量  $\vec{r}_{0c}^T(t)$  为未知量的线性矛盾方程组，利用最小二乘法求解，得到空间飞行器在各插值时刻的位置，也即飞行器从 50s 到 170s，以 0.2s 为间隔的位置观测数据。

## 6.2 飞行器运动方程中参数的确定

### 6.2.1 参数确定的模型

一般认为，对一个确定的火箭发动机，火箭的质量变化率  $\dot{m}$  不随时间变化，而是由发动机本身确定的常量。燃料相对于火箭尾部喷口的喷射速度  $\vec{v}_r(t)$  与飞行器的速度方向相反，大小保持不变<sup>[1]</sup>。因此，本文建立如下模型：

$$\begin{cases} \vec{v}_r(t) = y\vec{B} \\ m(t) = m_0 + \dot{m}t \end{cases} \quad (6-4)$$

其中， $\vec{B}$  为单位矢量，方向与飞行器速度  $\vec{v}(t)$  方向相反， $\vec{B} = -\frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}$ ； $y$  为  $\vec{v}_r(t)$  的模值； $m_0$  表示初始观测时刻  $t_0$  的飞行器质量， $\dot{m}$  为质量变化率， $\dot{m} < 0$ 。因此空间飞行器主动段的简化运动方程 (3-4) 可以改写为：

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + y\vec{B} \frac{\dot{m}}{m_0 + \dot{m}t} \quad (6-5)$$

令  $x = \frac{m_0}{\dot{m}} < 0$ ，化简可得：

$$(x+t)[\ddot{\vec{r}}(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t)] = y\vec{B} \quad (6-6)$$

由于插值间隔为 0.2s，在时间段 50~170s 中可以近似为无限小量。对  $\vec{r}(t)$  进行一阶差分得到速度  $\vec{v}(t)$ ，二阶差分得到  $\ddot{\vec{r}}(t)$ ，则上式就可以转化为自变量为  $x, y$  的矛盾线性方程组，利用最小二乘法即可求解。

### 6.2.2 计算方法与结果

差分的具体过程如下：已知任意时刻  $t, t+\Delta t$  及  $t+2\Delta t$  的飞行器位置  $\vec{r}_n, \vec{r}_{n+1}, \vec{r}_{n+2}, \vec{r}_{n+3}$ ，则有

$$\vec{v}_{n+1} = \frac{\vec{r}_{n+2} - \vec{r}_n}{2\Delta t} \quad (6-7)$$

$$\ddot{\vec{r}}_{n+1} = \frac{\vec{r}_{n+2} - 2\vec{r}_{n+1} + \vec{r}_n}{\Delta t^2} \quad (6-8)$$

这里需要说明的是，在差分过程中时，差分节点间距  $\Delta t$  的大小会对结果产生很大影响。经过多次仿真和分析，认为主要原因是，当  $\Delta t$  过大时，差分结果不能很好反映当前节点的速度及加速度；当  $\Delta t$  过小时，差分产生的结果抖动明显，含噪很大。因此应选择合适的  $\Delta t$  进行差分。

方程 (6-6) 的求解过程为，在确定时刻  $t$ ， $\ddot{\vec{r}}(t)$  与  $\vec{B}$  可通过差分求出，令  $\vec{A} = \ddot{\vec{r}}(t) + \frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t)$ ，方程进一步化简为：

$$(\vec{A} \quad -\vec{B}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -t\vec{A} \quad (6-7)$$

利用最小二乘法求解得， $x = -206.925105$ ， $y = 5886.253179$ 。其中  $|x|$  表示火箭发动机的最大工作时间， $y$  表示火箭发动机的推进速度。相关资料表明，火箭发动机的工作时间一般在 100s~500s 之间，推进速度在  $10^3 m/s$  数量级，说明该结果是合理的。

因此方程 (3-4) 可化简为：

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + \frac{v_r}{t_s - t} \times \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} \quad (6-8)$$

其中  $t_s = 206.925105 s$ ,  $v_r = 5886.253179 m/s$ 。

### 6.3 飞行器轨迹结果

此时问题转化为同第 5 节相同的求解二阶常微分方程初值问题。求解方法同第 5 节。表 6-1 和 6-2 分别给出了 0 号空间飞行器在各采样时刻的位置和速度。

表 6-1 0 号空间飞行器在各采样时刻的位置

$t(s)$	$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$
50	-1114753.0	6202829.5	1136326.5
60	-1123658.0	6210740.7	1147147.6
70	-1134065.4	6219129.5	1159830.3
80	-1146097.3	6227965.5	1174528.7
90	-1159883.5	6237224.4	1191406.4
100	-1175564.0	6246888.3	1210639.5
110	-1193292.2	6256946.2	1232420.7
120	-1213238.4	6267394.6	1256963.2
130	-1235594.1	6278238.8	1284506.9
140	-1260578.1	6289493.7	1315324.8
150	-1288443.7	6301185.8	1349733.3
160	-1319489.3	6313355.3	1388104.4
170	-1354072.9	6326059.7	1430884.0

表 6-2 0 号空间飞行器在各采样时刻的位置

$t(s)$	$v_x(m/s)$	$v_y(m/s)$	$v_z(m/s)$
50	-819.2868	766.1121	993.9704
60	-963.6419	815.5523	1172.687
70	-1119.878	861.6939	1366.420
80	-1288.662	905.1001	1575.983
90	-1470.897	946.3836	1802.480
100	-1667.752	986.2090	2047.349
110	-1880.723	1025.303	2312.431
120	-2111.701	1064.469	2600.062
130	-2363.083	1104.620	2913.204
140	-2637.919	1146.805	3255.636
150	-2940.144	1192.276	3632.230
160	-3274.906	1242.567	4049.371
170	-3649.094	1299.625	4515.605

图 (6-1) ~ (6-3) 分别为 0 号空间飞行器的三个位置曲线示意图；图 (6-4)

~ (6-6) 分别为 0 号空间飞行器的三个速度曲线示意图。

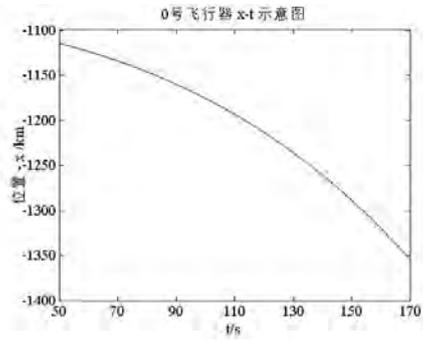


图 6-1 0 号空间飞行器的  $x-t$  曲线示意图

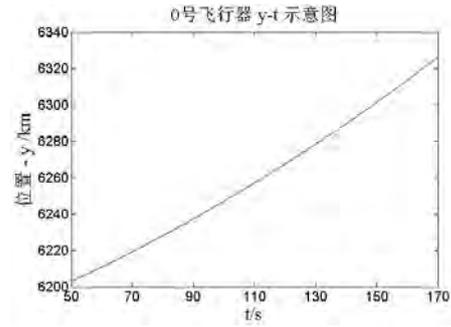


图 6-2 0 号空间飞行器的  $y-t$  曲线示意图

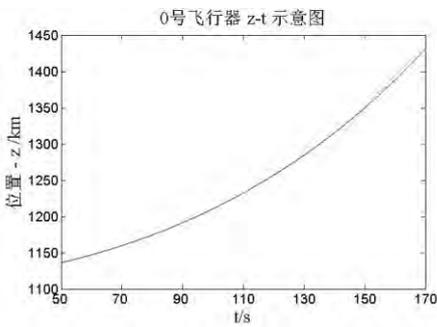


图 6-3 0 号空间飞行器的  $z-t$  曲线示意图

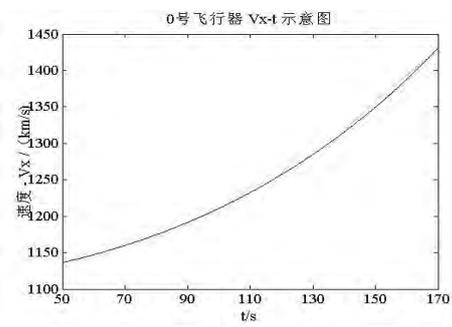


图 6-4 0 号空间飞行器的  $v_x-t$  曲线示意图

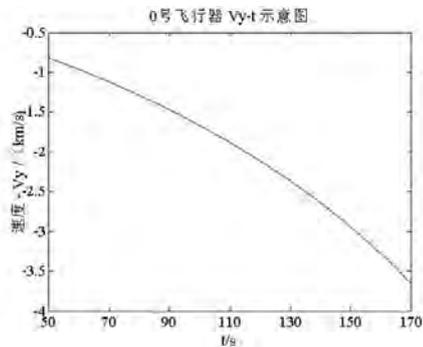


图 6-5 0 号空间飞行器的  $v_y-t$  曲线示意图

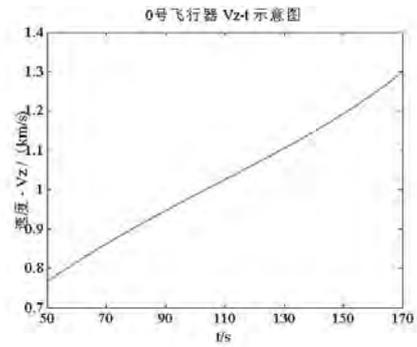


图 6-6 0 号空间飞行器的  $v_z-t$  曲线示意图

## 6.4 计算估计残差

由 6.1 中得到的位置观测数据和 6.3 中得到的估计数据，计算估计残差  $\varepsilon$ 。设观测数据为  $\alpha(t)$ ，估计数据为  $\alpha'(t)$ ，共有  $n=601$  个观测数据。则  $\varepsilon_\alpha$  的计算公式：

$$\varepsilon_\alpha = \sqrt{\frac{\sum_{t=50, \Delta t=0.2}^{170} (|\alpha(t)| - |\alpha'(t)|)^2}{n}} \quad (6-9)$$

计算结果为如表 6-3 所示。

残差	06 号卫星	09 号卫星
$\varepsilon_\alpha$	$0.9295 \times 10^{-3}$	$0.107 \times 10^{-3}$
$\varepsilon_\beta$	$0.5001 \times 10^{-3}$	$0.277 \times 10^{-3}$

观察分析可知，估计残差在 $10^{-3}$ 上，而且 09 号观测卫星的估计残差要小于 06 号。已知的观测数据在 $10^{-3}$ 数量级，而且已知数据本身含有随机误差，因此该估计残差是可以接受的。

## 7 问题 3

### 7.1 系统误差模型的推导

上文中卫星的观测数据均带有一定的系统误差，而对系统误差进行正确的估计能够有效提高定位精度。假定只考虑与卫星平台相关的系统误差，即不同观测卫星的系统误差相互没有关联；同一观测卫星对不同空间飞行器的系统误差相同，并且将系统误差简化为观测坐标系的三轴指向误差（忽略原点位置误差）。由于无源探测器的观测卫星只能定向不能测距，其观测数据只有三维坐标间的角度关系，如上文所述，用 $\alpha$ 、 $\beta$ 表示。因此，我们可将观测卫星的系统误差在二位观测数据平面上用两个平移误差 $d\alpha$ 、 $d\beta$ 和一个旋转误差 $d\theta$ 表示，其中 $d\alpha$ 、 $d\beta$ 和 $d\theta$ 对同一卫星来说是常值小量。

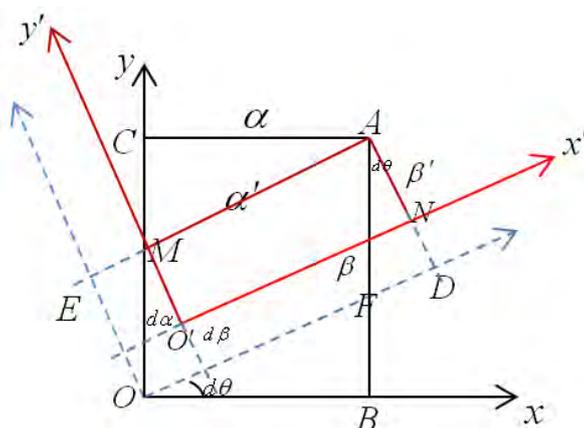


图 7-1 观测坐标系与参照坐标系转化示意图

为了修正观测值的系统误差，现定义“参照坐标系”：即无系统误差的观测坐标系。下面利用几何关系推导参照坐标系和观测坐标系之间的转化关系。如图 7-1 所示， $O'x'y'$  为参照坐标系， $Oxy$  为观测坐标系，由图可知，参照坐标系在  $x'$ 、 $y'$  分别向负方向平移  $d\alpha$ 、 $d\beta$ ，然后顺时针旋转  $d\theta$  得到观测坐标系。已知点  $A$  在观测坐标系  $Oxy$  中的观测坐标  $(\alpha, \beta)$ ，证明  $A$  在参照坐标系  $O'x'y'$  的真实坐标

$(\alpha', \beta')$ 有:

$$\begin{cases} \alpha' = \beta \sin d\theta + \alpha \cos d\theta - d\alpha \\ \beta' = \beta \cos d\theta - \alpha \sin d\theta - d\beta \end{cases} \quad (7-1)$$

推导过程如下:

如图 7-1 所示, 已知  $OB = \alpha$ ,  $AB = \beta$ ;

则  $\alpha' = O'N = OD - \alpha d$ ;

$$\begin{aligned} \alpha' &= OF + FD - d\alpha = \frac{\alpha}{\cos d\theta} + AD \tan d\theta - d\alpha \\ &= \frac{\alpha}{\cos d\theta} + (\beta' + d\beta) \tan d\theta - d\alpha \end{aligned} \quad (7-2)$$

$$\begin{aligned} \beta' &= O'M = AD - d\beta \\ &= (AB - BF) \cos d\theta - d\beta \\ &= (\beta - \alpha \tan d\theta) \cos d\theta - d\beta \\ &= \beta \cos d\theta - \alpha \sin d\theta - d\beta \end{aligned} \quad (7-3)$$

将 (7-3) 式代入 (7-2), 化简得:  $\alpha' = \beta \sin d\theta + \alpha \cos d\theta - d\alpha$ 。

由推导得知, 系统误差修正的思路为, 将  $(\alpha, \beta)$  用  $d\alpha$ 、 $d\beta$  和  $d\theta$  进行修正, 也就是将观测坐标  $(\alpha, \beta)$  转换到参照坐标系下, 得到的新坐标  $(\alpha', \beta')$  认为就是不包含系统误差的观测值。

根据第二问的假设, 认为估计值只包含随机误差, 这里就利用第二问的结果作为无系统误差的参考点, 将  $(\alpha, \beta)$  修正为与第二问的估计值对应的观测坐标  $(\alpha'', \beta'')$  上。

## 7.2 系统误差估计

利用上面思路, 进行系统误差的估计。将系统误差引入观测数据  $\alpha$ 、 $\beta$ , 根据方程 (6-3), 有:

$$\begin{bmatrix} R_y^{-1}(t) \\ R_z^{-1}(t) \end{bmatrix} \frac{(\vec{r}_g^T(t) - \vec{r}_s^T(t))}{R_x^{-1}(t)(\vec{r}_g^T(t) - \vec{r}_s^T(t))} = \begin{bmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{bmatrix} \quad (7-4)$$

其中  $\vec{r}_s^T(t)$  为观测卫星的位置, 将代入上一节估计得到的飞行器位置  $\vec{r}_g(t)$  代入上式, 则该方程组的未知数就为  $d\alpha$ 、 $d\beta$ 、 $d\theta$ 。由于含有  $\cos d\theta$ 、 $\sin d\theta$  等非线性项, 方程为超定非线性方程组, 无法直接利用最小二乘法求解, 本文采用 LMF(Levenberg-Marquardt-Fletcher)算法<sup>[2]</sup>求解该方程。两颗卫星的系统误差见下表:

表 7-1 系统误差

	$d\alpha$	$d\beta$	$d\theta$
6 号星	0.0016	$-4.75 \times 10^{-5}$	0.04
9 号星	-0.0167	-0.0241	0.04

因为观测值的数量级最小为  $1e-2$ ，系统误差的最大数量级为  $1e-3$ ，比观测值至少小一个数量级，所以计算结果比较合理。将两颗观测卫星的系统误差估计值引入观测数据，得到的  $\alpha'$  和  $\beta'$  即为修正系统误差后的观测数据。

### 7.3 飞行器轨道估计

#### 7.3.1 观测位置的计算

空间飞行器在  $t$  时刻的修正观测数据  $\alpha'(t)$  和  $\beta'(t)$ ，满足如下关系式：

$$\alpha'(t) = y_s(t)/x_s(t), \beta'(t) = z_s(t)/x_s(t) \quad (7-5)$$

其中， $(x_s(t), y_s(t), z_s(t))$  为飞行器在观测坐标系下的位置。设该时刻空间飞行器在基础坐标系下的位置为  $\vec{r}_{0c}(t) = (X, Y, Z)$ 。利用逐点交汇准则，将 06 号卫星和 09 号卫星对空间飞行器的观测数据转化到基础坐标系中时，都为  $\vec{r}_{0c}(t)$ ，则得到方程组：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\begin{bmatrix} R_{6y}^{-1}(t) \\ R_{6z}^{-1}(t) \end{bmatrix} (\vec{r}_{0c}^T(t) - \vec{r}_6^T(t))}{R_{6x}^{-1}(t) (\vec{r}_{0c}^T(t) - \vec{r}_6^T(t))} = \begin{bmatrix} \alpha'_6(t) \\ \beta'_6(t) \end{bmatrix} \\ \frac{\begin{bmatrix} R_{9y}^{-1}(t) \\ R_{9z}^{-1}(t) \end{bmatrix} (\vec{r}_{0c}^T(t) - \vec{r}_9^T(t))}{R_{9x}^{-1}(t) (\vec{r}_{0c}^T(t) - \vec{r}_9^T(t))} = \begin{bmatrix} \alpha'_9(t) \\ \beta'_9(t) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (7-6)$$

将  $\alpha'_6(t), \beta'_6(t), \alpha'_9(t), \beta'_9(t)$  代入以上方程，则未知量为飞行器在基础坐标系中的位置向量，方程组为线性矛盾方程组，利用最小二乘法求解得到修正系统误差后的飞行器位置观测数据。

#### 7.3.2 运动方程的确定

沿用问题二中的假设

$$\begin{cases} \vec{v}_r(t) = y\vec{B} \\ m(t) = m_0 + \dot{m}t \end{cases} \quad (7-7)$$

然后，对修正观测位置求二阶差分求得  $\ddot{\vec{r}}(t)$ ，化简得到形如 (6-7) 的方程组，利用最小二乘法求解： $x = -182.3$ ， $y = 4915.6$ 。

$|x|$  表示火箭发动机的工作时间， $y$  表示火箭发动机的推进速度。该结果也是

合理的。

因此方程 (3-4) 可化简为:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + \frac{v_r}{t_s - t} \times \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} \quad (7-8)$$

其中  $t_s = 182.3 s$ ,  $v_r = 4915.6 m/s$ 。

### 7.3.3 飞行器轨迹结果

至此问题转化为同第 5 节相同的求解二阶常微分方程初值问题。求解方法同第 5 节。表 7-2 和 7-3 分别给出 0 号空间飞行器在各采样时刻的位置和速度。

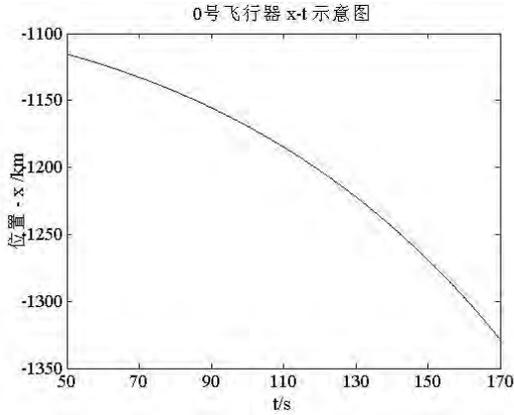
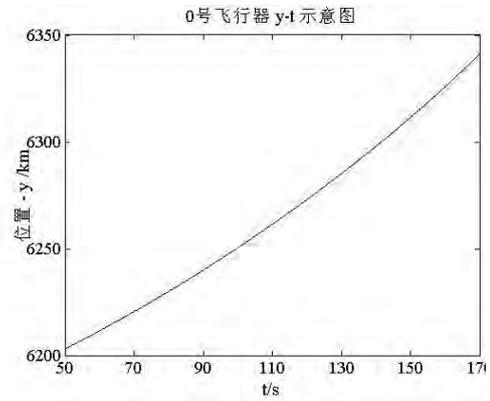
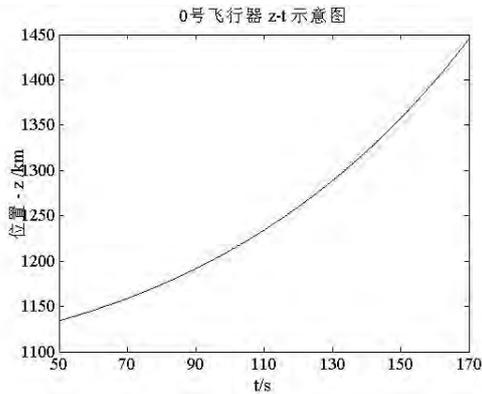
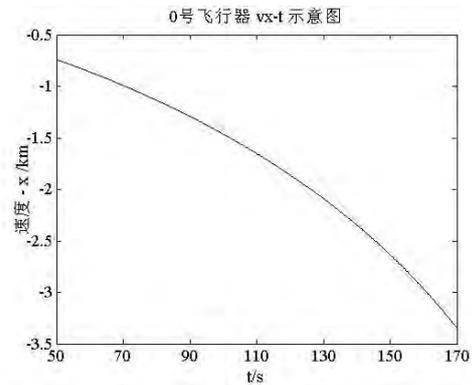
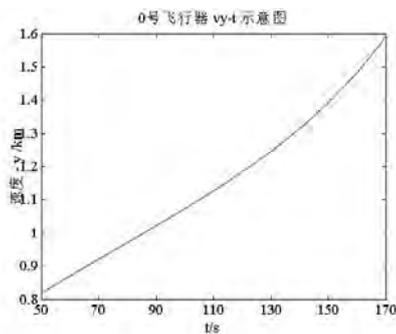
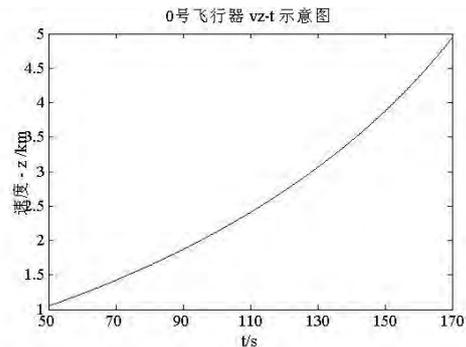
表 7-2 0 号空间飞行器在各采样时刻的位置

$t(s)$	$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$
50	-1113608.1	6201800.7	1134950.3
60	-1122192.1	6209694.3	1145454.3
70	-1132202.1	6218047.3	1157740.9
80	-1143769.4	6226841.9	1171976.6
90	-1157036.6	6236066.6	1188342.3
100	-1172160.8	6245717.1	1207036.9
110	-1189318.3	6255798.2	1228282.9
120	-1208710.3	6266324.6	1252333.9
130	-1230569.6	6277323.4	1279483.2
140	-1255171.7	6288836.7	1310077.1
150	-1282848.9	6300926.2	1344533.1
160	-1314012.2	6313678.4	1383366.6
170	-1349184.4	6327215.5	1427233.6

表 7-3 0 号空间飞行器在各采样时刻的速度

$t(s)$	$v_x(m/s)$	$v_y(m/s)$	$v_z(m/s)$
50	-791.2335	765.6369	966.5470
60	-927.5902	812.6748	1136.851
70	-1076.597	857.6321	1323.238
80	-1239.238	901.0978	1526.926
90	-1416.803	943.7620	1749.516
100	-1610.966	986.4272	1993.087
110	-1823.887	1030.032	2260.329
120	-2058.365	1075.691	2554.733
130	-2318.067	1124.759	2880.872
140	-2607.863	1178.928	3244.830
150	-2934.378	1240.384	3654.887
160	-3306.892	1312.076	4122.640

图 (7-2) ~ (7-4) 分别为 0 号空间飞行器的三个位置曲线示意图；图 (7-5) ~ (7-7) 分别为 0 号空间飞行器的三个速度曲线示意图。

图 7-2 0 号空间飞行器的  $x-t$  曲线示意图图 7-3 0 号空间飞行器的  $y-t$  曲线示意图图 7-4 0 号空间飞行器的  $z-t$  曲线示意图图 7-5 0 号空间飞行器的  $v_x-t$  曲线示意图图 7-6 0 号空间飞行器的  $v_y-t$  曲线示意图图 7-7 0 号空间飞行器的  $v_z-t$  曲线示意图

由以上得到图表与第二问得到的结果基本保持一致，说明系统误差修正的合理性，下面进行估计残差的分析，进一步说明模型的正确性。

#### 7.4 计算估计残差

由 7.2 中得到的位置观测数据和 7.3 中得到的估计数据，计算估计残差  $\varepsilon$ ，

计算公式同 (6-9)。

计算结果如表 7-4 所示。

表 7-4 估计残差

残差	06 号卫星	09 号卫星
$\varepsilon_\alpha$	0.0041	$0.547 \times 10^{-3}$
$\varepsilon_\beta$	0.0021	$0.956 \times 10^{-3}$

此处得到的估计残差要大于第二问得到的估计残差，已知的观测数据在  $10^{-3}$  数量级，而且已知数据本身含有随机误差，因此该估计残差是可以接受的。

## 8 问题 4

对于只有 09 号观测卫星单星观测的 01 号空间飞行器进行轨道估计，得到的数据只有观测坐标系下的两个观测量  $\alpha$ 、 $\beta$ ，仅由此是无法对 01 号空间飞行器进行轨道估计的，因此必须利用一定的先验信息或其它约束条件。

为了在单星观测的情况下对 01 号空间飞行器进行粗略轨道估计，根据相关文献<sup>[3]</sup>中的说明，弹道式导弹、侦查卫星等空间飞行器一般均可认为其弹道曲线在过地心坐标系的平面内，根据此约束，再利用空间飞行器的主动段运动方程，就可进行轨道估计。

首先，利用 7.2 中获得的 09 号观测卫星的系统误差  $d_\alpha$ 、 $d_\beta$ 、 $d_\theta$  对观测量  $\alpha$ 、 $\beta$  进行修正，得到修正后的  $\alpha'$ 、 $\beta'$ （仍用相同的符号表示），假设卫星观测坐标系中的点为  $(x_s, y_s, z_s)$ ，则利用  $\alpha'$ 、 $\beta'$  可表示出仅含未知量  $x_s$  的点  $(x_s, \alpha' x_s, \beta' x_s)$  即：

$$[x_s \ y_s \ z_s]^T = [x_s \ \alpha' x_s \ \beta' x_s]^T$$

随后利用基础坐标系与观测坐标系的变换关系，将观测坐标系中的点转换到基础坐标系中，得到点  $(X, Y, Z)$ 。

$$R \begin{bmatrix} x_s \\ \alpha' x_s \\ \beta' x_s \end{bmatrix} + \bar{r} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

对于不同的时刻就可得到不同的  $A_i = [X_i \ Y_i \ Z_i]^T$ 。

由于空间飞行器的轨道在过地心的同一平面内，因此轨道上的任意 3 个点在基础坐标系中的混合积为 0，即  $(A_i \times A_j) \cdot A_k = 0$ ，由此可以得到一个约束。由于每个点都包含一个未知量，为能求解方程组中的未知量，再结合空间飞行器的动力学方程 (6.5)，就可以得到估计的运动方程中的未知参数。

另外，在单星观测的情况下，要想对空间飞行器进行轨道参数模型，还可以通过调研，利用当前各种空间飞行器的相关参数等建立模版数据库，通过将观测

得到的轨道与数据库中的模版进行比较, 识别不同的飞行器, 并由此得到更加准确的轨道。

若有多颗观测卫星同时对多个空间飞行器进行观测, 很可能出现数据冗余, 因此通过对信息的融合处理, 可以提高定位精度。通过同一观测卫星对多个空间飞行器和多个观测卫星对同一空间飞行器的观测, 联合得到系统误差的估计。

## 9 总结与展望

基于无源双星同步探测的空间飞行器轨道估计与误差分析是本文的研究中心。文章主要基于逐点交汇原则和空间飞行器的运动方程进行建模分析和计算。仅考虑随机误差时, 利用逐点交汇原则求解观测值, 并对  $\dot{m}$  和  $\dot{v}_r(t)$  的模型做大胆假设与估计, 进而根据运动方程预测飞行器轨道。同时考虑系统误差时, 将三轴指向误差作合理转化后求解。引入系统误差后利用同样的方法进行轨道预测。比较两种情况下的结果发现, 系统误差的消除能明显提高轨道估计精度。而在单星观测条件下, 利用一定的约束条件可求解运动方程, 进而预测飞行器轨道。由于时间关系, 文中只给出了求解方法, 应当能够实现求解。

文中认为  $|\dot{v}_r(t)|$  为一常量, 其实设  $|\dot{v}_r(t)| = v_r - at$  更接近实际假设, 如果将  $|\dot{v}_r(t)|$  设为线性函数求解运动方程, 预测轨迹应该能精度更高。

## 参考文献

- [1] 王志刚, 师志佳. 远程火箭与卫星轨道力学基础[M]. 西北工业大学出版社, 2006.
- [2] 刘琪, 孙仲康. 双基地两坐标雷达对三位目标的最优化定位算法[J]. 电子科学学刊, 22(3): 366-372, 2000.
- [3] 李英良, 易东云等. 单星观测条件下弹道主动段估计的误差分析[J]. 中国空间科学技术, 2: 38-44, 2004.
- [4] 刘元, 谢京稳等. 空间目标纯测角相对定位方法[J]. 中国空间科学技术, 2: 48-71, 2006.
- [5] 刘琪, 孙仲康. 双基地两坐标雷达对三维目标的最优化定位算法[J]. 电子科学学报, 3:366-372 2000
- [6] 诸梅芳, 张建中. Levenberg-Marquardt 型非线性最小二乘算法的收敛性[J]. 计算数学, 2:182-192 1982