

参赛密码 _____

(由组委会填写)

第九届“华为杯” 全国研究生数学建模竞赛

学校 中国航天科工集团第二研究院

参赛队号 83221017

1.许超

队员姓名 2.陈秋瑞

3.张重先

参赛密码 _____

(由组委会填写)

第九届“华为杯”全国研究生数学建模竞赛



题目卫星无源探测的飞行器主动段轨道估计

摘要：

本文首先通过直接求解卫星的简化运动方程，得到 06 号与 09 号两颗卫星的运动轨道。进而研究了双星逐点交汇定位的原理，将同一时刻目标与两个卫星测站连线的参数方程相减解得其中的参数，从而确定该时刻目标位置、获得卫星测得的目标运动曲线。之后建立发动机喷气速度大小恒定、方向与目标运动方向相反、目标发动机秒流量恒定的目标动力学模型，利用最小二乘思想将模型参数估计问题转化为优化问题，并用遗传算法对目标飞行器模型参数进行估计。

另外，本文阐述了一种在考虑系统误差的情况下，同时估计系统误差和目标轨道的方法。该方法以逐点交汇定位法为基础，利用卫星测量值误差在小角度条件下转化为卫星测量轴偏转角的方法估计系统误差，再利用该系统误差修正测量数据，进而得到目标飞行器的轨道估计。

单星无源探测属于不完备观测，本节首先对目标飞行器进行合理的动力学建模，将模型初值等价变换为有明确约束区间的物理量，对变换后的参数进行合理的约束，然后代入模型，获得积分弹道并利用残差，采用带区间约束的遗传算法，搜索迭代求解待估参数，最后用优化的参数进行轨道的估计。实现了在无先验信息的支持下，利用空间飞行器轨道的特殊性，结合较强的模型约束，得到一定精度轨道参数估计。

关键词：双星预警 单行预警 弹道估计 最小二乘估计

一、 问题重述

有些国家会发射特殊目的的空间飞行器，如弹道式导弹、侦察卫星等。对他国发射具有敌意的空间飞行器实施监控并作出快速反应，对于维护国家安全具有重要的战略意义。发现发射和探测其轨道参数是实现监控和作出反应的第一步，没有观测，后续的判断与反应都无从谈起。卫星居高临下，是当今探测空间飞行器发射与轨道参数的重要平台。

观测卫星按轨道特点，可分为高轨地球同步轨道卫星和中低轨近圆轨道卫星。其中同步轨道距地球表面约 3.6 万千米，轨道平面与地球赤道平面重合，理论上用 3 颗间隔 120 度分布的同步轨道卫星可覆盖地球绝大部分表面。中低轨近圆轨道距地球表面数百到几千千米不等，根据观测要求，其轨道平面与赤道平面交成一定角度，且常由若干颗卫星实现组网探测。装置于卫星上的探测器包括有源和无源两类：有源探测器采用主动方式（如雷达，激光）搜寻目标，同时具备定向和测距两种能力；无源探测器则被动接收目标辐射。采用无源探测器的观测卫星常采用红外光学探测器，只接收目标的红外辐射信息，可定向但不能测距。对于火箭尾部喷焰的高度敏感性是红外技术的长处，但易受气候影响与云层干扰则是其缺点。

探测的目的是为了推断空间飞行器的轨道参数，推断是基于观测数据并通过数学模型与计算方法作出的。当观测卫星飞行一段时间，探测器测得目标相对于运动卫星的观测数据，以观测卫星和空间飞行器的运动模型和观测模型为基础，对空间飞行器的轨道参数（包括轨道位置、速度初值和其他模型参数）进行数学推断，为飞行器类别、飞行意图的判断提供信息基础。

空间飞行器轨道一般可分为三段，依次为：靠火箭推进的主动段、在地球外层空间的惯性飞行段和再入大气层后的攻击段。主动段通常由多级火箭相继推进，前一级火箭完成推进后脱落，由后一级火箭接力。惯性飞行段在空气阻力极小的大气层外，靠末级火箭关机前获得的速度在椭圆轨道上作无动力惯性飞行。攻击段则根据任务需求，受控制后再入大气层，飞向目标。对于卫星而言，在其寿命结束前一直绕地飞行，故无攻击段。

图 1 是空间飞行器的主动段示意图（未按实际比例）。主动段又可细分为若干子段：垂直上升段，程序拐弯段和重力斜飞段。按最优轨道设计，为节约燃料，箭体应尽快穿过稠密大气层，故火箭一般先垂直发射。设 A 点为地面发射点，AB 为垂直上升段，BC 弧段为程序拐弯段，CD 弧段为重力斜飞段，DE 弧段为椭圆轨道。程序拐弯段连接垂直上升段与重力斜飞段，在外力矩控制下使箭体转过一定角度，该段完成后外加力矩撤销，进入斜飞状态。第一级火箭通常负担“垂直段+程序拐弯段（加外力矩）+重力斜飞段的前段”的推进（视发动机的特性），重力斜飞段的后程则靠第二、第三级火箭相继完成。由于斜飞状态下地球引力与推力不在同一直线，所以箭体质心的运动轨迹为带一定弧度的光滑曲线。

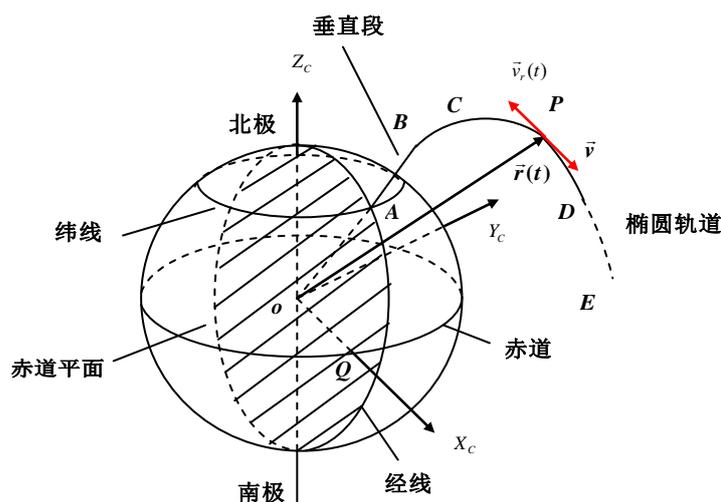


图 1 空间飞行器主动段轨道的示意图

为描述观测卫星和空间飞行器的运动，需要建立适当的坐标系。本题基础坐标系为随地心平移的坐标系，取地球中心 O_c 为原点，地球自转轴取为 z 轴，指向北极为正向， x 轴由 O_c 指向零时刻的 0 经度线，再按右手系确定 y 轴，建立直角坐标系 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 。地心 O_c 在绕日椭圆轨道上运动，所以理论上 $O_c - X_c Y_c Z_c$ 系是非惯性系。但地球公转周期远大于空间飞行器的观测弧段时长，故本题在短时间内认定该系为惯性坐标系，该基础坐标系不随地球旋转。

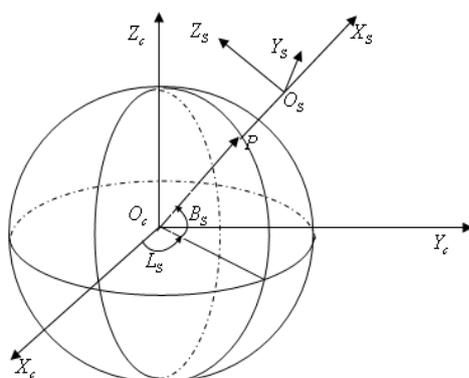


图 2 观测坐标系示意图

第二个坐标系是随卫星运动的观测坐标系 $O_s - X_s Y_s Z_s$ ，见图 2，原点取为卫星中心 O_s ， X_s 轴沿 $O_c O_s$ 连线，离开地球方向为正， Z_s 轴与 X_s 垂直指向正北， Y_s 轴按右手系确定。由于一般测量卫星的轨道都不会严格经过南北极上空，所以这种坐标系的定义是明确的。如此定义的观测坐标系也叫做 UEN 坐标系，因为三个坐标轴分别指向上 (UP)、东 (EAST) 和北 (NORTH) 三个方向。

根据变质量质点的动力学，空间飞行器在基础坐标系下的主动段的简化运动方程如下：

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e + \vec{F}_T = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + \vec{v}_r(t) \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \quad (1)$$

其中向量 \vec{F}_e 表示飞行器所受的外力加速度之和， \vec{F}_T 表示火箭产生的推力加速度， $m(t)$ 为瞬时质量； $\dot{m}(t)$ 是质量变化率； $\vec{r}(t)$ 为空间飞行器在基础坐标系下的位置矢量； $\ddot{\vec{r}}(t)$ 表示 $\vec{r}(t)$ 对时间 t 的二阶导数，即加速度； G_m 为地球引力常数（本题中地球引力常数取 $G_m = 3.986005 \times 10^{14} m^3 / s^2$ ）， $\vec{v}_r(t)$ 是燃料相对于火箭尾部喷口的喷射速度。

方程(1)中如果只保留右侧第一项，则可以表示观测卫星的简化运动方程：

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) \quad (2)$$

在给定基础坐标系下的位置和速度初值情况下，可以利用常微分方程组数值解方法计算空间飞行器的运动轨迹。不同空间飞行器的本质差异就在于 $\vec{v}_r(t)$ 和 $m(t)$ 的模型不同， $m(t)$ 一般而言应为严格单调递减的非负函数。 $\vec{v}_r(t)$ 的方向一般应与飞行器的速度方向接近反向共线，其大小一般较为稳定。

观测卫星对于空间飞行器的观测数据通过化简可以由观测坐标系下的两个无量纲比值确定：

$$\alpha = \frac{y_s}{x_s}; \quad \beta = \frac{z_s}{x_s} \quad (3)$$

其中 x_s, y_s, z_s 为空间飞行器在观测坐标系中的坐标。

观测数据不可避免地带有各种误差，观测误差包括随机误差和系统误差。本题假设随机误差为直接叠加在观测数据上的白噪声，可能产生于背景辐射干扰与信息处理等多个方面。系统误差也包括多种来源，如卫星定位误差、指向机构误差、图像校准误差、传感器安装误差等等。在本题框架内，我们假定只考虑与卫星平台相关的系统误差，即不同观测卫星的系统误差相互没有关联，同一观测卫星对于不同空间飞行器的系统误差是一样的。经由适当的简化模型，各种系统误差最终可以折合为观测坐标系的原点位置误差和三轴指向误差。根据工程经验，原点位置误差影响较小，而三轴指向误差影响较大，对三轴指向误差进行估计对于提高估计精度很有帮助，本题只考虑三轴指向误差。三轴指向误差在二维观测数据平面上表现为两个平移误差和一个旋转误差，具体可以用三个常值小量 $d_\alpha, d_\beta, d_\theta$ 来表示，分别表示第一观测量 α 的平移量、第二观测量 β 的平移量以及观测量在 $\alpha\beta$ 平面内的旋转量。

单个红外光学探测器不具备测距能力，但借助多颗（含两颗）观测卫星的同步观测能够进行逐点定位，再结合空间飞行器的运动模型，可以进行轨道参数估计。在单星观测条件下，利用空间飞行器轨道的特殊性，结合较强的模型约束也可得到一定精度轨道参数估计。由于受大气影响，垂直上升段的火箭尾焰不易观测，程序拐弯段的运动方程又较为复杂，所以本题重点关注重力斜飞段的后程段，本题所附仿真数据也集中于此段。

本题以中低轨近圆轨道卫星为观测星座对假想的空间飞行器进行仿真观测，生成仿真观测数据，要求利用仿真观测数据，对假想空间飞行器的轨道参数进行估计。本题所附文件包括：

参数文件 `satinfo.txt` 用来存储观测卫星信息，每行表示一颗卫星，包含六列，分别表示零时刻卫星在基础坐标系下的位置和速度 $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 。卫星编号从上到下递增并从 0 开始。

仿真数据文件 `meadata_i_j.txt` 用来存储仿真观测数据信息。 i, j 为占位符，表示编号为 i 的卫星对编号为 j 的飞行器的仿真观测数据信息，按照时间顺序分行，每行分三列，分别是观测时刻 t 以及对应观测数据 α, β 。

本题所涉及的数据与结果，均应采用国际标准单位，即：时间单位为秒、距离单位为米、速度单位为米每秒等等；所有位置和速度均指基础坐标系下的位置和速度。

在仅考虑随机误差的条件下，请你们团队研究下列问题：

1. 观测卫星在任意时刻的位置计算是估计的前提，请根据 `satinfo.txt` 和观测卫星的简化运动方程(2)，计算 09 号观测卫星在 50.0s、100.0s、150.0s、200.0s、250.0s 五个时刻的三维位置。结果保留 6 位有效数字。

2. 在本题给定的仿真数据下，06 号和 09 号观测卫星对 0 号空间飞行器形成了立体交叠观测，请结合立体几何知识按照逐点交汇定位的思路，给出 0 号空间飞行器在公式（1）框架下的轨道估计，注意选取适当的 $\vec{v}_r(t)$ 和 $m(t)$ 的表示模型。按照从 50.0s 到 170.0s 间隔 10.0s 进行采样，计算并列表给出 0 号空间飞行器在各个采样点的位置和速度，并给出估计残差。结果保留 6 位有效数字。同时绘制 0 号空间飞行器的三个位置 t - x 、 t - y 、 t - z 和三个速度 t - v_x 、 t - v_y 、 t - v_z 曲线示意图。

在同时考虑系统误差的条件下，进一步研究下列问题：

3. 若 06 和 09 号两颗观测卫星均有可能带有一定的系统误差，对系统误差进行正确的估计能够有效提高精度。利用上述的逐点交汇方法能否同时对系统误差进行估计？若不能，是否还有其他的思路能够同时估计系统误差与轨道？给出你的解决方案与估计结果。在报告中除给出与第二问要求相同的结果外，还应分别给出两颗观测卫星的系统误差估计结果，共六个数值，分别是两颗卫星的 $d_\alpha, d_\beta, d_\theta$ 。

如果你们还有时间和兴趣，还可考虑下列：

4. 对只有 09 号观测卫星单星观测的 01 号空间飞行器进行轨道估计，结果形式要求同第三问，注意参考第三问的系统误差估计结果。并进一步考虑在

同时有多颗观测卫星观测多个空间飞行器的情况下能否联合进行系统误差估计?

二、 问题分析

对于第一个问题, 由于(2)式描述了卫星的运动, 因此以 `satinfo.txt` 文件中所提供的卫星位置坐标及速度作为初始条件, 解算微分方程(2)即可得到卫星轨道, 进而求得卫星在特定时刻的位置。

对于第二个问题, 本文将其拆分为两部分解决: 首先通过逐点交汇的方法求出由卫星测量数据得出的飞行器飞行轨迹。随后选取参数 $\vec{v}_r(t)$ 、 $m(t)$ 的模型

为 $\vec{v}_r(t) = \left| \vec{v}_r \right| \frac{\vec{r}(t)}{\left| \vec{r}(t) \right|}$ 、 $m(t) = m_0 - \dot{m}t$, 其中 $\left| \vec{v}_r \right|$ 、 \dot{m} 为常数, 并利用最小二乘法

思想将该估值问题转化为参数优化问题, 并利用遗传算法确定 $\vec{v}_r(t)$ 、 $m(t)$ 模型中的未知参数。

对于第三个问题, 本文提出了一种利用逐点交汇法同时估计系统误差和目标飞行轨道的方法。本文将三轴指向误差 $d\alpha$ 、 $d\beta$ 、 $d\theta$ 视为卫星坐标系绕该系坐标轴 z 轴、y 轴、x 轴的旋转, 首先以第二个问题得出的目标飞行器的运动轨迹为基准, 求出两卫星测量值与弹道估计值的偏差, 并将其描述为测量坐标系绕三个坐标轴的旋转。该偏差由常值的系统误差 $d\alpha$ 、 $d\beta$ 、 $d\theta$ 与随机噪声组成, 通过求均值的方法消除噪声干扰, 估计出系统误差。再利用系统误差对卫星的测量数据进行修正, 最后利用逐点交汇法估计出目标飞行器的运动轨道。

三、 模型假设

- 1、将目标视为变质量质点, 不考虑绕质心的旋转方程。
- 2、卫星测量的白噪声与输入不相关。
- 3、忽略目标红外信号的传播时间及卫星对红外信号的处理时间。
- 4、两颗测量卫星的时钟始终保持同步。
- 5、在探测过程中, 目标没有进行推进级分离或发动机停机操作。
- 6、目标飞行的轨迹在一个平面内。

四、 符号说明及名词定义

\vec{R}_c —— 目标在地心惯性坐标系下的位置矢量

\vec{R}_s —— 目标在卫星观测坐标系下的位置矢量

\vec{S} —— 卫星在地心惯性坐标系下的位置矢量

C_s^c —— 卫星测量坐标系到地心坐标系的转换矩阵

h_0 、 h_f —— 初始 (及终点) 观测时刻目标距离地面的高度

ξ ——误差项

η ——残余项

其他符号见文中具体说明。

五、模型的建立及求解

5.1 问题一

由题目描述，卫星动力学方程为：

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) \quad (4)$$

地心惯性坐标系中，06号卫星的初始条件为：

$$x_{0,6} = -1732113.220573, \quad y_{0,6} = 9092044.771852, \quad z_{0,6} = 1732113.220573$$

$$v_{x0,6} = -4453.807606, \quad v_{y0,6} = -1566.513180, \quad v_{z0,6} = 4453.807606。$$

09号卫星的初始条件为：

$$x_{0,9} = 2043922.166765, \quad y_{0,9} = 8186504.631471, \quad z_{0,9} = 4343461.714791$$

$$v_{x0,9} = -5379.544693, \quad v_{y0,9} = -407.095342, \quad v_{z0,9} = 3516.052656。$$

将上述条件作为解微分方程(2)的初始条件，利用四阶 Runge-Kutta 法求解该微分方程，得到09号卫星的轨道如图3所示：

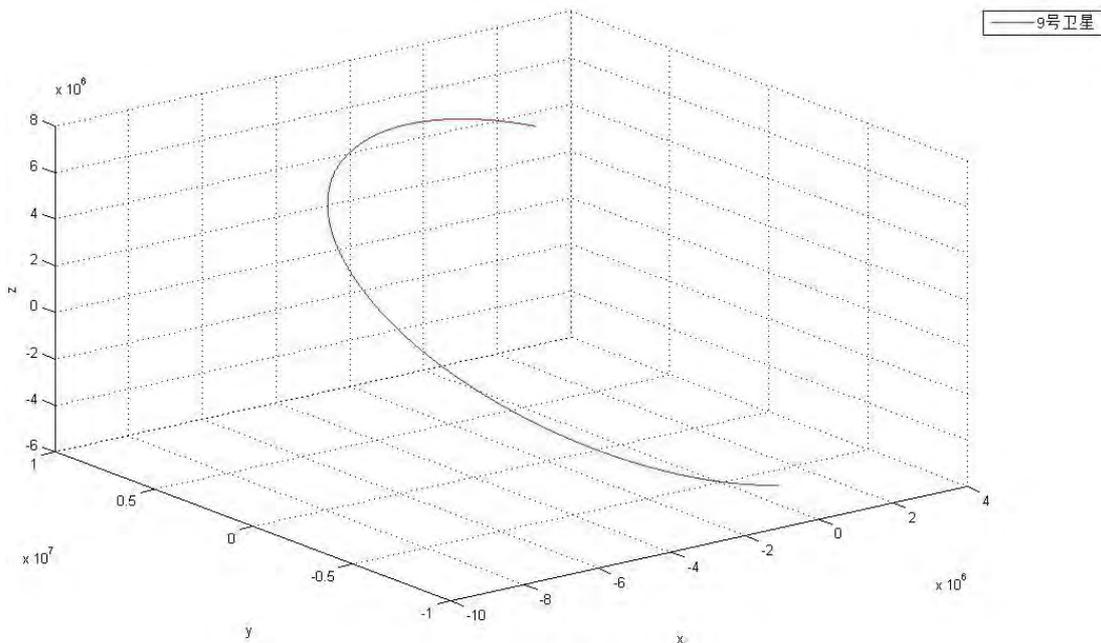


图3 09号卫星轨道

09号卫星在下列时刻在地心惯性坐标系中的位置如下：

时间	x	y	z
50	1.77381×10^6	8.16138×10^6	4.51670×10^6

100	1.50163×10^6	8.12676×10^6	4.68468×10^6
150	1.22770×10^6	8.08270×10^6	4.84722×10^6
200	9.52349×10^5	8.02925×10^6	5.00413×10^6
250	6.75894×10^5	7.96650×10^6	5.15524×10^6

5.2 问题二

5.2.1 逐点交汇法求目标运动轨迹

下面介绍两站交汇定位的方法^[1]:

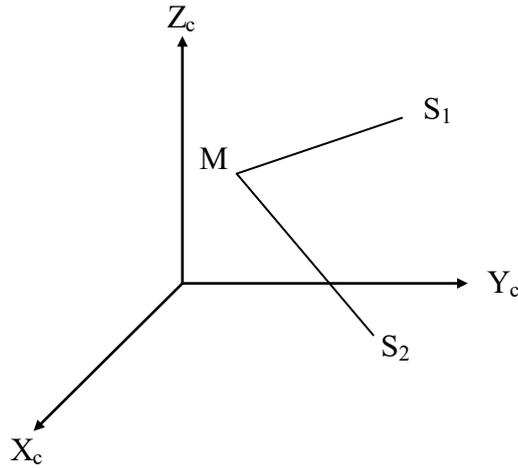


图4 逐点交汇法示意图

如图4所示，在地心惯性坐标系下，目标M与卫星S₁、S₂连线的参数方程为：

$$\vec{R}_1 = \vec{S}_1 + mC_{s_1}^c \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\vec{R}_2 = \vec{S}_2 + nC_{s_2}^c \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

其中 \vec{R}_1 、 \vec{R}_2 为目标在地心惯性坐标系下的位置矢量， \vec{S}_1 、 \vec{S}_2 为卫星在地心惯性坐标系下的位置矢量， α_1 、 β_1 、 α_2 、 β_2 为卫星S₁、S₂的测量数据， C_s^c 为卫星S₁、S₂测量坐标系到地心惯性坐标系的转换矩阵：

$$C_s^c = R_z(-L_s)R_y(B_s) = \begin{pmatrix} \cos L_s \cos B_s & -\sin L_s & -\cos L_s \sin B_s \\ \sin L_s \cos B_s & \cos L_s & -\sin L_s \sin B_s \\ \sin B_s & 0 & \cos B_s \end{pmatrix}$$

其中 L_s 、 B_s 分别为卫星当前的纬度和经度。注意到 $C_{s_1}^c \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ 、 $C_{s_2}^c \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ 为

目标与卫星 S_1 、 S_2 的连线在地心惯性坐标系下的方向向量，分别记为 \vec{I}_1 、 \vec{I}_2 。

如果双星能够交汇到目标，即 $\vec{X}_1 = \vec{X}_2$ ，则交点即为目标的坐标。将(5)、(6)两式相减，有：

$$n\vec{I}_2 - m\vec{I}_1 = \vec{S}_1 - \vec{S}_2 \quad (7)$$

设 $I_1 = \begin{pmatrix} j_1 \\ k_1 \\ l_1 \end{pmatrix}$ 、 $I_2 = \begin{pmatrix} j_2 \\ k_2 \\ l_2 \end{pmatrix}$ ， $\vec{S}_1 - \vec{S}_2 = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$ ，将(7)式写为分量形式：

$$\begin{cases} j_2 n - j_1 m = \Delta x \\ k_2 n - k_1 m = \Delta y \\ l_2 n - l_1 m = \Delta z \end{cases} \quad (8)$$

将方程组(8)中的第二式与第一式相减、第三式与第二式相减，得：

$$\begin{cases} (k_2 - j_2)n - (k_1 - j_1)m = \Delta y - \Delta x \\ (l_2 - k_2)n - (l_1 - k_1)m = \Delta z - \Delta y \end{cases}$$

解得 m 、 n 为：

$$\begin{cases} m = \frac{\Delta x(k_2 - l_2) + \Delta y(l_2 - j_2) + \Delta z(j_2 - k_2)}{(k_1 - l_1)(j_2 - k_2) - (j_1 - k_1)(k_2 - l_2)} \\ n = \frac{\Delta x(k_1 - l_1) + \Delta y(l_1 - j_1) + \Delta z(j_1 - k_1)}{(j_2 - k_2)(k_1 - l_1) - (k_2 - l_2)(j_1 - k_1)} \end{cases} \quad (9)$$

将(9)式代入(5)、(6)两式，可解出 $\vec{R}_1 = \begin{pmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \end{pmatrix}$ 、 $\vec{R}_2 = \begin{pmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \\ z_{c2} \end{pmatrix}$ 。若两颗卫星对

目标的测量没有误差，则应有 $\vec{R}_1 = \vec{R}_2$ 。但实际由于卫星的测量具有随机误差，

导致 $\vec{R}_1 \neq \vec{R}_2$ 。为提高估计精度，我们选定：

$$\vec{R} = \frac{\vec{R}_1 + \vec{R}_2}{2} = \begin{pmatrix} \frac{x_{c1} + x_{c2}}{2} \\ \frac{y_{c1} + y_{c2}}{2} \\ \frac{z_{c1} + z_{c2}}{2} \end{pmatrix}$$

作为由卫星测得的目标在地心惯性坐标系下的位置矢量。

将两颗卫星在同一时刻的观测数据作为 α_1 、 β_1 、 α_2 、 β_2 代入上述方法中，即可得到该时刻的目标位置 $\vec{R}(t_i)$ 。这里需要说明的是，本题所提供的并不是同一时刻双星的测量数据，本文采用对卫星观测数据进行三次样条插值的办法解决这一问题。随着 t_i 从 t_0 增加到 t_F ，由此形成目标飞行器的运动轨迹，如图 5 所示：

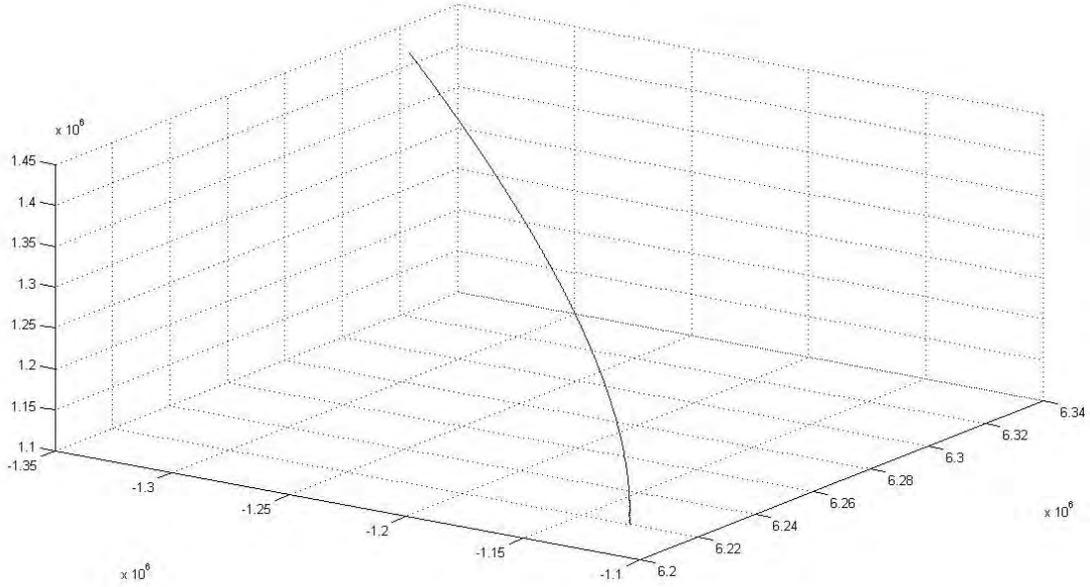


图 5 目标飞行器运动轨迹

5.2.2 目标飞行器动力学模型的建立

由题意可知， $\vec{v}_r(t)$ 的方向一般应与飞行器的速度方向接近反向共线，其大小一般较为稳定。因此建立 $\vec{v}_r(t)$ 的模型为：

$$\vec{v}_r(t) = -\left| \vec{v}_r \right| \frac{\vec{\dot{r}}(t)}{\left| \vec{\dot{r}}(t) \right|} \quad (10)$$

其中 $\vec{r}(t)$ 为目标飞行器在地心惯性坐标系下的位置矢量。为简化模型，建立 $m(t)$ 的模型为：

$$m(t) = m_0 + \dot{m}t \quad (11)$$

其中 \dot{m} 为一常数且 $\dot{m} < 0$ 。

将(10)、(11)两式代入(1)式得到：

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\frac{G_m}{\left| \vec{r}(t) \right|^3} \vec{r}(t) - \left| \vec{v}_r \right| \cdot \frac{\vec{\dot{r}}(t)}{\left| \vec{\dot{r}}(t) \right|} \cdot \frac{\dot{m}}{m_0 + \dot{m}t}$$

令 $K_1 = |\vec{v}_r|$, $K_2 = \frac{m_0}{\dot{m}}$, 代入上式得:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) - K_1 \cdot \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} \cdot \frac{1}{K_2 + t} \quad (12)$$

给定任意 K_1 、 K_2 及初始条件 $\vec{r}(t_0)$ 、 $\dot{\vec{r}}(t_0)$, 则微分方程(12)可解, 这里以卫星最初发现目标时, 由上述逐点交汇法确定的目标初始位置为(12)式的位置初始条件 $\vec{r}(t_0)$ 。由于随机噪声的影响, 卫星测得的目标飞行器运动轨迹 (图 5 所示) 有一定误差, 对该曲线求导将导致更大误差, 所以目标的初始速度 $\dot{\vec{r}}(t_0)$ 应视为未知。因此, K_1 、 K_2 及速度初始条件 $\dot{\vec{r}}(t_0)$ 为待估计参数。

利用最小二乘法的思想, 可以得到优化目标量:

$$M = \sqrt{\frac{\sum_{n=0}^N |\vec{r}(t_0 + nT_0) - \bar{R}(t_0 + nT_0)|^2}{N}}$$

其中 T_0 为采样周期, $T_0 = \frac{t_F - t_0}{N}$ 。

该目标量描述了由动力学模型得出的目标运动轨迹 $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_m(t) \\ y_m(t) \\ z_m(t) \end{pmatrix}$ 和由逐点

交汇法得到的目标运动轨迹 $\bar{R}(t) = \begin{pmatrix} x_c(t) \\ y_c(t) \\ z_c(t) \end{pmatrix}$ 之间的一致程度。

至此, 对 K_1 、 K_2 的估值问题转化为一个优化问题: 即求 K_1 、 K_2 、 $\dot{\vec{r}}(t_0)$ 的取值, 使得 M 最小。本文采用遗传算法实现这一优化过程, 遗传代数为 100 代。优化后得到:

$$\begin{cases} K_1 = 7350 \\ K_2 = -300 \end{cases} \quad (13)$$

此时残差 $M = 3857.5$ 。将(13)式代入(12)式并求解, 即可得到目标飞行器的运动轨迹 $\vec{r}(t)$ 。

需要说明的是, 由于遗传算法本身的算法特点, 使得优化结果具有一定的波动性, 但波动范围较小, 不影响弹道估计的结果。

目标飞行器的位置曲线如下:

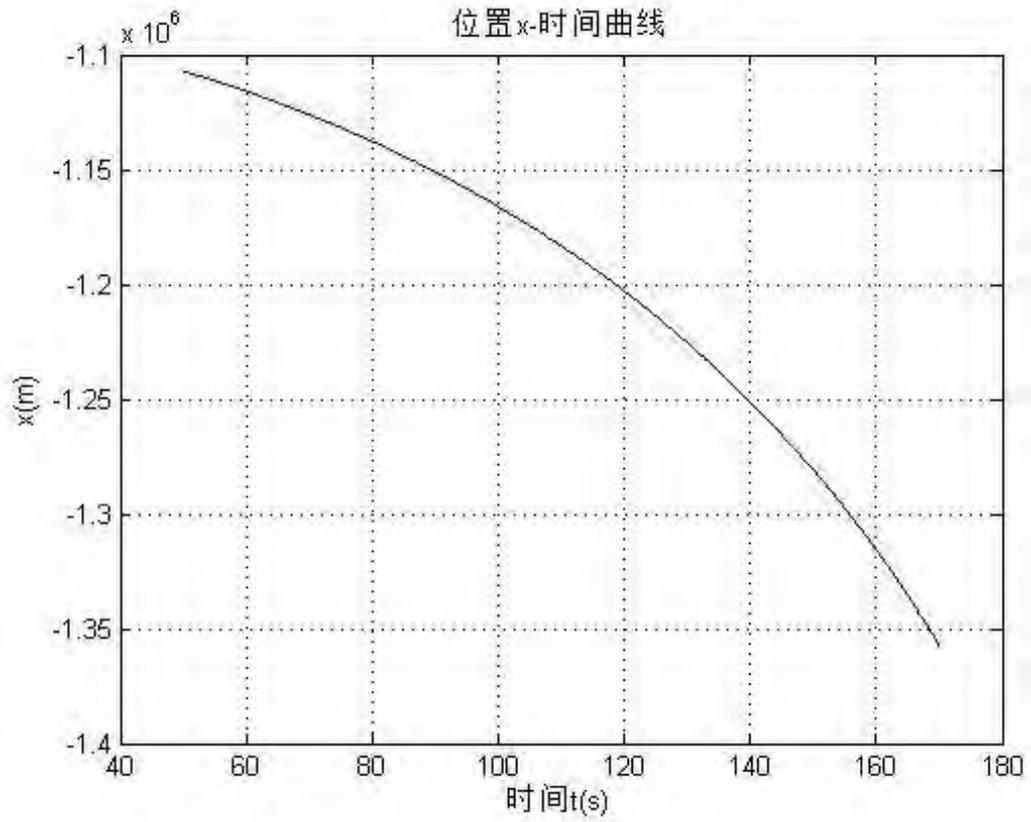


图6 目标飞行器 t-x 曲线

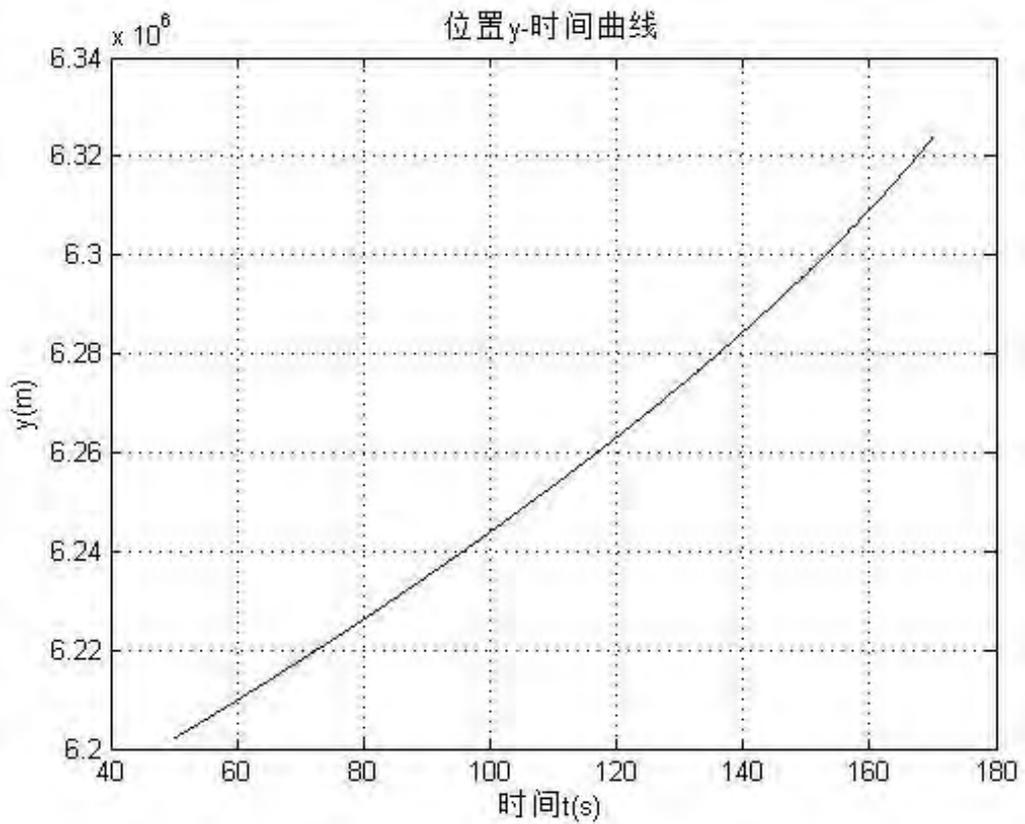


图7 目标飞行器 t-y 曲线

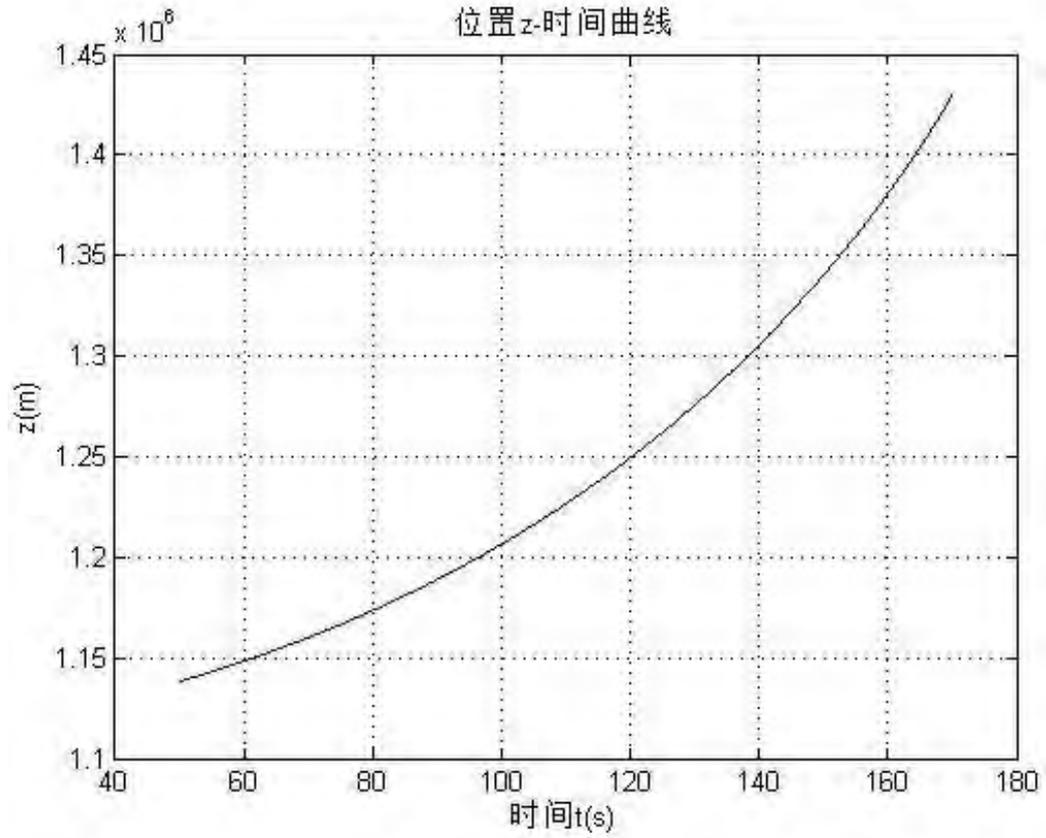


图8 目标飞行器 t-z 曲线

目标飞行器速度曲线如下：

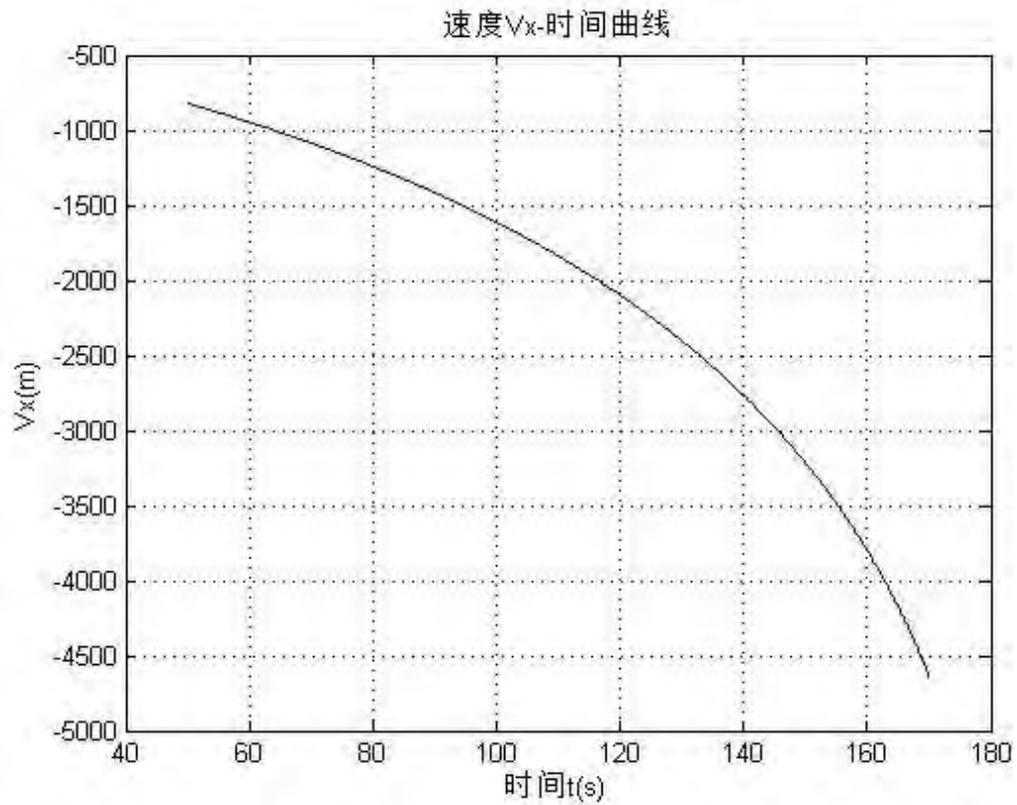


图9 目标飞行器 t-v_x 曲线

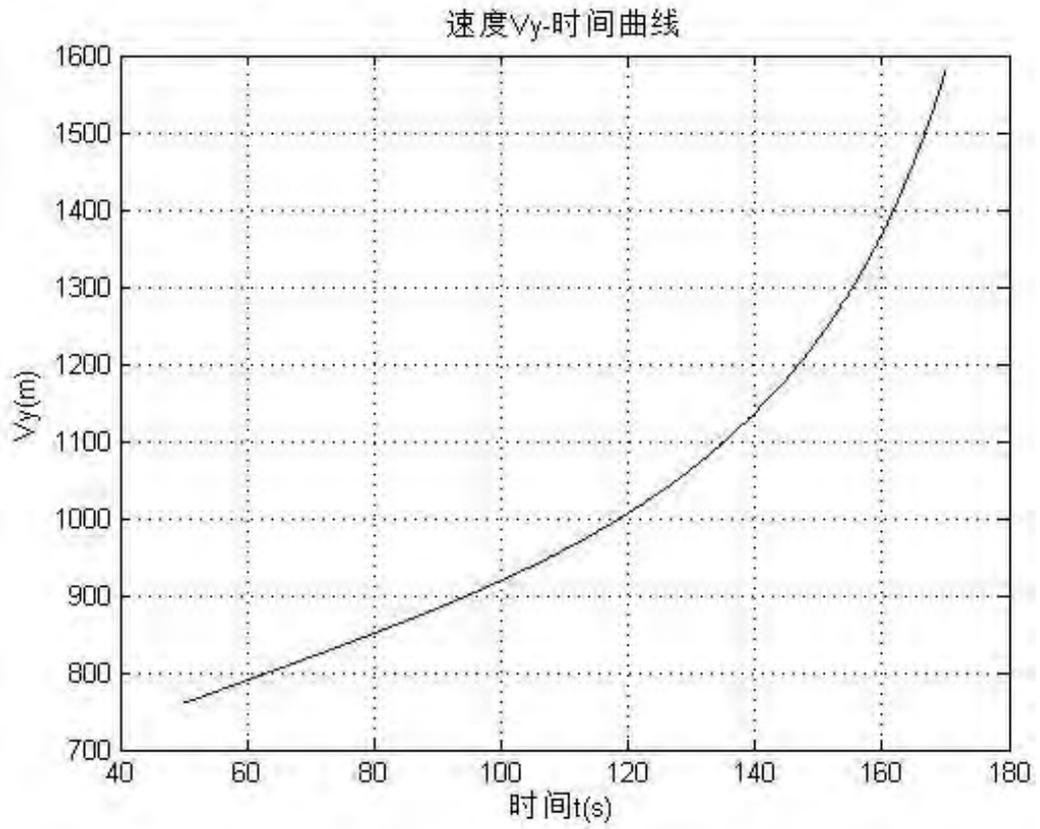


图 10 目标飞行器 $t-v_y$ 曲线

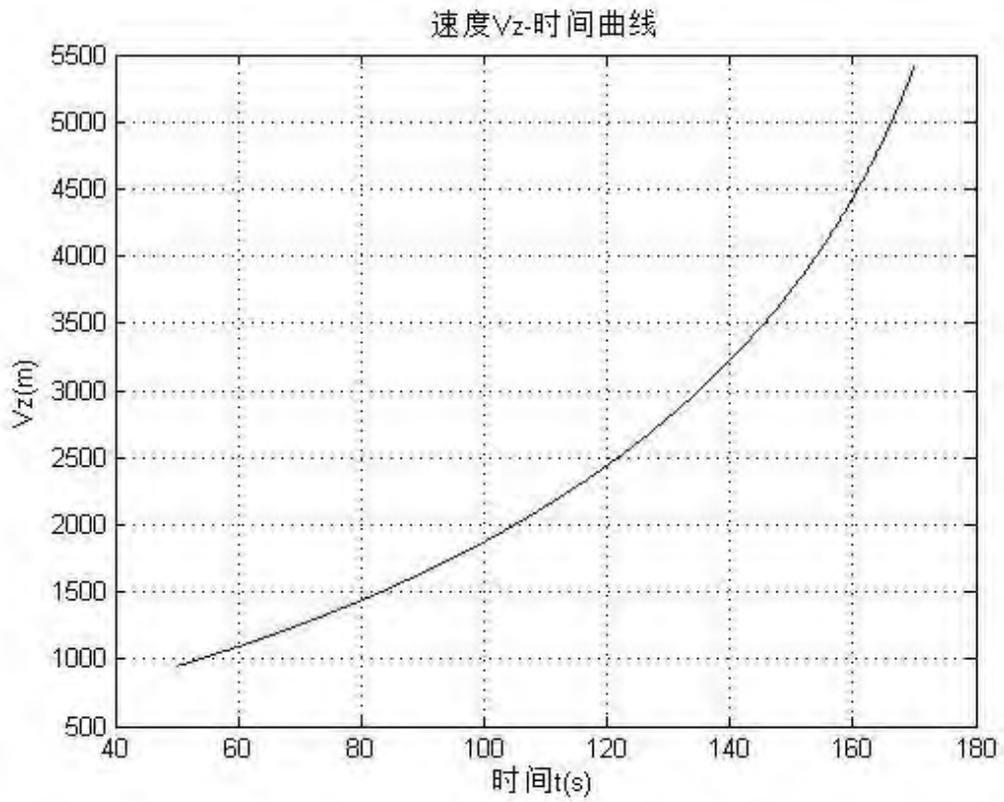


图 11 目标飞行器 $t-v_z$ 曲线

目标飞行器在指定采样点的位置和速度如下：

t	x	y	z	v_x	v_y	v_z
50	-1.10699×10^6	6.20198×10^6	1.13814×10^6	-8.45308×10^2	7.30124×10^2	9.15954×10^2
60	-1.11624×10^6	6.20954×10^6	1.14817×10^6	-1.00620×10^3	7.81580×10^2	1.09132×10^3
70	-1.12715×10^6	6.21759×10^6	1.16001×10^6	-1.17875×10^3	8.27768×10^2	1.27949×10^3
80	-1.13985×10^6	6.22608×10^6	1.17380×10^6	-1.36321×10^3	8.69268×10^2	1.48075×10^3
90	-1.15446×10^6	6.23496×10^6	1.18967×10^6	-1.56006×10^3	9.06656×10^2	1.69559×10^3
100	-1.17110×10^6	6.24420×10^6	1.20776×10^6	-1.76993×10^3	9.40504×10^2	1.92473×10^3
110	-1.18990×10^6	6.25376×10^6	1.22822×10^6	-1.99369×10^3	9.71379×10^2	2.16909×10^3
120	-1.21102×10^6	6.26362×10^6	1.25120×10^6	-2.23242×10^3	9.99856×10^2	2.42985×10^3
130	-1.23461×10^6	6.27376×10^6	1.27687×10^6	-2.48747×10^3	1.02652×10^3	2.70848×10^3
140	-1.26083×10^6	6.28415×10^6	1.30543×10^6	-2.76051×10^3	1.05197×10^3	3.00680×10^3
150	-1.28988×10^6	6.29479×10^6	1.33708×10^6	-3.05358×10^3	1.07686×10^3	3.32704×10^3
160	-1.32198×10^6	6.30569×10^6	1.37206×10^6	-3.36922×10^3	1.10188×10^3	3.67195×10^3
170	-1.35735×10^6	6.31683×10^6	1.41061×10^6	-3.71055×10^3	1.12780×10^3	4.04495×10^3

仿真运行多次的不同结果(表中为遗传算法的估计参数，速度为积分初值)：

残差 M	K_1	K_2	v_x	v_y	v_z
2681.896	3359.200	-190.364	-820.956	760.004	945.938
1900.564	3832.656	-202.687	-819.997	756.019	945.937
3445.539	3046.304	-182.499	-822.348	760.116	945.934

5.3 问题三

5.3.1 系统误差估计

图 12 为卫星测量值与弹道估计值的偏差示意图，图中 \vec{r}_s 表示某一时刻目标相对于卫星的实际方位， \vec{R}_s 表示该时刻卫星所测得的目标的方位。

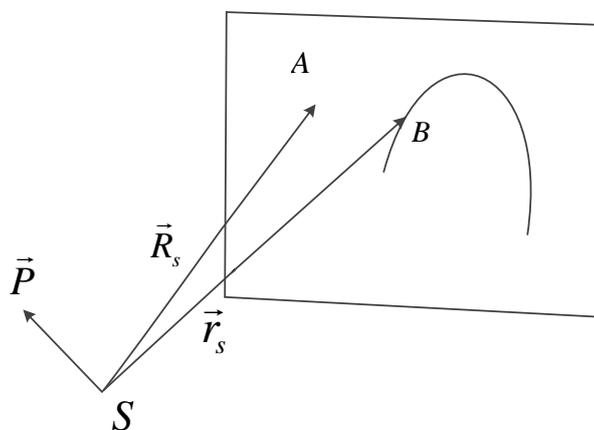


图 12 卫星测量偏差示意图

将 \vec{r}_s 视为 \vec{R}_s 经旋转所得，由于 \vec{r}_s 与 \vec{R}_s 之间的夹角为小角度，因此可定义如下角向量表示从 \vec{R}_s 到 \vec{r}_s 的旋转^[2]：

$$\vec{P} = \frac{\vec{R}_s \times \vec{r}_s}{|\vec{R}_s \times \vec{r}_s|} \arccos \frac{\vec{R}_s \cdot \vec{r}_s}{|\vec{R}_s| |\vec{r}_s|}$$

设 \vec{P} 在观测坐标系 x、y、z 轴上的投影分别为 \vec{P}_{sx} 、 \vec{P}_{sy} 、 \vec{P}_{sz} ，即：

$$\vec{P} = \vec{P}_{sx} + \vec{P}_{sy} + \vec{P}_{sz}$$

由于 \vec{P}_{sx} 、 \vec{P}_{sy} 、 \vec{P}_{sz} 为小角度旋转，因此 \vec{P}_{sx} 、 \vec{P}_{sy} 、 \vec{P}_{sz} 可表示测量坐标系绕其 x、y、z 轴的欧拉角转动。

如图 13 所示，坐标系 $x_1y_1z_1$ 绕 z 轴旋转一个小角度 γ 成为 $x_2y_2z_2$ ，则按式(3)定义，在坐标系 $x_1y_1z_1$ 中表示的 M 点的 α 值为：

$$\alpha_1 = \frac{y_1}{x_1} \quad (14)$$

在坐标系 $x_2y_2z_2$ 中表示的 M 点的 α 值为

$$\alpha_2 = \frac{y_2}{x_2} \approx \frac{y_1 - x_1 \tan \theta}{x_1 \sec \theta} \approx \frac{y_1 - x_1 \theta}{x_1} \quad (15)$$

由(14)、(15)两式相减得到：

$$d\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \approx -\theta$$

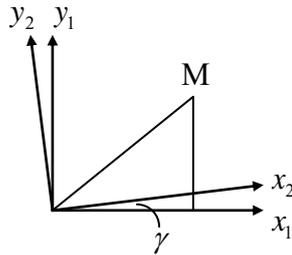


图 13 $d\alpha$ 与坐标轴转角 γ 的示意图

结合上述分析，得到：

$$\begin{cases} \vec{P}_{sx} \approx d\tilde{\theta} \\ \vec{P}_{sy} \approx d\tilde{\beta} \\ \vec{P}_{sz} \approx d\tilde{\alpha} \end{cases} \quad (16)$$

其中,

$$\begin{cases} d\tilde{\theta} = d\theta + W_1 \\ d\tilde{\beta} = d\beta + W_2 \\ d\tilde{\alpha} = d\alpha + W_3 \end{cases} \quad (17)$$

W_1 、 W_2 、 W_3 为零均值白噪声过程在该时刻的样本, $d\alpha$ 、 $d\beta$ 、 $d\theta$ 为常值系统误差。

由于卫星按其采样间隔不断对目标方位进行探测, 因此(17)式中 $\tilde{\alpha}$ 、 $\tilde{\beta}$ 、 $\tilde{\theta}$ 均为随机过程。对(17)式两边同取均值, 结合(16)式得到系统噪声的表达式:

$$\begin{cases} d\theta = E(d\tilde{\theta}) = E(\bar{P}_{sx}) \\ d\beta = E(d\tilde{\beta}) = E(\bar{P}_{sy}) \\ d\alpha = E(d\tilde{\alpha}) = E(\bar{P}_{sz}) \end{cases} \quad (18)$$

本文以 5.2 节中得到的目标飞行器的轨道估计为轨道基准估计卫星测量的系统误差, 由此得到系统误差为:

卫星	$d\alpha$	$d\beta$	$d\theta$
06 号	-1.69793×10^{-5}	3.79254×10^{-4}	-3.52652×10^{-4}
09 号	2.31695×10^{-4}	1.27422×10^{-4}	-3.08118×10^{-4}

5.3.2 目标飞行器轨道估计

利用(18)式计算出的系统误差对卫星测量数据进行修正, 具体方法如下:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = R_x(-d\theta)R_y(-d\beta)R_z(-d\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

其中, α 、 β 为原始卫星测量数据, D_x 、 D_y 、 D_z 为修正系统误差后的数据。为方便继续使用逐点交汇法进行目标飞行器的轨道估计, 故按 (3) 式规定将修正后的数据转化为标准形式:

$$\begin{cases} \alpha_{NEW} = \frac{D_y}{D_x} \\ \beta_{NEW} = \frac{D_z}{D_x} \end{cases} \quad (19)$$

将(19)式作为测量数据, 利用 5.2 节中所阐述的逐点交汇定位法, 结合(12)式所规定的目标动力学模型, 即可得到对目标飞行器轨道的估计如下:

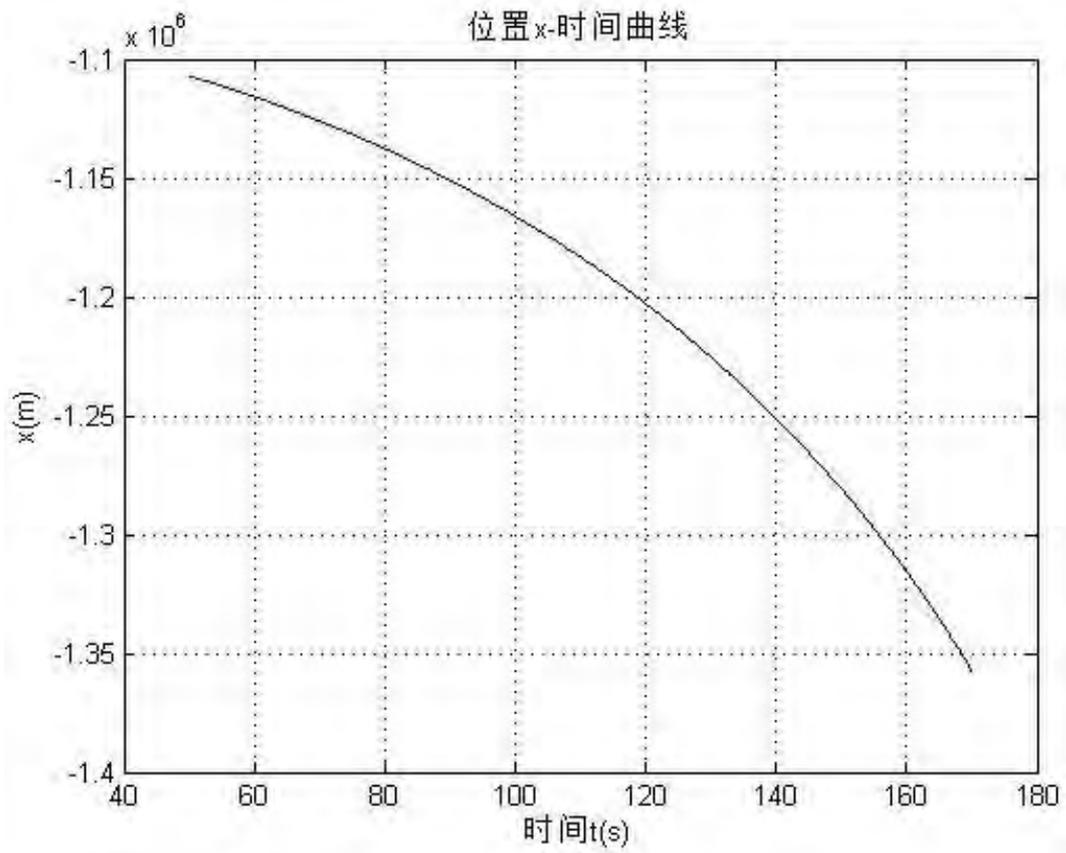


图 14 目标飞行器 t-x 曲线

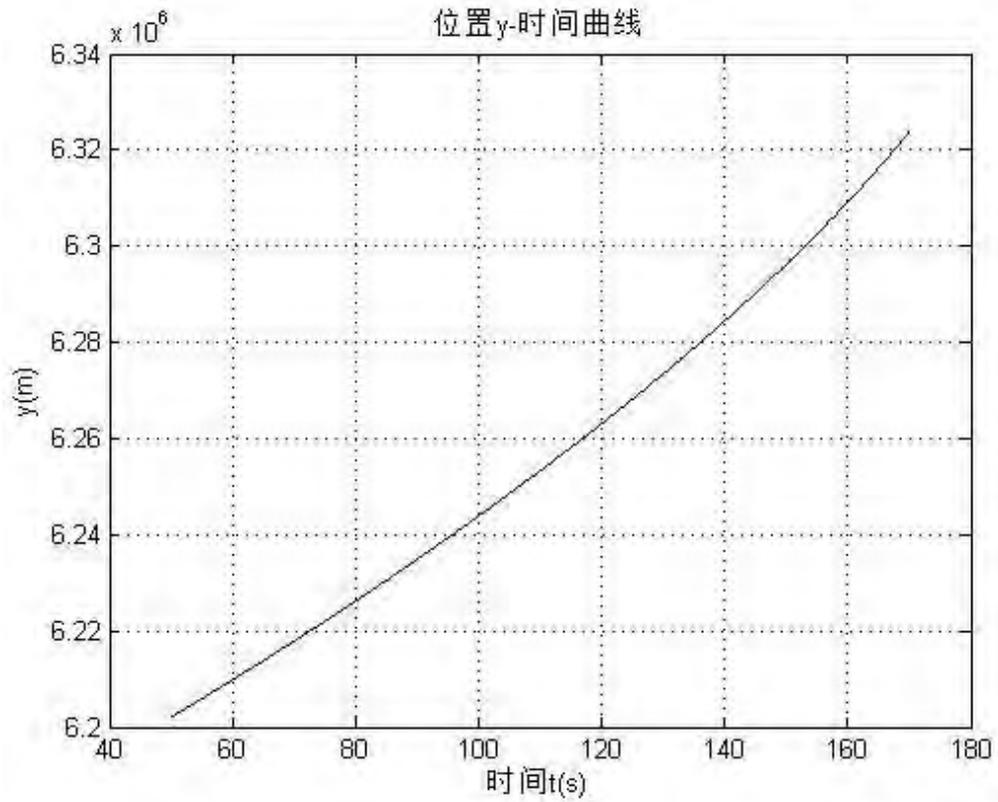


图 15 目标飞行器 t-y 曲线

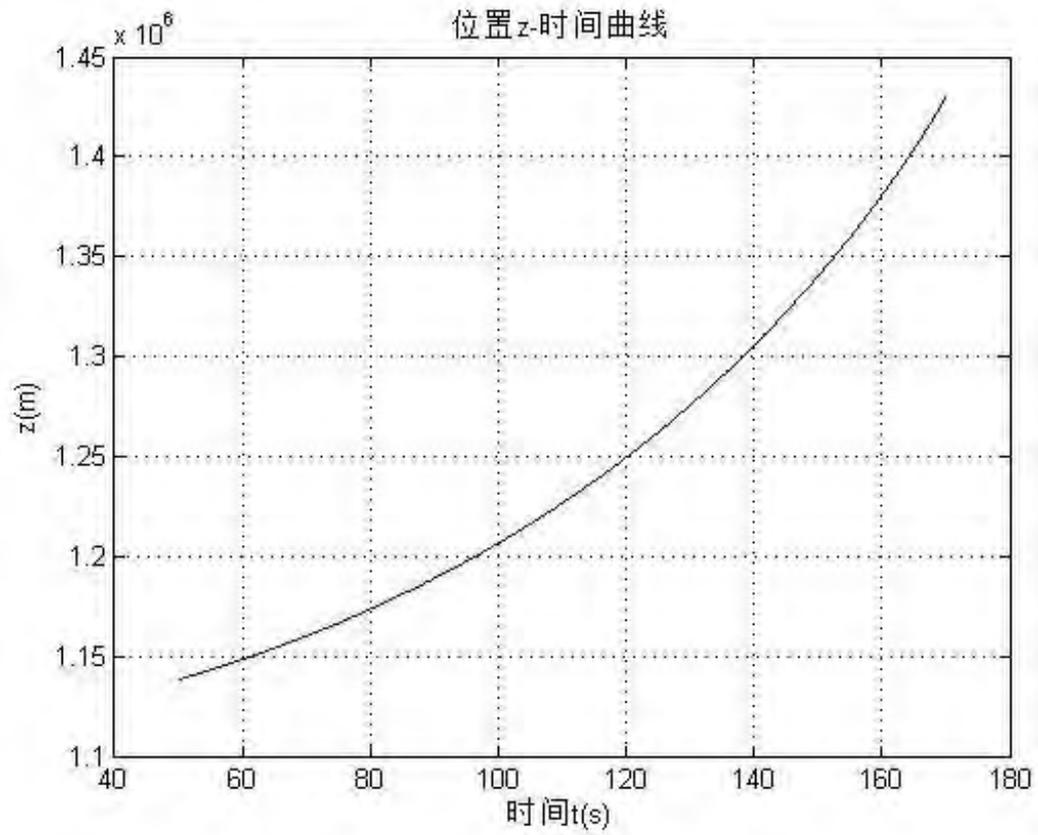


图 16 目标飞行器 t-z 曲线

目标飞行器速度曲线如下：

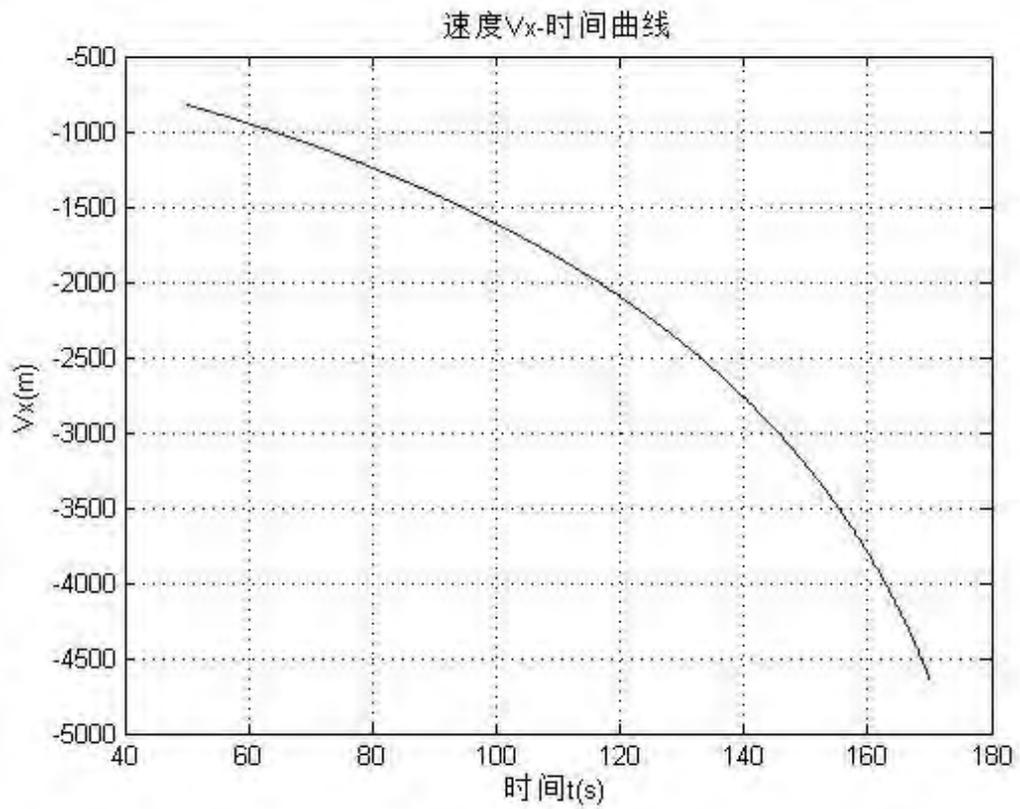


图 17 目标飞行器 t-v_x 曲线

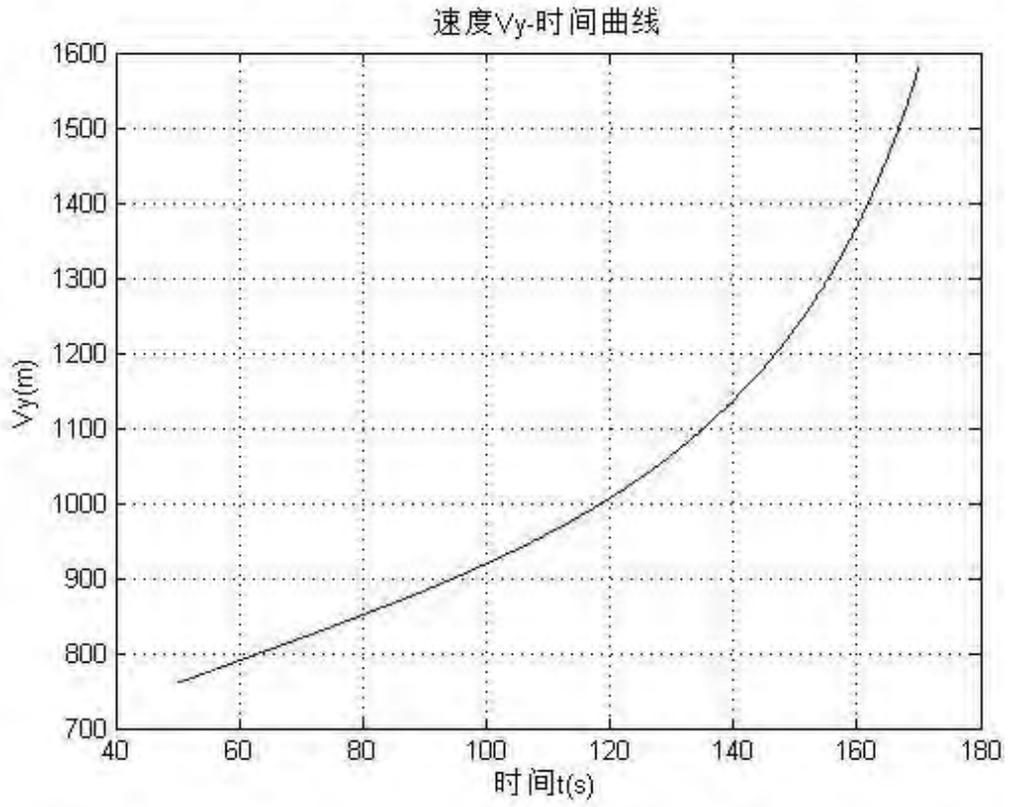


图 18 目标飞行器 $t-v_y$ 曲线

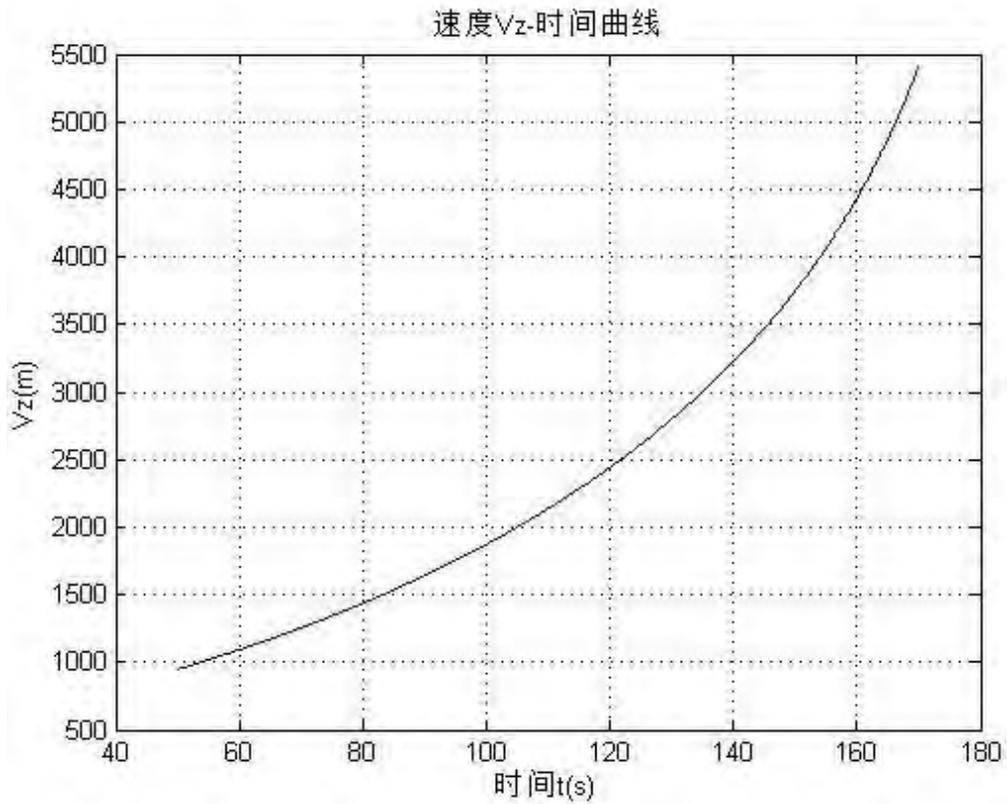


图 19 目标飞行器 $t-v_z$ 曲线

目标飞行器在指定采样点的位置和速度如下：

t	x	y	z	v_x	v_y	v_z
50	-1.10244×10^6	6.20221×10^6	1.14201×10^6	-8.28741×10^2	7.24473×10^2	9.25111×10^2
60	-1.11140×10^6	6.20963×10^6	1.15203×10^6	-9.66891×10^2	7.58658×10^2	1.08079×10^3
70	-1.12182×10^6	6.21738×10^6	1.16369×10^6	-1.11974×10^3	7.91258×10^2	1.25313×10^3
80	-1.13385×10^6	6.22545×10^6	1.17715×10^6	-1.28887×10^3	8.22861×10^2	1.44389×10^3
90	-1.14766×10^6	6.23383×10^6	1.19263×10^6	-1.47635×10^3	8.54219×10^2	1.65541×10^3
100	-1.16345×10^6	6.24253×10^6	1.21034×10^6	-1.68492×10^3	8.86269×10^2	1.89077×10^3
110	-1.18144×10^6	6.25157×10^6	1.23054×10^6	-1.91825×10^3	9.20191×10^2	2.15411×10^3
120	-1.20191×10^6	6.26095×10^6	1.25354×10^6	-2.18133×10^3	9.57499×10^2	2.45105×10^3
130	-1.22519×10^6	6.27073×10^6	1.27970×10^6	-2.48112×10^3	1.00020×10^3	2.78941×10^3
140	-1.25169×10^6	6.28098×10^6	1.30950×10^6	-2.82761×10^3	1.05106×10^3	3.18045×10^3
150	-1.28195×10^6	6.29179×10^6	1.34354×10^6	-3.23589×10^3	1.11413×10^3	3.64118×10^3
160	-1.31669×10^6	6.30332×10^6	1.38264×10^6	-3.73014×10^3	1.19574×10^3	4.19883×10^3
170	-1.35697×10^6	6.31581×10^6	1.42799×10^6	-4.35269×10^3	1.30683×10^3	4.90110×10^3

5.4 问题四

单星无源探测属于不完备观测，在无先验信息的支持下，利用空间飞行器轨道的特殊性，结合较强的模型约束，得到一定精度轨道参数估计。本节首先对弹道进行合理的动力学建模，然后利用弹道的特殊性，对弹道参数进行强有力的约束，进而在此基础上建立相应的弹道参数估计算法。

5.4.1 单星无源探测的目标运动学建模

飞行器在地心惯性坐标系下的质心运动微分方程如公式(1)所示，在飞行器的重力转弯段，其攻角数值很小，为简化模型可视为零。即 $\alpha=0$ 。攻角确定之后，飞行器的推力加速度模型 \vec{F}_T 成为弹道的决定性因素。本文采用如下模型表示：

$$\vec{F}_T = \vec{v}_r(t) \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = \frac{k_1}{k_2-t} \cdot \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} \quad (20)$$

其中， k_1 ， k_2 为推力模型的待定参数， $\frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}$ 表示与速度 $\dot{\vec{r}}$ 同向的单位向量。

据此可得到飞行器的动力学方程如公式(21)所示：

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_e + \vec{F}_T = -\frac{G_m}{|\vec{r}(t)|^3} \vec{r}(t) + \frac{k_1}{k_2-t} \cdot \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} \quad (21)$$

根据公式(21)，在获得导弹初始位置、初始速度以及推力模型参数后，可以获得弹道曲线。待估参数有两部分：一部分是积分初值，即在观测起始时刻，

飞行器在地心坐标系下的位置速度参数 $(x_{c0}, y_{c0}, z_{c0}, vx_{c0}, vy_{c0}, vz_{c0})$ ，另一部分是飞行器推力模型参数 (k_1, k_2) 。

5.4.2 待估参数的等价变换

对于积分初值 $(x_{c0}, y_{c0}, z_{c0}, vx_{c0}, vy_{c0}, vz_{c0})$ 而言，若直接将其作为待估参数进行解算，结果严重依赖于初值。而采用带非线性约束的优化算法求解效率较低。本节通过对参数的等价变换，将 $(x_{c0}, y_{c0}, z_{c0}, vx_{c0}, vy_{c0}, vz_{c0})$ 的估计转化为对 $(\alpha_0, \beta_0, h_0, v_0, \theta_0, h_f)$ 的估计，利用飞行器轨道的特殊性，获得更加可靠的约束信息。

下面分别解释变换后各参数含义及变换关系式。

(α_0, β_0) 为初始观测时刻，卫星对飞行器的真实观测量。 h_0 为起始观测时刻飞行器的真实飞行高度，这三个参数用来确定位置初值 (x_{c0}, y_{c0}, z_{c0}) ，其等价变换关系式如下：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_{c0} \\ y_{c0} \\ z_{c0} \end{bmatrix} = C_s^c \begin{bmatrix} x_{s0} \\ y_{s0} \\ z_{s0} \end{bmatrix} = x_{s0} C_c^s \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \\ h_0 + Re = \sqrt{x_{c0}^2 + y_{c0}^2 + z_{c0}^2} \end{cases} \quad (22)$$

即

$$(x_{c0}, y_{c0}, z_{c0}) = f(\alpha_0, \beta_0, h_0) \quad (23)$$

(v_0, θ_0) 为起始观测时刻，飞行器的飞行速度大小和速度高低角， h_f 为卫星观测终点时刻飞行器的真实高程。这三个参数用来确定速度初值。

$$\text{其中： } v_0 = \sqrt{vx_{c0}^2 + vy_{c0}^2 + vz_{c0}^2}, \quad \theta_0 = \arctan\left(\frac{vz_{c0}}{\sqrt{vx_{c0}^2 + vy_{c0}^2}}\right)$$

由假设可知，对于近平面弹道而言，目标飞行的轨迹在一个平面内，即速度矢量方向落在由目标初始位置矢量 \vec{R}_0 和目标终点位置矢量 \vec{R}_f 构成的平面内如图 20 所示。即满足：

$$(\vec{R}_0 \times \vec{R}_f) \cdot \vec{V}_0 = 0 \quad (24)$$

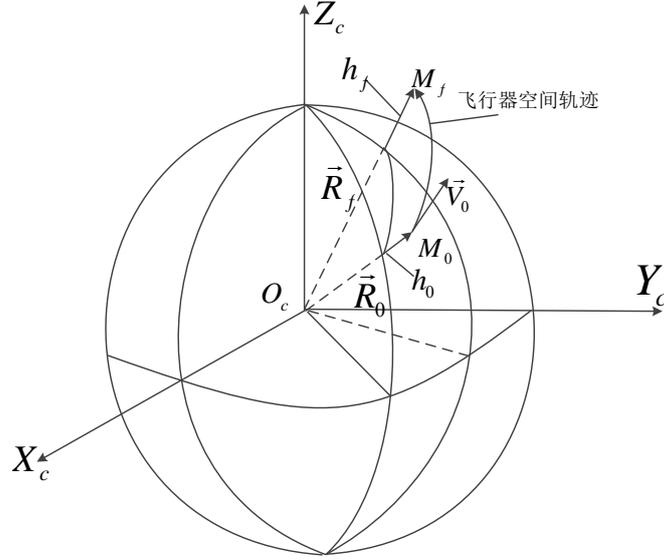


图 20 目标飞行轨迹矢量关系示意图

其中目标飞行终点位置矢量 \vec{R}_f 可根据式(23)由 (α_f, β_f, h_f) 获得。由此可得三个速度初值 $(v_{x_{c0}}, v_{y_{c0}}, v_{z_{c0}})$ 的等价转换关系如下式所示：

$$\begin{cases} v_0 = \sqrt{v_{x_{c0}}^2 + v_{y_{c0}}^2 + v_{z_{c0}}^2} \\ \theta_0 = \arctan\left(\frac{v_{z_{c0}}}{\sqrt{v_{x_{c0}}^2 + v_{y_{c0}}^2}}\right) \\ (\vec{R}_0 \times \vec{R}_f) \cdot \vec{V}_0 = (\vec{R}_0 \times \vec{R}_f) * \begin{bmatrix} v_{x_{c0}} \\ v_{y_{c0}} \\ v_{z_{c0}} \end{bmatrix}^T = 0 \end{cases} \quad (25)$$

5.4.3 变换参数的约束区间确定

显然，首发高程 h_0 可以由(26)式确定其区间范围。

$$h_{\min} \leq \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2} - \text{Re} \leq h_{\max} \quad (26)$$

其中， Re 为地球半径， h_{\min} ， h_{\max} 分别为首发高程的最大值和最小值。

(α_0, β_0) (记为 \vec{U}_0) 约束区间确定。位置积分初值 (x_{c0}, y_{c0}, z_{c0}) (记为 \vec{R}_c)

与卫星测量坐标系下的坐标 (x_{s0}, y_{s0}, z_{s0}) (记为 \vec{R}_s) 关系如公式(27)所示：

$$\vec{R}_s = C_c^s (\vec{R}_c - \vec{S} + \vec{\xi}) \quad (27)$$

其中， \vec{S} 表示观测卫星所处的地心坐标系位置， $\vec{\xi}$ 表示误差项，此处只考虑观测的系统误差。 C_c^s 表示从地心坐标系到卫星观测坐标系的坐标转化矩阵。

则有观测量的真实值 α 和测量值 $\tilde{\alpha}$ 满足关系式^[3]:

$$\begin{aligned} |\tilde{\alpha}-\alpha| &= |T_\alpha(\vec{R}_s+\vec{\xi})-T_\alpha(\vec{R}_s)| \\ &= \left| \frac{y_s+\xi_y}{x_s+\xi_x} - \frac{y_s}{x_s} \right| = \left| \frac{|\xi_y| - \frac{y_s}{x_s} \xi_x}{x_s - \xi_x} \right| \\ &\leq \frac{|\xi_y| + \left| \frac{y_s}{x_s} \right| |\xi_x|}{|x_s| - |\xi_x|} \leq \frac{E_{\max} + M_{\max} E_{\max}}{H_{\min} - E_{\max}} \end{aligned} \quad (28)$$

其中 E_{\max} 表示系统误差上界，参考问题三结果即可得到。 M_{\max} 表示目标在观测坐标系下，坐标的第一、第二分量分别与第三分量比值的上界，即 $M_{\max} = \max\{\alpha, \beta\}$ ，根据卫星提供的测量数据即可得到该上界。 H_{\min} 表示目标矢量第一分量绝对值的下界，。

同理可得 β 和测量值 $\tilde{\beta}$ 满足关系式:

$$|\tilde{\beta}-\beta| \leq \frac{E_{\max} + M_{\max} E_{\max}}{H_{\min} - E_{\max}} \quad (29)$$

由此可得 (α_0, β_0) 的约束式:

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_0 - \frac{E_{\max} + M_{\max} E_{\max}}{H_{\min} - E_{\max}} \leq \alpha_0 \leq \frac{E_{\max} + M_{\max} E_{\max}}{H_{\min} - E_{\max}} + \tilde{\alpha}_0 \\ \tilde{\beta}_0 - \frac{E_{\max} + M_{\max} E_{\max}}{H_{\min} - E_{\max}} \leq \beta_0 \leq \frac{E_{\max} + M_{\max} E_{\max}}{H_{\min} - E_{\max}} + \tilde{\beta}_0 \end{cases} \quad (30)$$

对于 (v_0, θ_0) 的估计区间，首先速度绝对值大小是有范围的，其实速度倾角也是有约束的。由于要表示的积分初值在目标飞行的主动段，导弹的飞行高度与高度与速度范围是有限的，根据经验可以给定先验的速度大小以及速度倾角范围，即公式(31)所示:

$$\begin{cases} v_{\min} \leq v_0 \leq v_{\max} \\ \theta_{\min} \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (31)$$

根据文献[Wafolmieph, Keptoph. Ballistic Missile Design and Experiment [M]. Bei Jing: Defense Industry Publishing Company, 1977]中的大量统计结果, 同时可以给定卫星最后一个观测量所对应的弹道高度 h_j 的经验范围。

至于飞行器推力模型参数 (k_1, k_2) , 可以参考问题二关于推力加速度的研究, 将其控制在 10% 的范围内取值。

5.4.4 轨道估算过程

对本文所建立的飞行器运动模型主要估计参数有 8 个, 分别是: 卫星的真实起始观测量 α_0 与 β_0 、起始观测时刻导弹的飞行高度 h_0 、飞行器速度绝对值 v_0 、速度倾角 θ_0 、观测终点时刻导弹的高程 h_e 和飞行器模型参数 k_1 和 k_2 。将这八个参数作为导弹主动段卫星动力学方程(21)的初值和参数, 利用 Runge-Kutta 数值积分方程可得到弹道, 可以积分得到弹道。然后利用位置坐标 (x_c, y_c, z_c) 可以计算出测元 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$, 与观测数据得到的 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ 作比较, 并剔除系统误差影响 (利用第三问得到的系统误差), 采用非线性最小二乘法, 采用遗传算法, 搜索迭代求解待估参数, 然后用优化的参数进行轨道的估计。具体求解流程图, 如图 21 所示:

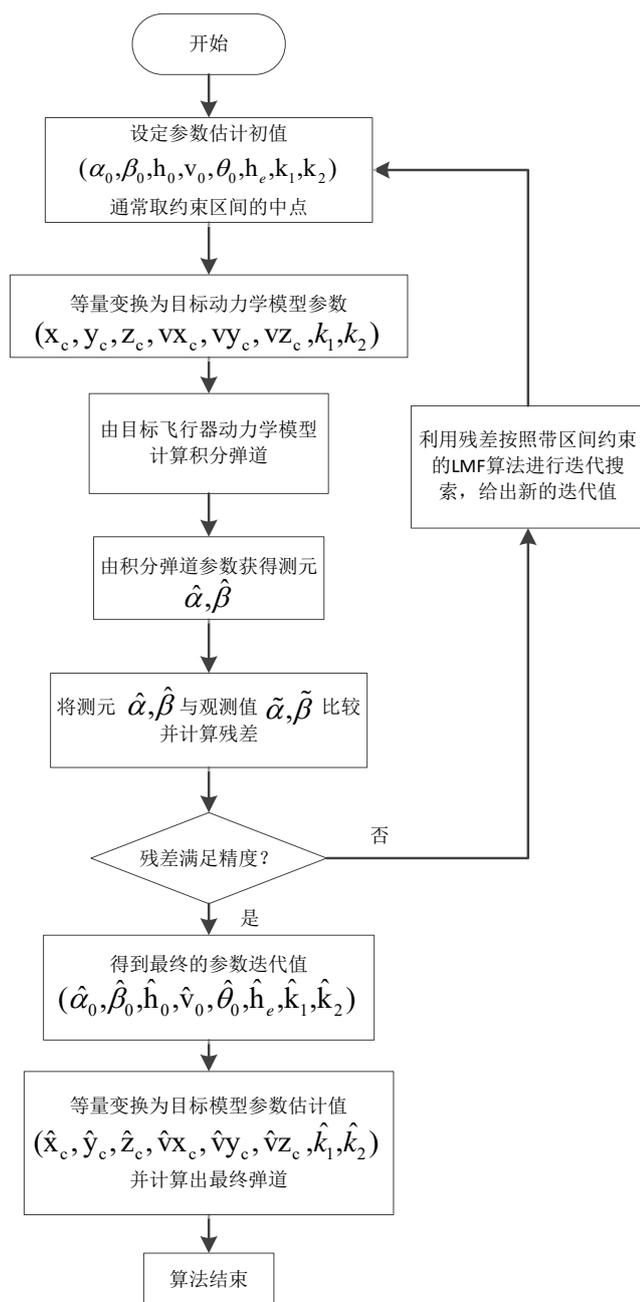


图 21 单星无源探测轨道估算的程序流程图

六、 模型评价与改进建议

本论文根据问题描述及数据内容建立的弹道模型符合要求，用遗传算法大大简化了分析和计算的过程，是模型成功的关键之一。从仿真结果来看，其残差在合理范围内。但是其不足是模型的计算速度并不完全适用于实际中的系统，尤其是如果在卫星上实时计算更难以保证实时性，如果将数据传回基站的工作站，或许可以有所改善。所以，本文提出的模型估计算法有进一步提升的空间。另外，遗传算法因为其随机性，结果仿真结果并不是每次相同，有些许波动，但是即使收敛的结果不完全相同，但是残差都在可接受范围内，对建模结果影响不大，弹道也符合要求。系统误差的估计以矢量旋转和小角度矢量化的方式

实现，物理意义明确。从物理意义上分析出了数据系统误差的来源和表现，用适当的方法将其导出，并从观测数据中剔除，可以有效提高精度。

单星预警优势明显，但是因为缺少数据，必须要借助先验知识等信息进行估计。需要对先验星系进行处理，得到模型初值和模型参数的大改范围，而对模型初值和模型参数直接给出范围往往不实际，本论文给出了一种等价变换，在满足约束的条件下尽可能选择比较容易得到的数据，变换成估计时需要的初值和参数。另外，除了遗传算法之外，LMF 算法也可以用于解决本类问题，可以做为以后改进的方向。

七、 参考文献

- [1]王正明等，弹道跟踪数据的校准与评估，长沙：国防科技大学出版社，1999。
- [2]以光衢，惯性导航原理，北京：航空工业出版社，1987：104。
- [3]申镇，单星预警弹道导弹参数估计方法研究[D]，长沙：国防科学技术大学，博士论文，2010。

附件

附件中有本论文的 `matlab` 程序文件，用于仿真建模结果，对其说明如下：

0. 附件中 `matlab` 程序均在 `matlab 2009b` 执行通过，数据文件与程序文件放在同一目录。

1. `sat_moving.m` 为第一题计算程序，积分计算卫星弹道

2. `double_sat.m` 为计算第二、第三题程序，运行之后时间会比较长，这是由于遗传算法决定的。其执行过程就是先计算用逐点交汇定位确定一条弹道，用该弹道估计模型参数。之后用带参数模型估计出系统误差，再剔除误差之后重新估计弹道和模型。