

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第九届“华为杯” 全国研究生数学建模竞赛

学 校 南京航空航天大学

参赛队号 10287008

	1.	杨鲤铭
队员姓名	2.	王星
	3.	朱翀

第九届“华为杯”全国研究生数学建模竞赛



题目

有杆抽油系统的数学建模及诊断

摘 要：

借助于运动学和动力学建模仿真，本文研究了有杆抽油系统的运动学特性和动力学特性。基于 Gibbs 模型计算得到的泵功图，本文还建立了油井产量计算模型，泵故障分析诊断模型。最后，鉴于当前 Gibbs 模型还存在一些不足，本文提出了新的抽油系统模型，并给出了相应的解法。

针对问题一，本文基于解析法建立了曲柄、连杆、游梁后臂三个活动杆件所构成的四连杆机构的运动学模型，用以求解悬点的位移、速度、加速度的运动参数随曲柄转角 φ 的变化规律。该方法首先根据已知的曲柄、连杆、游梁后臂尺寸和上死点位置，计算出曲柄中心和游梁支点的相对位置关系，然后利用几何关系，建立运动学模型，从而获得悬点位移、速度、加速度关于 φ 的解析式，最终精确分析悬点运动规律。

针对问题二，本文使用 Gibbs 模型，将悬点示功图作为边界条件来求解泵功图，并且给出了附件 1, 2 中两口油井的泵供图结果。首先，我们根据冲程定义来调整测试数据，获得上冲程和下冲程对应的测试位移和载荷，将之作为边界条件。然后，采用变量分离法来求解 Gibbs 模型。计算结果表明，转化之后的泵功图曲线平滑，且基本没有波动。

针对问题三的第 1 小问，本文建立了有效冲程法和面积法这两个不同的模型来估算油井的产液量。有效冲程法模型，通过对泵的工作过程进行分析，找出游动阀或者固定阀开闭点行程的较小值作为有效冲程，进而计算油井的日产液量。面积法模型，根据实际产液量与理论产液量的比值与实际泵功图与理论示功图曲线所围面积比值的的关系，求

取油井的实际日产液量。这两种方法分别从两个不同角度出发，但两者估算的油井日产液量基本相同，相互验证了两种模型的正确性。对于第 2 小问，本文建立了一个灰色理论与网格法相结合的模型来判别泵内是否充气。首先，根据泵功图中曲线的几何外形特点提取泵功图归一化无因次灰度统计特征来构成分类特征向量，然后将典型的正常泵功图和充气泵功图也转化为相同的特征向量，通过计算两者之间的灰关联度，来判断泵内是否充气。该方法准确、可靠。

针对问题四的第一小问，通过分析 Gibbs 模型的建立过程，发现其在模型建立时忽略了抽油杆重力和浮力的影响，而是将重力和浮力作为集中力直接作用于悬点处。很显然，抽油杆的重力和浮力属于分布力，将其等效为集中力并且作用在非质心处的悬点将导致变形的计算不准确，并最终影响泵功图的计算精度。鉴于此，通过微元分析法，考虑抽油杆的重力和浮力后，本文重新建立了相应的抽油系统模型。通过理论推导，给出了该模型的解析解。计算结果表明，其计算精度比 Gibbs 模型更高。

关键词：有杆抽油系统，Gibbs 模型，有效冲程法，面积法，灰色理论与网格法，非齐次波动方程模型

目 录

1 问题重述.....	6
2 问题分析.....	7
2.1 问题一：光杆悬点运动规律.....	7
2.2 问题二：泵功图计算.....	7
2.3 问题三：泵功图的应用.....	8
2.4 问题四：深入研究的问题.....	8
3 符号定义与说明.....	9
4 问题假设.....	11
5 问题一：光杆悬点运动规律.....	12
5.1 简化模型.....	12
5.1.1 简化为简谐运动模型.....	12
5.1.2 简化为曲柄滑块机构模型.....	13
5.2 解析模型.....	15
5.3 计算结果比较及分析.....	17
6 问题二：泵供图计算.....	19
6.1 计算模型及求解方法.....	19
6.2 计算结果与分析.....	22
7 问题三：泵功图的应用.....	24
7.1 油井日产液量计算.....	24
7.1.1 模型一：有效冲程法.....	24
7.1.2 模型二：面积法.....	30
7.1.3 计算结果及分析.....	32
7.2 泵故障诊断.....	32
7.2.1 泵功图网格化.....	32
7.2.2 灰度矩阵的形成.....	33
7.2.3 灰度矩阵特征值的提取.....	33
7.2.4 建立灰关联度.....	34
7.2.5 计算结果及分析.....	35

8 问题四：深入研究的问题.....	36
8.1 抽油系统模型改进.....	36
8.1.1 非齐次波动方程模型建立及求解.....	36
8.1.2 计算结果与分析.....	38
9 模型评价与改进.....	41
9.1 问题一模型评价.....	41
9.2 问题二模型评价.....	41
9.3 问题三模型评价.....	41
9.4 问题四模型评价.....	41
10 参考文献.....	42

1 问题重述

问题一：光杆悬点运动规律

电机旋转运动通过四连杆机构转变为抽油杆的垂直运动。假设驴头外轮廓线为部分圆弧、电机匀速运动，悬点 E 下只挂光杆（光杆下不接其它杆，不抽油，通常用来调试设备）。请按附录 4 给出四连杆各段尺寸，利用附件 1 的参数，求出悬点 E 的一个冲程的运动规律：位移函数、速度函数、加速度函数。并与有荷载的附件 1 的悬点位移数据进行比较。

问题二：泵功图计算

1966 年，Gibbs 给出了悬点示功图转化为地下示功图的模型，由于受计算机速度的限制，直到近些年才得以被重新重视。请使用 Gibbs 模型，给出由悬点示功图转化为泵功图的详细计算过程，包括：原始数据的处理、边界条件、初始条件、求解算法；附件 1 是只有一级杆的某油井参数和悬点示功数据，附件 2 是有三级杆的另一油井参数和悬点示功数据，利用它们分别计算出这两口油井的泵功图数据；并分别绘制出两油井的悬点示功图和泵功图（每口井绘一张图，同一井的悬点示功图与泵功图绘在同一张图上，请标明坐标数据）。

问题三：泵功图的应用

1) 建立 2 个不同的由泵功图估计油井产量的模型，其中至少一个要利用“有效冲程”；并利用附件 1 和附件 2 的数据分别估算两口油井一天（24 小时）的产液量。（单位：吨，这里所指的液体是指从井里抽出来的混合液体）

2) 如图 5 (C) 形式的泵功图表示泵内有气体，导致泵没充满。请建立模型或算法，以由计算机自动判别某泵功图数据是否属于泵内有气体的情况。并对附件 1、附件 2 对应的泵功图进行计算机诊断是否属于泵内充气这种情况。

问题四：深入研究的问题

1) 请对 Gibbs 模型进行原理分析，发现它的不足。在合理的假设下，重新建立抽油系统模型或对现有模型进行改进；并给出由悬点示功图转化为泵功图的详细计算过程，包括：原始数据的处理、边界条件、初始条件、求解算法；利用附件 1、附件 2 的数据重新进行计算；对计算结果与问题二的计算结果进行比较，分析你的模型的优缺点。

2) Gibbs 模型在数学上可简化为“波动方程”：
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \frac{\partial u}{\partial t}$$
 其中 a 为已知常数， c 称为阻尼系数，鉴于大多数的阻尼系数公式是作了诸多假设后推出的，并不能完整地反应实际情况。如果能从方程本身和某些数据出发用数学方法估计参数 c ，贡献是很大的。对此，请你进行研究，详细给出计算 c 的理论推导过程并尽可能求出 c 。如果需要题目之外的数据，请用字母表示之并给出计算 c 的推导过程。

2 问题分析

2.1 问题一：光杆悬点运动规律

游梁式抽油机是以游梁支点和曲柄中心的连线做固定杆，以曲柄、连杆和游梁后臂为三个活动杆所构成的四连杆机构。电机旋转运动通过四连杆机构转变为抽油杆的垂直运动。问题一就是需要根据电机旋转运动的规律来求解光杆悬点的运动规律。

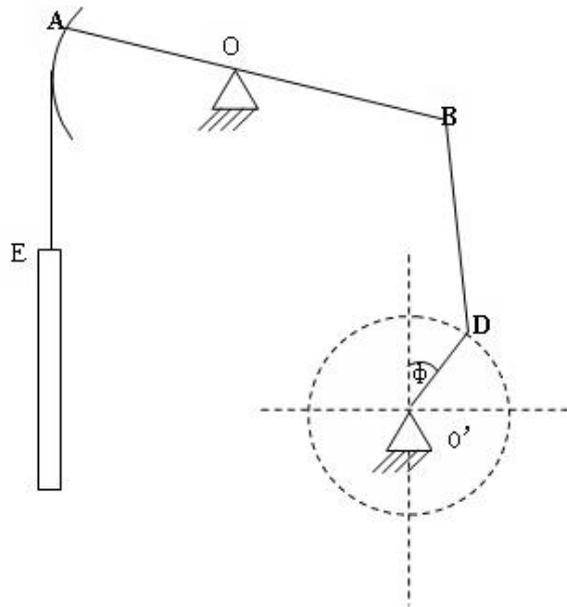


图 2.1 抽油机四连杆机构示意简图

依据要求， $t=0$ 时刻，曲柄滑块 D 位于上顶点 ($\phi=0$)，AB 平行于水平面，E 对应坐标原点 (称为 E 的下死点)，E 的位移为 0；D 运动到下顶点 ($\phi=\pi$) 时，E 的位移到达最大 (称为 E 的上死点)。但是本题所给的曲柄、连杆和游梁前后臂的长度，并不能完全满足上述条件。所以，本文在满足下死点条件的情况下，同时尽量保证贴合上死点条件来确定游梁支点和曲柄中心的相对位置。在此基础上，利用几何关系，可以准确求出悬点的运动规律。

2.2 问题二：泵功图计算

采用 Gibbs 模型可以将悬点示功图转化为泵功图。然而，由于所给原始测试数据的第一对并不一定刚好是一个冲程的起点，上行和下行用的时间也不一定完全相等，因此需要先判断哪些数据属于上冲程，哪些数据属于下冲程。依据定义：上冲程为下死点运动到上死点的过程，下冲程为上死点运动到下死点的过程。所以只要确定下死点和上死点对应的测试点即可确定上冲程和下冲程的测试数据。本文将悬点位移最小值点取为下死点，位移最大值点取为上死点。考虑到 Gibbs 模型在推导时忽略了抽油杆在油水混合液中的重力载荷，所以在计算时需要将测试得到的悬点载荷减去该节杆在油水混合液中的重力载荷。然后将测试位移和等效后的载荷作为边界条件，在此基础上采用分离变量

法来求解 Gibbs 模型，就可以将悬点示功图转化为泵功图。

2.3 问题三：泵功图的应用

第 1 小问为依据泵功图求油井的日产液量。在泵功图图中，真正取抽汲作用的泵行程为有效冲程。为了计算有效冲程，本文建立了三点曲率有效冲程法和五点曲率有效冲程法。通过对泵工作过程的分析，可以知道泵功图上阀开闭点处曲率变化较大，固定阀开闭点在上冲程的高载荷段，游动阀的开闭点在下冲程的低载荷段，有效冲程即为游动阀或者固定阀开闭点行程的较小值。采用三点曲率法或五点曲率法，可以方便地找出泵功图中游动阀和固定阀的开闭点。进而获得有效冲程，并最终求得油井的日产液量。

除了有效冲程能够估算油井的日产液量外，利用泵功图曲线包围的面积也可以估算日产液量。从这个角度出发，本文提出了计算油井的日产液量的第二种方法，即面积法。理论产液量、理论泵功图中曲线包围的面积都可以通过油井的相关数据直接计算求得，实际泵功图的面积也可以通过微分思想求得。依据实际产液量与理论产液量的比值与实际泵功图与理论示功图比值的关系，即可求得油井的实际日产液量。

第 2 小问为依据泵功图判断泵内是否充气。泵功图的形状可以直接反映泵的工作状态。要判断泵内是否充气，只需要将实际泵功图与典型正常泵功图、泵充气泵功图相比较。如果实际泵功图形状更接近正常泵功图，即认为泵不充气；反之即可认为泵充气。而判断泵功图之间的接近程度可以采用灰色理论与网格法相结合的方法。灰关联度越大，即表明图形之间的形状越接近。

2.4 问题四：深入研究的问题

Gibbs 模型建立时，忽略了微元的重力和浮力，从而获得简单的齐次波动方程。然而在实际计算中，由于抽油杆重力和浮力的影响必须考虑，Gibbs 模型只能将抽油杆的重力和浮力视为悬点处的集中力。很显然，抽油杆的重力和浮力属于分布力，将其等效为集中力并且作用在非质心处的悬点将导致变形的计算不准确，并最终影响泵功图的计算精度。鉴于此，通过微元分析法，考虑抽油杆的重力和浮力后，我们可以建立更精确的力学方程来描述抽油杆的位移函数。

由于引入了重力和浮力影响，新模型方程变为非齐次的波动方程。对于材质均匀的抽油杆，如果油水混合液也是均匀的，新模型方程中的齐次项变为常数。对于齐次项为常数的波动方程，通过理论推导可以求得其解析解。然后通过与 Gibbs 模型计算结果对比，分析新模型的优缺点。

3 符号定义与说明

s	位移
v	速度
a	加速度
ϕ	曲柄转角
$u(x,t)$	t 时刻 x 截面处杆的位移
$F(x,t)$	t 时刻 x 截面处杆的载荷
a	应力波在抽油杆柱中的传播速度
E	抽油杆柱的杨氏模量
A	抽油杆横截面积
L	抽油杆长度
D_r	抽油杆直径
D_l	泵径
ρ_g	抽油杆柱的密度
ρ_o	油的密度
c	阻尼系数
W_g	抽油杆的重力
F_o	抽油杆在油中所受的浮力
Q_{th}	理论产液量
Q	实际产液量
η_v	混合液体体积系数
n_w	混合液的含水率
B_o	原油体积系数
B_w	水的体积系数
S	悬点冲程长度
S_p	柱塞冲程长度
λ	静载冲程损失
S_{PE}	柱塞有效冲程
N_s	抽油机的冲次
A_p	柱塞横截面积

K_i	点的曲率
δ_i	曲率变化量
δ_i'	曲率变化量的平均值
A_h	理论示功图中曲线包围的面积
A_j	实际泵功图中曲线包围的面积
m_{ij}	灰度值
f_1, \bar{g}	灰度均值
f_2, σ^2	灰度方差
f_3, S	灰度偏差
f_4, P	灰度峰度
f_5, E	灰度能量
f_6, T	灰度熵
$\varepsilon_i(k)$	关联系数
γ_i	关联度

4 问题假设

- 假设驴头外轮廓线为部分圆弧、电机匀速运动，悬点 E 下只挂光杆；
- 假设抽油井垂直于地面，同时抽油杆垂直放入井中，抽油杆与油管无摩擦；
- 假设抽油杆材质均匀，单级杆的横截面积不变，抽油杆全部浸没在油中；
- 假设井中的油液和水混合均匀，不考虑温度变化对油密度的影响；
- 假设所有抽油机的油管是锚定。

5 问题一：光杆悬点运动规律

在分析抽油杆悬点运动规律时，一般可以采用以下两种模型进行分析：一是简化模型分析法^[1]；二是解析模型分析法。首先，我们用简化模型分析法做定性的分析，观察悬点 E 位移、速度、加速度的变化曲线趋势，然后采用解析模型分析法来精确计算悬点的位移、速度、加速度，以研究抽油杆的实际运动规律。AE 段钢缆长度很小，且题中没有给出给出钢缆的材料数据，因此可以忽略钢缆的变形，所以悬点 E 的运动规律就相当于 A 点的运动规律。

5.1 简化模型

游梁式抽油机是以游梁支点和曲柄中心的连线做固定杆，以曲柄、连杆和游梁后臂为三个活动杆所构成的四连杆机构。采用简化模型分析时，可以将四连杆机构简化为简谐运动和曲柄滑块机构进行。

5.1.1 简化为简谐运动模型

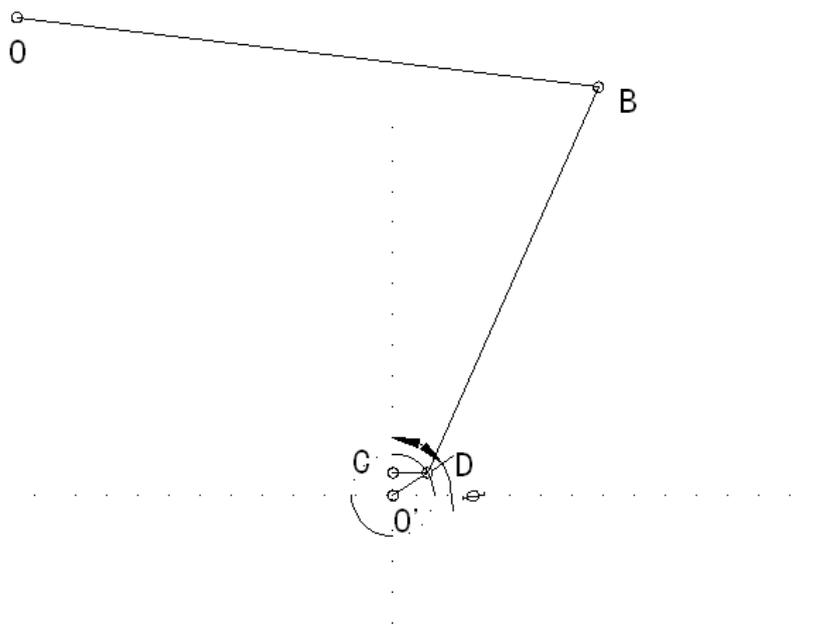


图 5.1 四连杆机构示意图

如图 5.1 所示，当曲柄半径 $O'D = l_1$ 比连杆长度 $BD = l_2$ 和游梁后臂 $BO = l_3$ 小得多时， l_1 与 l_2 和 l_3 的比值可以忽略。此时，游梁和连杆的连接点 B 的运动可看作简谐运动，即认为 B 点的运动规律和 D 点做圆运动时在垂直中心线上的投影（C 点）的运动规律相同。则 B 点经过 t 时间（曲柄转过 ϕ 角）时的位移 s_B 为：

$$s_B = l_1 (1 - \cos \phi) = l_1 (1 - \cos \omega t) \quad (5.1)$$

式中， ϕ 为曲柄转角， $\phi = \omega \cdot t$ ； ω 为曲柄的角速度； t 为时间。

已知游梁前臂为 l_3 ，则点 A 的位移 s_A ，速度 v_A ，加速度 a_A 分别为：

$$\begin{aligned} s_A &= \frac{l_4}{l_3} s_B = \frac{l_4}{l_3} l_1 (1 - \cos \omega t) = \frac{l_4}{l_3} l_1 (1 - \cos \phi) \\ v_A &= \frac{ds_A}{dt} = \frac{l_4}{l_3} \omega l_1 \sin \omega t = \frac{l_4}{l_3} \omega l_1 \sin \phi \\ a_A &= \frac{da_A}{dt} = \frac{l_4}{l_3} \omega^2 l_1 \cos \omega t = \frac{l_4}{l_3} \omega^2 l_1 \cos \phi \end{aligned} \quad (5.2)$$

由以上三式可得简化为简谐运动时悬点 E 的位移、速度、加速度随 ϕ 角的变化规律。

5.1.2 简化为曲柄滑块机构模型

简化为简谐运动所得结果，只能在做不太精确的近似计算和分析中应用。因为，实际抽油机的 l_1/l_2 值是不可忽略的，特别是冲程长度较大时，忽略后会引起很大的误差。为此，如果 l_1/l_2 的值为有限值，即 $0 < l_1/l_2 < 1/4$ ，可以把 B 点绕游梁支点的弧线运动近似地看作直线运动，即可以把抽油机的运动简化为下图所示的曲柄滑块运动。

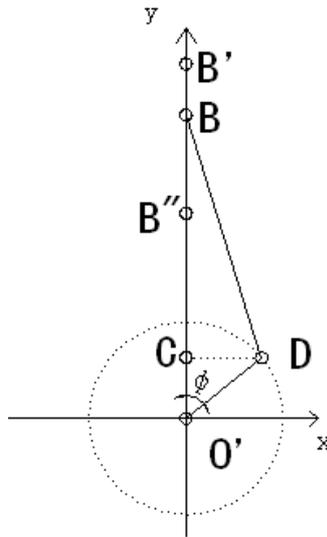


图 5.2 曲柄滑块机构示意图

$\phi = 0^\circ$ 时，游梁与连杆的连接点 B 在 B' 点，为距曲柄轴心最远的位置，相应于悬点 E 的下死点。 $\phi = 180^\circ$ 时，B 点在 B'' 处，为距曲柄轴心最近的位置，相应于悬点 E 为上死点。

$$O'B' = 1 + l_1, \quad O'B'' = 1 - l_1 \quad (5.3)$$

则 B 点的最大位移为 $(s_B)_{\max} = 2l_1$ 。B 点在任意时刻的位移（从 $\phi = 0^\circ$ 算起） s_B 为：

$$s_B = BB' = O'B' - O'B = 1 + l_1 - O'B \quad (5.4)$$

由三角形 O'DB 得：

$$O'B = O'C + BC = l_1 \cos \phi + l_2 \cos \psi \quad (5.5)$$

则

$$\begin{aligned} s_B &= 1 + l_1 - (l_1 \cos \phi + l_2 \cos \psi) \\ &= l_1 (1 - \cos \phi) + l_2 (1 - \cos \psi) \\ &= l_1 \left[(1 - \cos \phi) + (1 - \cos \psi) / \lambda \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

其中, $\lambda = l_1 / l_2$

由三角形 O'DB, 利用正弦定律, 可找到 ϕ, ψ 的关系为:

$$l_2 \sin \psi = l_1 \sin \phi \quad (5.7)$$

所以

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \phi} \quad (5.8)$$

将上式代入式(5.6), 得

$$s_B = l_1 \left[(1 - \cos \phi) + \left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \phi} \right) / \lambda \right] \quad (5.9)$$

上式即为 B 点位移与曲柄转角 ϕ 的关系式。为便于求导得到 B 点的速度和加速度, 可将该式进一步简化, 取其足够准确的近似式。将上式所含的 $\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \phi}$ 按二项式定理展开, 取其前两项可得:

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \phi} \approx 1 - \frac{\lambda \sin^2 \phi}{2} \quad (5.10)$$

于是 B 点位移公式可简化为:

$$s_B = l_1 \left[(1 - \cos \phi) + \frac{\lambda \sin^2 \phi}{2} \right] \quad (5.11)$$

知道 B 点的位移之后, 则可由下面的关系求得 A 点相应的位移为:

$$s_A = \frac{l_4}{l_3} s_B = \frac{l_4}{l_3} l_1 \left[(1 - \cos \phi) + \frac{\lambda \sin^2 \phi}{2} \right] \quad (5.12)$$

速度为

$$v_A = \frac{l_4}{l_3} v_B = \frac{l_4}{l_3} \frac{ds_B}{dt} = \frac{l_4}{l_3} \omega l_1 \left[\sin \phi + \frac{\lambda \sin 2\phi}{2} \right] \quad (5.13)$$

其中, 角速度 $\omega = \frac{d\phi}{dt}$

加速度为

$$a_A = \frac{l_4}{l_3} a_B = \frac{l_4}{l_3} \frac{dv_B}{dt} = \frac{l_4}{l_3} \omega^2 l_1 [\cos \phi + \lambda \cos 2\phi] \quad (5.14)$$

以上三式就是简化为曲柄滑块机构时悬点位移、速度、加速度随 ϕ 角的变化规律。

5.2 解析模型

上面的简化模型，都是在一定的假设基础上得到的，虽然能够定性的分析悬点的运动规律，但是不能代表悬点的准确运动规律。另外，对于本题所给数据，上述两个简化模型的假设均不能满足。于是，本文给出了一个精确的解析式模型来准确的描述悬点的运动规律。

由附录 4 中可知，在 $t=0$ 时刻，曲柄滑块 D 位于上顶点 ($\phi=0$)，AB 平行于水平面。E 对应坐标原点 (称为 E 的下死点)。由此可知，在一个完整的冲程中此时应该是 B 点能够达到的最高点。可以通过分类排除法来确定 D 位于上顶点时 B 点所在的位置。

第一种情况，假设在 $t=0$ 时刻 B 点位于 O'D 点的右侧，整个四连杆机构如图 5.3 (a) 所示，则可以明显的发现，随着 ϕ 的增大，B 点会继续上移，在 O'D 与 DB 共线时，B 点才能达到最高点，即此时悬点 E 所在的位置才是下死点，而不是在 $t=0$ 时刻，这与已知条件是矛盾的，所以可以排除。

第二种情况，假设在 $t=0$ 时刻 B 点位于 O'点的左侧，整个四连杆机构如图 5.3 (b) 所示，则也可以明显的发现，随着 ϕ 的减小 (相当于倒退回到上一个运动过程)，B 点会继续上移，在 O'D 与 DB 共线时，B 点才能达到最高点，即悬点 E 所在位置才是下死点，这也与已知条件是矛盾的，所以也可以排除。

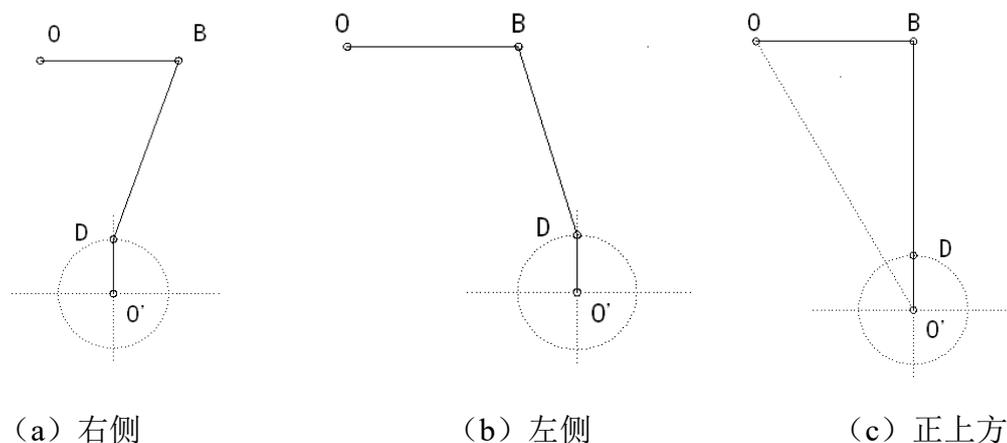


图 5.3 B 点不同位置抽油机四连杆机构示意图

综上所述，可以知道在 $t=0$ 时刻，B 点位于 O'点正上方，即如图 5.3 (c) 所示。由此我们可以知道 O 点与 O'点相对位置关系。根据已知条件，可以知道

$$\begin{aligned} O'D = l_1 = 950\text{mm} & \quad BD = l_2 = 3675\text{mm} \\ BO = l_3 = 2495\text{mm} & \quad AO = l_4 = 4315\text{mm} \end{aligned}$$

令 O'点为坐标原点，则 O 点坐标为 (a,b)，其中 $a = -2495, b = 4625$ ，由此可以计算得

到 $OO' = l_5 = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ ；D 点坐标为 (x_D, y_D) ，其中 $x_D = l_1 \sin \phi, y_D = l_1 \cos \phi$ ，则可以计

算得到何关系 $OD = l_6 = \sqrt{((a-x_D)^2 + (b-y_D)^2)}$ 。通过几何关系，可以知道

$$\begin{aligned} \gamma &= -\tan^{-1}(b/a) \\ \alpha &= \cos^{-1}\left(\frac{l_3^2 + l_6^2 - l_2^2}{2l_3l_6}\right) \\ \beta &= \cos^{-1}\left(\frac{l_5^2 + l_6^2 - l_1^2}{2l_5l_6}\right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

我们的目标是知道 B 点的位移，所以需要知道图中的 θ 角。其中 θ 角的求取还与 D 点的位置有关，需分别讨论。当 D 点位于 OO' 的右上方（即图 5.4 (a) 这种情况），此时 $\phi \in [0, 90^\circ + \gamma) \cup (270^\circ + \gamma, 360]$ ， θ 角可由下式计算：

$$\theta = \gamma - (\alpha + \beta) \quad (5.16)$$

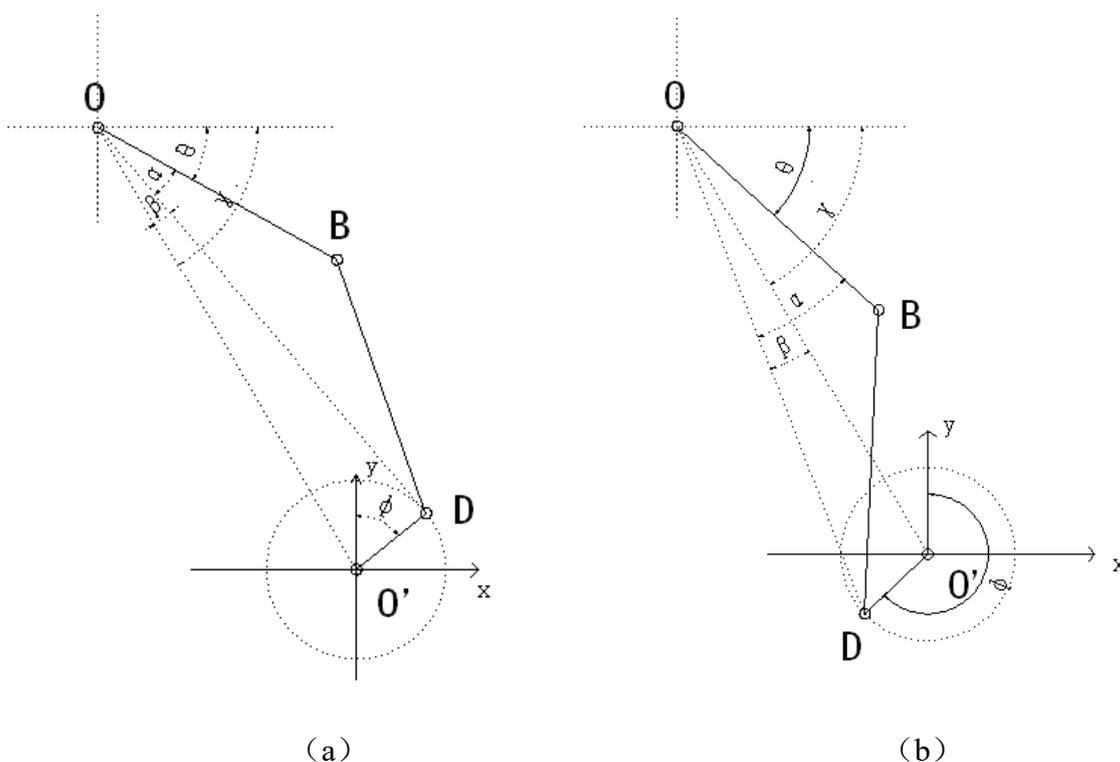


图 5.4 抽油机四连杆结构的两个典型常态示意图

当 D 点位于 OO' 的右上方（即图 5.4 (b) 这种情况），此时 $\phi \in [90^\circ + \gamma, 270^\circ + \gamma]$ ，则 θ 角为

$$\theta = \gamma - (\alpha - \beta) \quad (5.17)$$

那么，A 点的位移、速度、加速度表达式分别为

$$s_A = \theta l_4 = \begin{cases} l_4 [\gamma - (\alpha + \beta)], & \phi \in [0, 90^\circ + \gamma) \cup (270^\circ + \gamma, 360] \\ l_4 [\gamma - (\alpha - \beta)], & \phi \in [90^\circ + \gamma, 270^\circ + \gamma] \end{cases} \quad (5.18)$$

$$v_A = \frac{ds_A}{dt} = l_4 \frac{d\theta}{dt} = l_4 \omega \frac{d\theta}{d\phi} \quad (5.19)$$

$$a_A = \frac{dv_A}{dt} = l_4 \frac{d^2\theta}{dt^2} = l_4 \omega^2 \frac{d^2\theta}{d\phi^2}$$

由于 θ 的表达式过于复杂，直接求导比较困难，我们可以采用差分近似计算求导值：

$$(v_A)_\phi = l_4 \omega \frac{d\theta}{d\phi} = l_4 \omega \frac{\theta_\phi - \theta_{\phi-\delta\phi}}{\delta\phi} \quad (5.20)$$

$$(a_A)_\phi = \omega \left(\frac{dv_a}{d\phi} \right)_\phi = \omega \frac{(v_a)_\phi - (v_a)_{\phi-\delta\phi}}{\delta\phi}$$

5.3 计算结果比较及分析

按照本题所给数据，本题的曲柄并不能完成一个完整的圆周运动。但是，考虑到工程应用中曲柄滑块 D 或曲柄销以及 B 点铰链都有一定的间隙量，所以本文计算时将 BD 稍微伸长。图 5.5-5.7 为采用精确解析式分析法、简化模型分析法计算得到的悬点 E 的位移、速度、加速度变化曲线。为了与实测结果进行比较，图中还给出了由附件 1 数据求得悬点位移、速度和加速度的变化曲线。

由图 5.5 悬点 E 的位移随转角 ϕ 的变化规律可以看出，尽管同一 ϕ 角下不同模型计算的位移数值不同，但它们大体变化趋势是一致的。这也与我们的判断相符，虽然简化模型能够定性的描述悬点的运动趋势，但不能准确的给出运动规律。图中还可以看出，不同模型计算的下死点都是位于 $\phi = 0^\circ$ 处，但上死点均不是在 180° 处。由分析可知，当 O'D 与 OO' 共线时，即 $\phi = 154^\circ$ 处对应上死点位置。图中可见，只有本文提出的解析模型能够正确计算上死点位置。

由图 5.6 和 5.7 可以看出，本文解析模型计算得到的悬点 E 的速度、加速度随转角 ϕ 的变化规律与简化模型计算结果和附件一实测结果一致，同时在下死点和上死点处均能保证速度为 0。由此可见，本文提出的解析模型计算准确可靠。

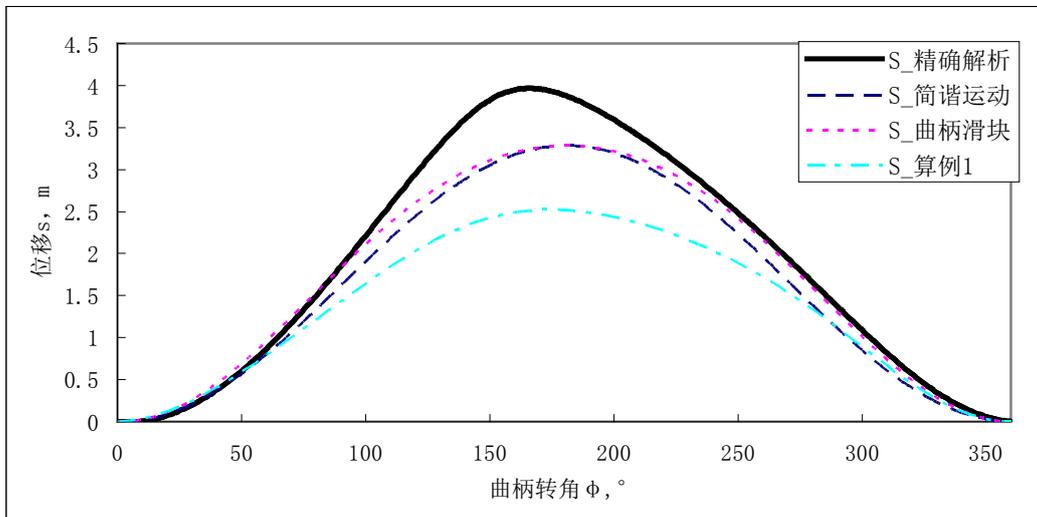


图 5.5 悬点 E 位移随转角 ϕ 的变化规律

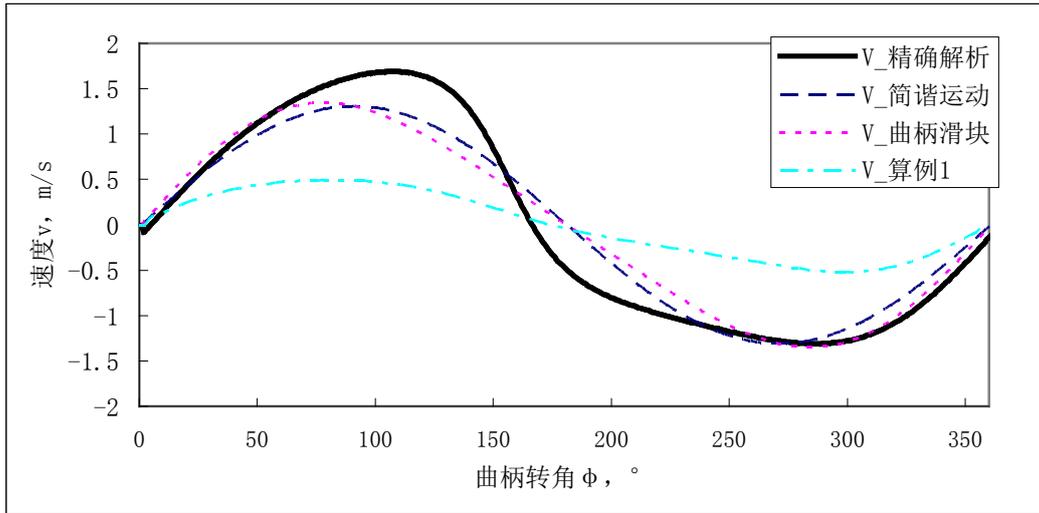


图 5.6 悬点 E 速度随转角 ϕ 的变化规律

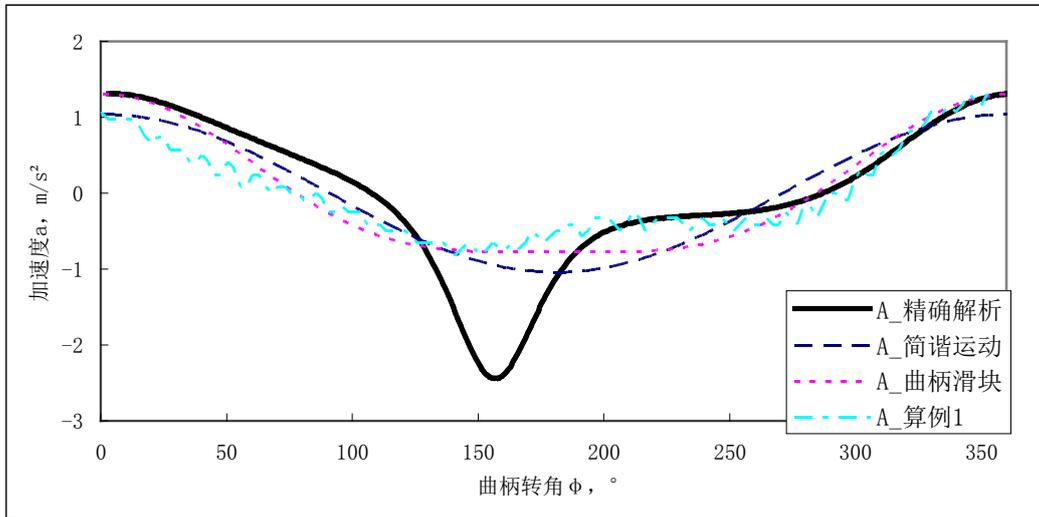


图 5.7 悬点 E 加速度随转角 ϕ 的变化规律

6 问题二：泵供图计算

6.1 计算模型及求解方法

由于悬点功图数据是自动测试的，测得数据的第一对并不一定刚好是一个冲程的起点，上行和下行用的时间也不一定完全相等，因此需要自行判断哪些数据属于上冲程，哪些数据属于下冲程。悬点位移最小值时对应下死点，位移最大值时对应上死点，由下死点运动到上死点的过程属于上冲程，而由上死点运动到下死点的过程属于下冲程。按此规律调整测试数据顺序，即可得到上冲程和下冲程对应的位移和载荷数据。整理后的位移和载荷数据见文件 test1.txt（对应附件一）和 test2.txt（对应附件二）。

Gibbs 模型将悬挂在悬点下的细长抽油杆的振动视为一个由悬点上下往复运动引起的受迫振动模型^[2,3]。该模型中忽略了杆重，浮力和杆弯曲等参数影响，最终的模型方程为齐次的波动方程，即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.1)$$

式中， a 为应力波在抽油杆柱中的传播速度， $a = \sqrt{E/\rho_g}$ ， E 为抽油杆柱的杨氏模量， ρ_g 为抽油杆柱的密度； c 为阻尼系数。由于测试数据所给悬点载荷 $L(t)$ 包含了抽油杆的重力 W_g 和抽油杆在油水混合液中所受的浮力 F_o ，在应用 Gibbs 模型计算泵载荷的时，实际的悬点载荷应为

$$D(t) = L(t) - W_g + F_o \quad (6.2)$$

抽油杆的重力 W_g 可以写为

$$W_g = \rho_g AL \quad (6.3)$$

假设抽油杆全部沉没于混合液中，则抽油杆在混合液中所受的浮力 F_o 可以写为

$$F_o = \rho_l AL \quad (6.4)$$

式中， ρ_l 为混合液密度，表示为 $\rho_l = \rho_o(1 - f_w) + \rho_w f_w$ ，其中 f_w 为含水率， ρ_w 为水的密度， ρ_o 为油的密度； A 为抽油杆横截面积， L 为抽油杆长度。

Gibbs 波动方程可以采用分离变量法求解。其边界条件是将悬点位移函数 $U(t)$ 和悬点载荷函数 $D(t)$ 展开成 Fourier 级数：

$$U(t) = \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} (v_n \cos(n\omega t) + \delta_n \sin(n\omega t)) \quad (6.5)$$

$$D(t) = \frac{\sigma_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} (\sigma_n \cos(n\omega t) + \tau_n \sin(n\omega t)) \quad (6.6)$$

式中，Fourier 系数可以利用三角函数的正交性求得，例如 v_n 可以通过在方程(6.5)左右两侧乘以 $\cos(n\omega t)$ ，并在 $[0, 2\pi]$ 上积分求得

$$v_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U(t) \cos(n\theta) d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \bar{n} \quad (6.7)$$

式中， $\theta = \omega t$ 。由于测试数据为离散的时间序列，上式的 Fourier 系数需要通过求和来近似计算。采样周期为一个冲程，对应第 p 个采用点的 $\theta = \frac{2\pi p}{K}$ ， K 为一个冲程里面的总采样点数。记第 p 个采用点的悬点位移和悬点载荷分别为 U_p 和 D_p ，则(6.5)式和(6.6)式的 Fourier 系数可以计算如下

$$v_n = \frac{2}{K} \sum_{p=1}^K U_p \cos\left(\frac{2n\pi p}{K}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, \bar{n} \quad (6.8)$$

$$\delta_n = \frac{2}{K} \sum_{p=1}^K U_p \sin\left(\frac{2n\pi p}{K}\right) \quad n = 1, 2, \dots, \bar{n} \quad (6.9)$$

$$\sigma_n = \frac{2}{K} \sum_{p=1}^K D_p \cos\left(\frac{2n\pi p}{K}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, \bar{n} \quad (6.10)$$

$$\tau_n = \frac{2}{K} \sum_{p=1}^K D_p \sin\left(\frac{2n\pi p}{K}\right) \quad n = 1, 2, \dots, \bar{n} \quad (6.11)$$

为了采用分离变量法求解方程(6.1)，需要将位移函数 $u(x, t)$ 分离为坐标函数 $X(x)$ 和时间函数 $T(t)$ 的乘积。令 $u(x, t) = X(x)T(t)$ ，将其带入方程(6.1)有

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} + \frac{cT'(t)}{aT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda_n^2 \quad (6.12)$$

上式等号每一侧仅包含一个独立变量，因此可以将其分离成两个常微分方程，即

$$\begin{cases} T''(t) + cT'(t) + \lambda_n^2 a^2 T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda_n^2 X(x) = 0 \end{cases} \quad (6.13)$$

方程组(6.13)中第一个方程的周期解为 $T(t) = e^{im\omega t}$ ，将其带入(6.13)式的第一个方程可求得常数 λ_n 为

$$\lambda_n = -\alpha_n + i\beta_n \quad (6.14)$$

式中

$$\alpha_n = \frac{nw}{a\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{nw}\right)^2}} \quad (6.15)$$

$$\beta_n = \frac{nw}{a\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{nw}\right)^2}} \quad (6.16)$$

当 $n=0$ 时， $\lambda_0 = 0$ ，方程组(6.13)变为

$$\begin{cases} T''(t) + cT'(t) = 0 \\ X''(x) = 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

上式的特征解为

$$\begin{cases} T(t) = \xi \\ X(x) = \zeta + \eta x \end{cases} \quad (6.18)$$

方程组(6.13)中第二个方程的特征解为

$$X(x) = \phi_n \sin(\lambda_n x) + \varphi_n \cos(\lambda_n x) \quad (6.19)$$

综合以上各式，可以求得方程(6.1)的一般解为

$$z(x,t) = \xi\eta x + \xi\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} (\phi_n \sin(\lambda_n x) + \varphi_n \cos(\lambda_n x)) e^{inwt} \quad (6.20)$$

式中， ϕ_n 和 φ_n 为复数常量

$$\begin{aligned} \phi_n &= -\kappa_n - i\mu_n \\ \varphi_n &= v_n - i\delta_n \end{aligned} \quad (6.21)$$

方程(6.1)的物理解应为(6.20)式的实部，即

$$u(x,t) = \text{Re}[z(x,t)] \quad (6.22)$$

任意时刻 x 截面处杆的载荷可采用胡克定律计算，表示为

$$F(x,t) = \text{Re}\left[EA \frac{\partial z(x,t)}{\partial x}\right] \quad (6.23)$$

代入(6.5)式和(6.6)式的边界条件可求 Gibbs 方程的解析解为

$$u(x,t) = \frac{\sigma_0}{2EA} x + \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} (O_n(x) \cos(nwt) + P_n(x) \sin(nwt)) \quad (6.24)$$

$$F(x,t) = \frac{\sigma_0}{2} + EA \sum_{n=1}^{\bar{n}} (O_n'(x) \cos(nwt) + P_n'(x) \sin(nwt)) \quad (6.25)$$

式中

$$O_n(x) = (\kappa_n ch(\beta_n x) + \delta_n sh(\beta_n x)) \sin(\alpha_n x) + (\mu_n sh(\beta_n x) + v_n ch(\beta_n x)) \cos(\alpha_n x)$$

$$P_n(x) = (\kappa_n sh(\beta_n x) + \delta_n ch(\beta_n x)) \cos(\alpha_n x) - (\mu_n ch(\beta_n x) + v_n sh(\beta_n x)) \sin(\alpha_n x)$$

$$O_n'(x) = \left[\frac{\tau_n}{EA} sh(\beta_n x) + (\delta_n \beta_n - v_n \alpha_n) ch(\beta_n x) \right] \sin(\alpha_n x)$$

$$+ \left[\frac{\sigma_n}{EA} ch(\beta_n x) + (v_n \beta_n + \delta_n \alpha_n) sh(\beta_n x) \right] \cos(\alpha_n x)$$

$$P_n'(x) = \left[\frac{\tau_n}{EA} ch(\beta_n x) + (\delta_n \beta_n - v_n \alpha_n) sh(\beta_n x) \right] \cos(\alpha_n x)$$

$$- \left[\frac{\sigma_n}{EA} sh(\beta_n x) + (v_n \beta_n + \delta_n \alpha_n) ch(\beta_n x) \right] \sin(\alpha_n x)$$

$$\kappa_n = \frac{\sigma_n \alpha_n + \tau_n \beta_n}{EA(\alpha_n^2 + \beta_n^2)}$$

$$\mu_n = \frac{\sigma_n \beta_n - \tau_n \alpha_n}{EA(\alpha_n^2 + \beta_n^2)}$$

求解 Gibbs 方程时，我们还需要确定方程中粘滞阻尼系数 c 。张琪等人^[1]提出了用摩擦功确立的粘滞阻尼系数公式：

$$c = \frac{2\pi\mu}{\rho_g A} \left\{ \frac{1}{\ln m} + \frac{1}{B_2} (B_1 + 1) \left[B_1 + \frac{2}{(wL/a)/\sin(wL/a) + \cos(wL/a)} \right] \right\} \quad (6.26)$$

式中， $m = D_l/D_r$ ， $B_1 = (m^2 - 1)/2 \ln m - 1$ ， $B_2 = m^4 - 1 - (m^2 - 1)^2 / \ln m$ 。其中， D_l 和 D_r 分别为泵径和抽油杆直径， μ 为液体粘度。

在油田的实际生产过程中，一般采用多级杆，所以对抽油杆柱的动载荷需要分级计算，逐级消除抽油杆柱动载荷。首先计算第一级杆柱末端载荷与位移，然后以第一级杆柱末端为第二级初始及边界条件，划分第二级抽油杆，再计算其末端载荷与位移。以此类推，直至求出最后一级末端的载荷与位移，得出最终的泵功图。具体计算流程图图如下：

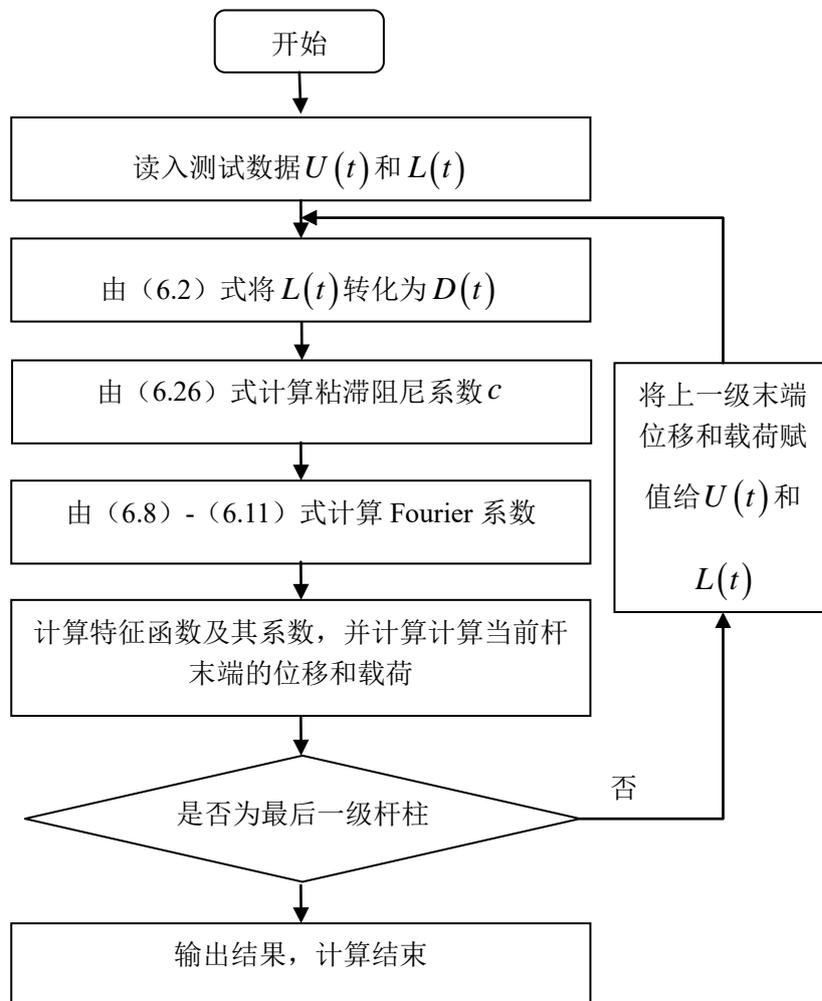


图 6.1 采用 Gibbs 模型计算井下示功图流程图

6.2 计算结果与分析

依据附件一和附件二悬点示功图数据计算的泵功图如下：

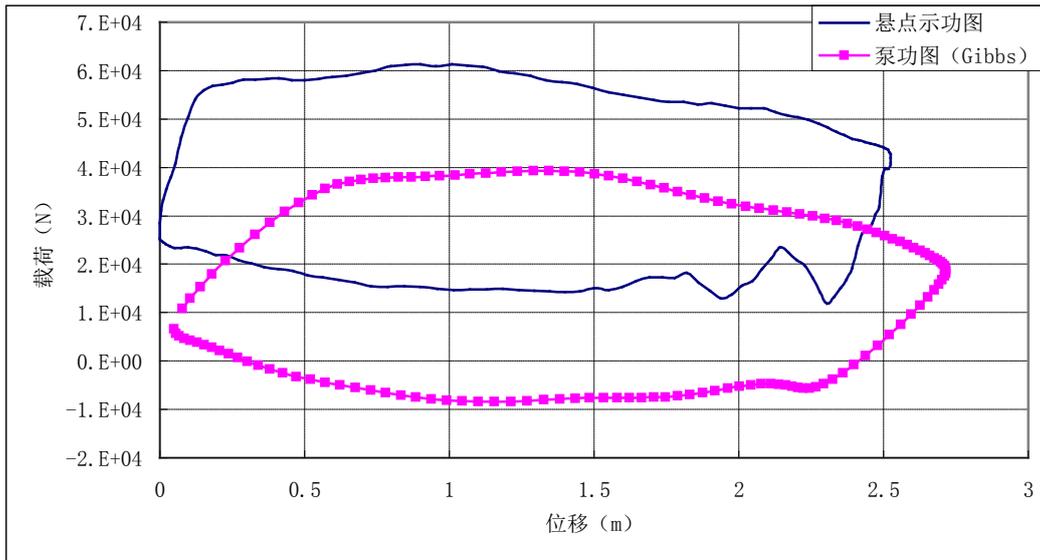


图 6.2 算例一悬点示功图与泵功图对比

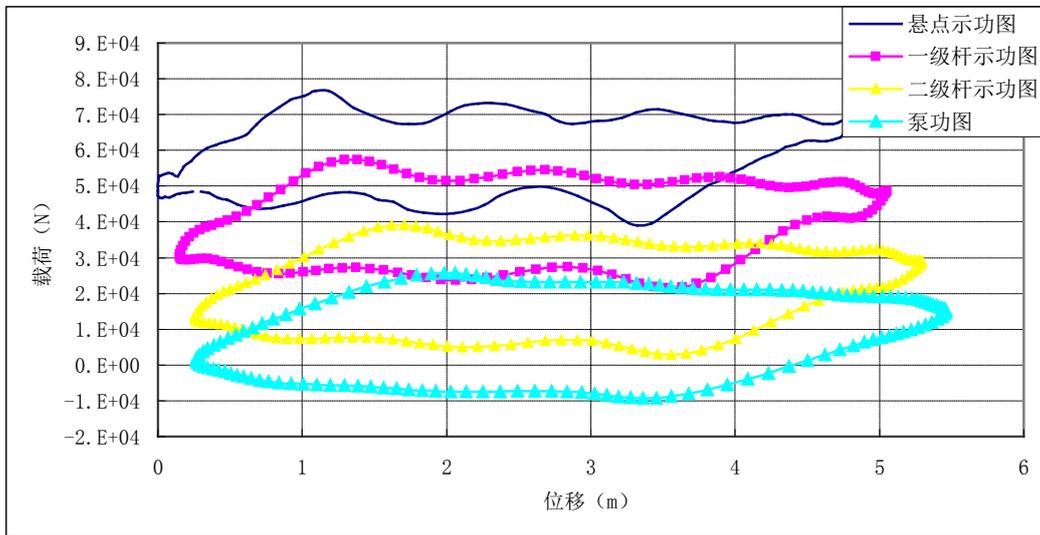


图 6.3 算例二悬点示功图与泵功图对比

图 6.2 为由附件一数据计算的泵功图，该油井只有一级杆。图中上方曲线为悬点示功图，下方曲线为转换后的泵功图，可以明显看出转换之后的示功图曲线平滑，且基本没有波动。可见经计算后有效地消除了上下冲程中抽油杆柱的振动、油液脉动和惯性载荷等的影响。图 6.3 为由附件二数据计算的泵功图，该油井有三级杆。图中不仅给出了悬点示功图和泵功图，还给出了一级杆和二级杆末端的示功图。可以清晰地看到各级杆的示功图在逐渐下移，这是因为杆重力和浮力的影响。同时，各级杆的示功图曲线随着杆级数增加变得更加平滑。最终的泵功图曲线平滑、无倾斜，且基本没有波动。

7 问题三：泵功图的应用

7.1 油井日产液量计算

7.1.1 模型一：有效冲程法

通过分析抽油泵的工作原理、观察理论泵示功图的几何特征可知，泵示功图上阀开闭点处曲率变化较大，且固定阀开闭点在上冲程的高载荷段，而游动阀的开闭点在下冲程的低载荷段。根据这一思路，通过寻找泵功图的高、低载荷段曲率变化最大的点可以确定阀的开闭点，进而计算柱塞的有效冲程，并最终计算油井一天的产液量。

7.1.1.1 理论产液量计算

抽油机井的理论产液量是泵内为充满的油水两相混合物且假设柱塞冲程等于悬点冲程时的井口产液量。其计算表达式^[4]为：

$$Q_{th} = 1440SN_S A_P \rho_l \quad (7.1)$$

式中， S 为悬点冲程， N_S 为抽油机的冲次， A_P 为柱塞横截面积， Q_{th} 为油井一天的理论产液量，混合液密度 $\rho_l = \rho_o(1-f_w) + \rho_w f_w$ ，其中 ρ_o 为原油密度； ρ_w 为水的密度； f_w 为含水量。

7.1.1.2 实际产液量计算

油井的实际产液量是指井口原油脱气后的地面实际产液量，记作 Q ，其计算公式为：

$$Q = \eta_V 1440S_{PE} N_S A_P \rho_l \quad (7.2)$$

式中， S_{PE} 为柱塞有效冲程， η_V 为混合液体体积系数。

混合液体体积系数 η_V 是指地面液体体积与油管内混合液体体积的比值^[5]，可由下式计算得出：

$$\eta_V = \frac{1}{(1-n_w)B_o + n_w B_w} \quad (7.3)$$

式中， n_w 为混合液的含水率， B_o 为原油体积系数， B_w 为水的体积系数，一般取 1.1~1.5，本文取为 1.3。

7.1.1.3 有效冲程的计算模型

有效冲程 S_{PE} 主要根据泵示功图中阀开闭点的位置来确定。曲率变化量的值越大，说明曲线弯曲程度越大，通过在泵功图的高低载荷段各求出 2 个曲率变化最大的点来确定阀开闭点。本文采用了两种方法来计算泵功图的有效冲程。

(1) 方法一：三点曲率法

由于采用数值计算方法得到的泵示功图封闭曲线中含有大量高频部分，故在实际计

算中可以采用三点曲率法来消除和降低高频部分引起的曲率变动，以提高曲率的计算精度，具体计算流程图如图 7.1 所示。

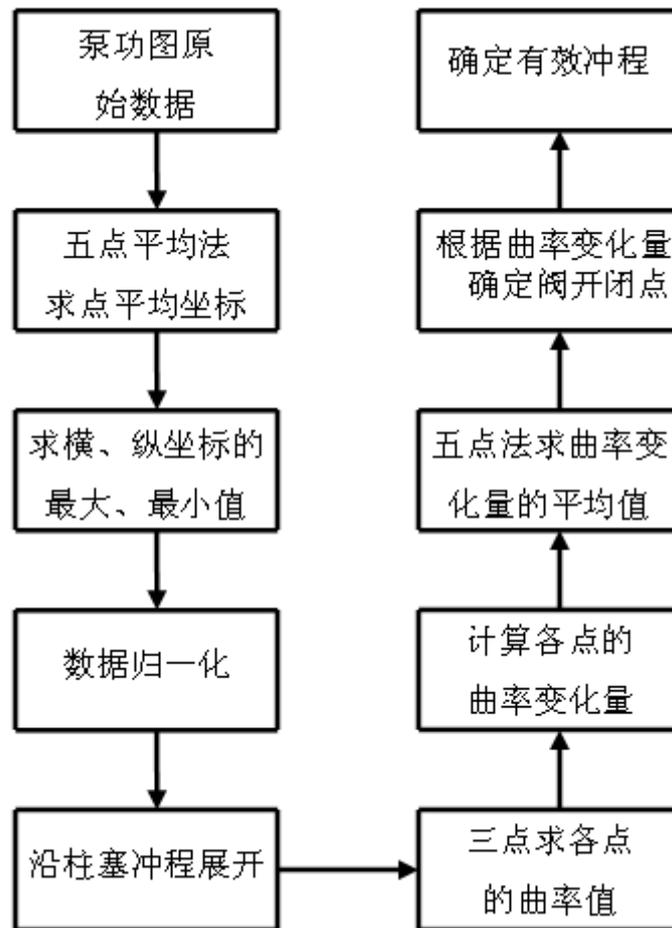


图 7.1 三点曲率法计算有效冲程的流程图

采用三点曲率法确定有效冲程的具体步骤如下：

步骤 1、用五点平均求出每一点的坐标平均值，即：

$$sp_i = \frac{s_{i-2} + s_{i-1} + s_i + s_{i+1} + s_{i+2}}{5} \quad (7.4)$$

$$fp_i = \frac{f_{i-2} + f_{i-1} + f_i + f_{i+1} + f_{i+2}}{5} \quad (7.5)$$

式中， s_i 为第 i 个时刻的位移， sp_i 为第 i 个时刻的位移平均值， f_i 为第 i 个时刻的载荷， fp_i 为第 i 个时刻的载荷平均值。

步骤 2、分别求出泵功图离散点横坐标的最大值 s_{\max} 和最小值 s_{\min} ，纵坐标的最大值 f_{\max} 和最小值 f_{\min} ；

步骤 3、将离散点归一化，归一化方法如下：

$$spg_i = \frac{sp_i - s_{\min}}{s_{\max} - s_{\min}} \quad (7.6)$$

$$fpg_i = \frac{fp_i - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} \quad (7.7)$$

步骤 4、将归一化的泵功图沿柱塞冲程展开，泵功图由闭合曲线展开为单值曲线；

步骤 5、计算各离散点的曲率值 K_i ；

对于连续曲线上任意一点，其曲率 K 定义为夹角 β 对弧度 S 的变化率，并等于曲率半径 R 的倒数，如下式：

$$K = \frac{d\alpha}{dS} = \frac{1}{R} \quad (7.8)$$

由于泵示功图曲线由一系列离散点组成，其解析函数无法得到，故无法由式 (7.8) 直接求得泵示功图上任一点的曲率。所以，本文将相邻三点圆弧近似为连续曲线来求泵示功图各离散点的曲率 K ，即利用泵示功图上任意离散点 $X_i(x_i, y_i)$ 及其前一离散点 $X_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$ 和后一离散点 $X_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ 三点之间的几何关系来计算点 $X_i(x_i, y_i)$ 的曲率，如图 7.2 所示。

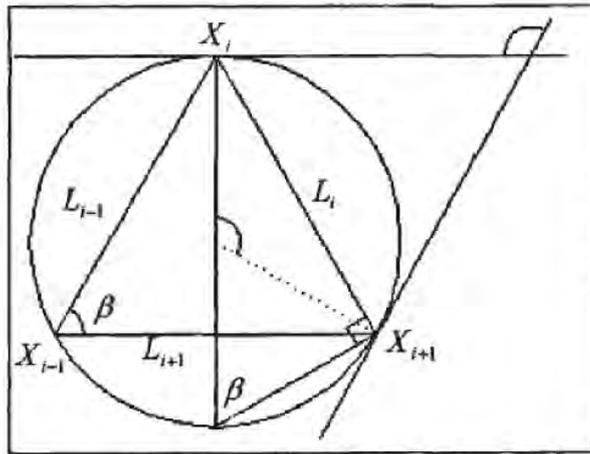


图 7.2 采用三点曲率法计算曲率的示意图

由三角几何关系容易得出：

$$\sin \beta = \frac{L_i}{2R}, S_{\Delta} = \frac{1}{2} L_{i+1} L_{i-1} \sin \beta \quad (7.9)$$

将 $K_i = 1/R$ 进行整理，可得到：

$$K_i = \frac{L_i}{2R} \times \frac{2}{L_i} \times \frac{L_{i-1} L_{i+1}}{L_{i-1} L_{i+1}} \quad (7.10)$$

式中 R 为点 X_i 到点 X_{i+1} 圆弧段的曲率半径； β 为点 X_i 到点 X_{i+1} 圆弧段的夹角； L_{i-1} 为点 X_{i-1} 和点 X_i 之间的线段长度； L_i 为点 X_i 和点 X_{i+1} 之间的线段长度； L_{i+1} 为点 X_{i+1} 和点 X_{i-1} 之间的线段长度； S_{Δ} 为任意三角形 $\Delta X_{i-1} X_i X_{i+1}$ 的面积。

将式(7.9)代入式(7.10)可得：

$$K_i = \frac{4L_{i-1}L_{i+1} \sin \beta}{L_{i-1}L_iL_{i+1}} = \frac{4S_{\Delta}}{L_{i-1}L_iL_{i+1}} \quad (7.11)$$

式(7.11)即为求某一离散点曲率的数学模型,其中任意三角形的面积 S_{Δ} 由海伦公式求得:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\Delta} = \sqrt{P(P-L_{i-1})(P-L_i)(P-L_{i+1})} \\ P = \frac{L_{i-1} + L_i + L_{i+1}}{2} \\ L_{i-1} = \sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2} \\ L_i = \sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2} \\ L_{i+1} = \sqrt{(y_{i+1} - y_{i-1})^2 + (x_{i+1} - x_{i-1})^2} \end{array} \right. \quad (7.12)$$

步骤 6、根据 $\delta_i = |K_{i+1} - K_i|$, 求任一离散点的曲率 K_i 及其后一离散点的曲率 K_{i+1} 的曲率变化量 δ_i ;

步骤 7、为了提高算法精度, 根据 $\delta_i' = (\delta_{i-2} + \delta_{i-1} + \delta_i + \delta_{i+1} + \delta_{i+2})/5$, 采用五点平均来求取曲率变化量的平均值;

步骤 8、根据曲率变化量最大, 查找固定阀和游动阀的开闭点;

在上冲程中, 归一化载荷大于 0.6 的范围内查找固定阀开启点 B 和关闭点 C。在归一化位移 $[0,0.5]$ 之间查找曲率变化量最大点 $B(s_{mb}, f_{mb})$, 在 $[s_{mb} + 0.1, 1]$ 之间查找曲率变化量最大点 $C(s_{mc}, f_{mc})$, 则比例位移 $S_{Rg} = |s_{mb} - s_{mc}|$;

在下冲程中, 归一化载荷小于 0.4 的范围内查找游动阀开启点 D 和关闭点 A。在归一化位移 $[1.5, 2]$ 之间查找曲率变化量最大点 $A(s_{ma}, f_{ma})$, 在 $[1, s_{ma} - 0.1]$ 之间查找曲率变化量最大点 $D(s_{md}, f_{md})$, 则比例位移 $S_{Ry} = |s_{md} - s_{ma}|$;

步骤 9、将比例位移 S_{Rg} 和 S_{Ry} 乘以归一化位移 $(X_{\max} - X_{\min})$ 获得实际的固定阀、游动阀冲程, 取较小者为有效冲程 S_{PE} 。

(2) 方法二: 五点曲率法

五点曲率法通过对原始数据差值重取等距点、相邻 5 个数据点来获得中间点的曲率、相邻 3 个点取平均值的方法计算中间点的曲率变化量, 来消除泵示功图封闭曲线中含有大量高频部分, 具体计算流程图如图 7.3 所示。

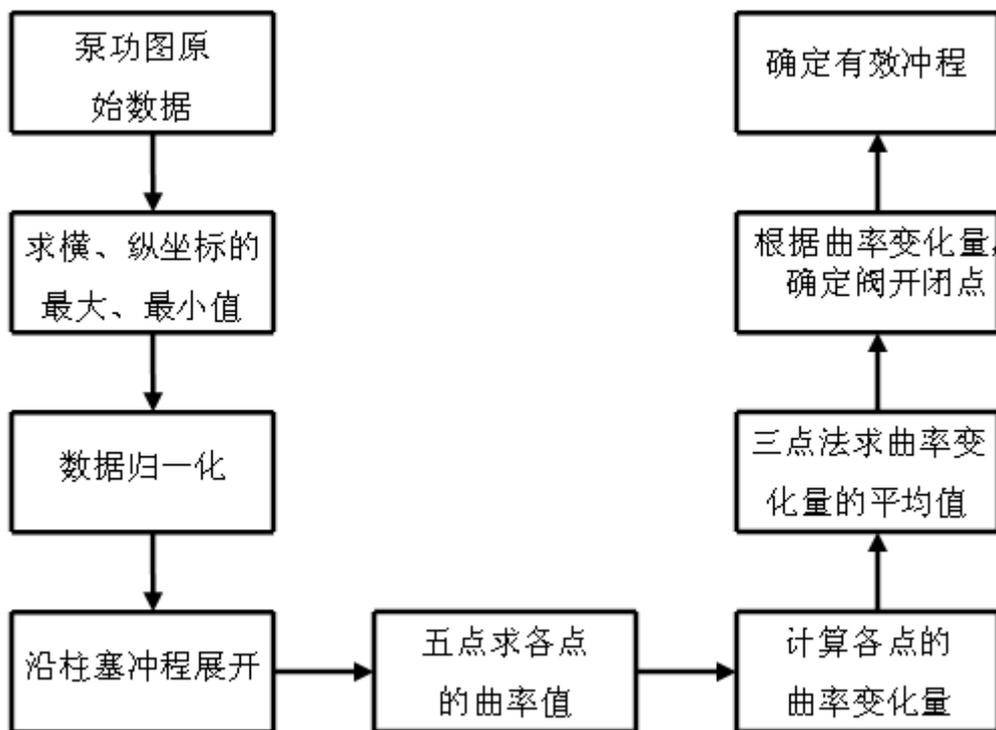


图 7.3 五点曲率法计算有效冲程的流程图

步骤 1、如方法一中的步骤 2、3、4 将泵功图原始数据进行归一化处理，并将泵功图沿柱塞冲程展开，由闭合曲线变成单值曲线；

步骤 2、在归一化、展开的泵功图数据上做等 Δs 取点，消除数据点的细微波动及疏密程度对曲率计算精度的影响；

步骤 3、计算各离散点的曲率变化值；

泵示功图曲线上任意一点 P_i 的曲率 K_i ，根据与其相邻的 5 个数据点： $P_{i-2}(s_{i-2}, f_{i-2})$ 、 $P_{i-1}(s_{i-1}, f_{i-1})$ 、 $P_i(s_i, f_i)$ 、 $P_{i+1}(s_{i+1}, f_{i+1})$ 、 $P_{i+2}(s_{i+2}, f_{i+2})$ ，之间的几何关系计算，如图 7.4。

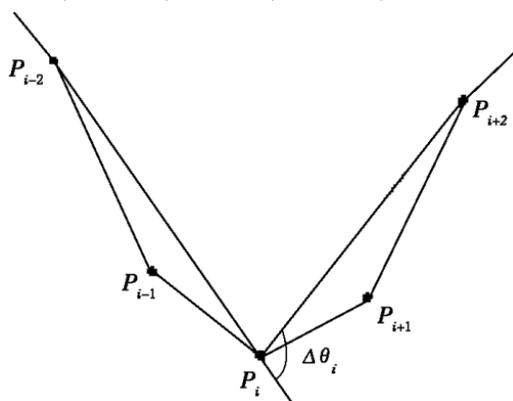


图 7.4 五点曲率法计算曲率的示意图

点 P_i 的离散曲率计算模型为

$$K_i = \Delta\theta_i / \Delta l_i \quad (7.13)$$

式中， $\Delta\theta_i$ 是直线 $P_{i-2}P_{i-1}$ 到直线 P_iP_{i+1} 的有向旋转角度，

$$\Delta\theta_i = \arctan\left(\frac{(f_i - f_{i+2})(s_i - s_{i-2}) - (f_i - f_{i-2})(s_i - s_{i+2})}{1 + (s_i - s_{i-2})(s_i - s_{i+2})}\right) \quad (7.14)$$

$$\Delta l_i = \sqrt{(s_{i+1} - s_i)^2 + (f_{i+1} - f_i)^2} + \sqrt{(s_i - s_{i-1})^2 + (f_i - f_{i-1})^2} \quad (7.15)$$

则点 P_i 处的曲率变化量 δ_i ，根据 P_i 、 P_{i+1} 两点的曲率 K_i 、 K_{i+1} 由 $\delta_i = |K_{i+1} - K_i|$ 计算可得。在实际计算中，为了降低或消除其引起的曲率变化量的波动，采用相邻 3 点取平均值的方法计算中间点的曲率变化量 δ_i' ，以提高计算精度。即

$$\delta_i' = (\delta_{i-1} + \delta_i + \delta_{i+1}) / 3 \quad (7.16)$$

步骤 4、如方法一中的步骤 8、9，根据曲率变化量最大，查找固定阀和游动阀的开闭点，获得实际的固定阀、游动阀冲程，取较小者为有效冲程 S_{PE} 。

(3) 结果比较及分析

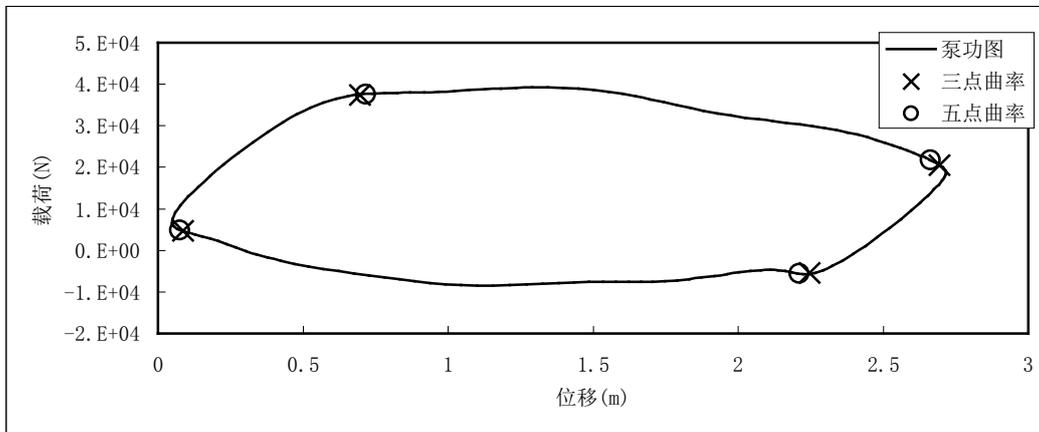


图 7.5 不同曲率计算方法求得的附件一的固定阀和游动阀的开闭点位置

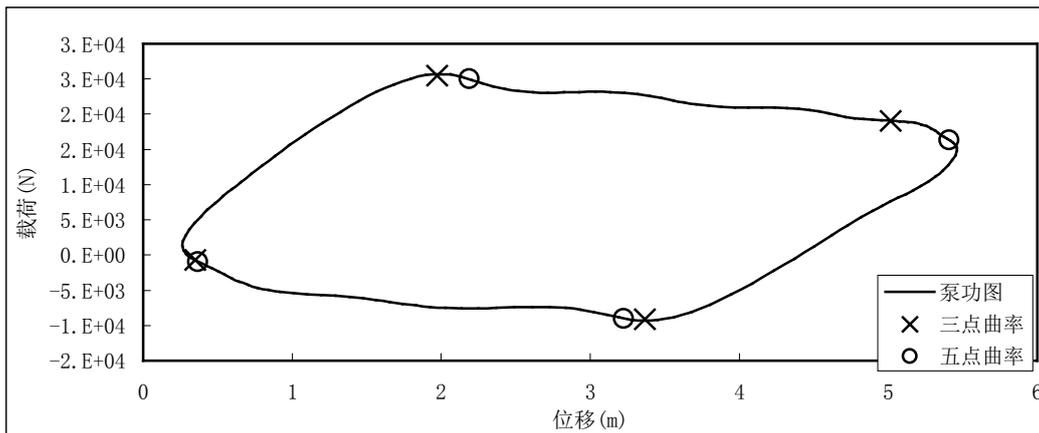


图 7.6 不同曲率计算方法得到的附件二的固定阀和游动阀的开闭点位置

求有效冲程的三点曲率法和五点曲率法都是通过泵功图中找曲率变化最大的点作为阀开闭的点，它们的不同之处在于曲率计算模型和求平均值时所取的点数，由于曲率计算所用点数不同，计算结果也稍有一些差距。图 7.5 与图 7.6 为使用两种方法对附件一和附件二的油井分别求得的固定阀和游动阀的开闭点位置。从上图结果来看，三点曲

率法和五点曲率法计算得到的阀的开闭点都有一些误差，但两种方法的误差都该在可接受范围以内。三点曲率法和五点曲率法求得的附件一油井的有效冲程分别为 1.9986m、1.9475m，求得附件二油井的有效冲程分别为 3.0188m、2.8578m。两种方法计算结果比较接近，从而互相验证了模型的准确性。

7.1.2 模型二：面积法

实际产液量 Q 与理论产液量 Q_{th} 的比值等于理论示功图中曲线包围的面积 A_{th} 与实际泵功图中曲线包围的面积 A_{sj} 的比值，由这个关系，可以得到实际产液量^[6]：

$$Q = \frac{A_{sj}}{A_{th}} \times Q_{th} \quad (7.17)$$

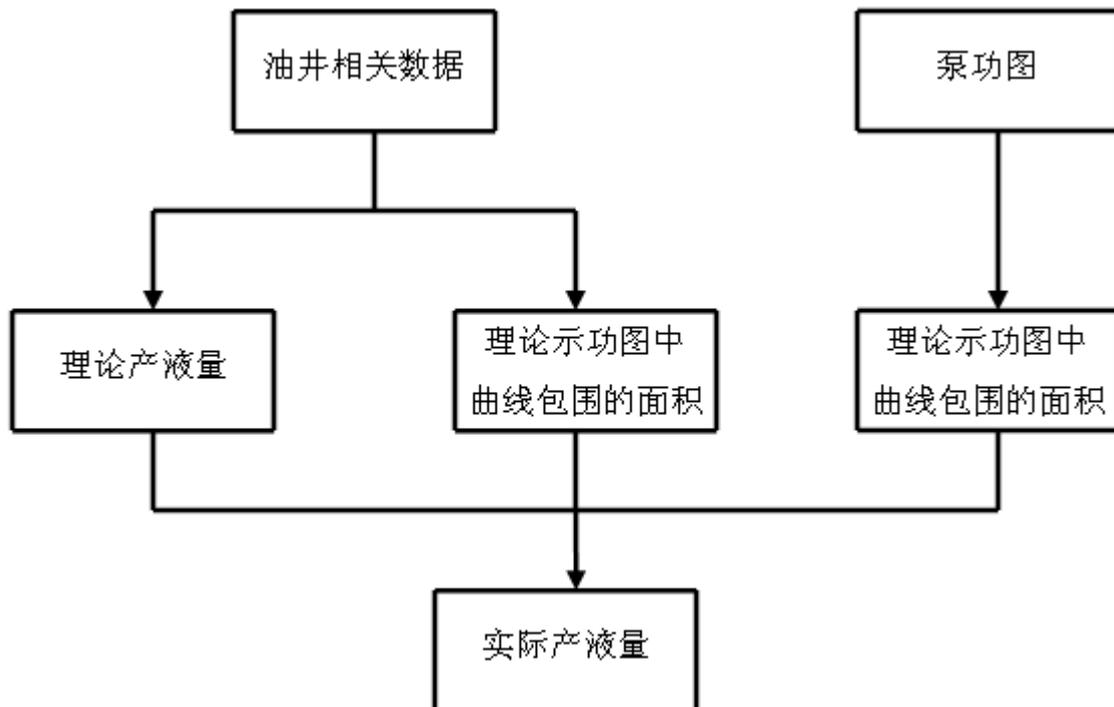


图 7.7 面积法计算实际产液量的流程图

面积法计算流程图如图 7.7 所示。具体计算步骤如下：

步骤 1、理论产液量 Q_{th} 可由式(7.1)求得；

步骤 2、理论示功图中曲线包围的面积 A_{th} ；

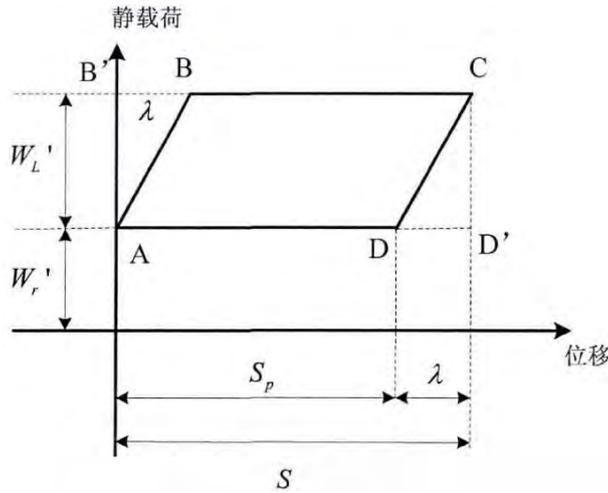


图 7.8 理论示功图

理论示功图中曲线包围的面积 A_{th} 即为平行四边形 $ABCD$ 面积。只需要知道柱塞冲程长度 S_p 与抽油机上、下冲程中杆柱和管柱之间转移的载荷 W_L' 即可计算理论示功图面积。抽油机上、下冲程中杆柱和管柱之间转移的载荷 W_L' 可由下式求得^[7]:

$$W_L' = f_p L \rho_l g \quad (7.18)$$

式中 f_p 为油管横截面积； L 为抽油杆柱的总长度； ρ_l 为混合液密度； g 为重力加速度。

其中混合液密度由下式求得：

$$\rho_l = \rho_o(1 - f_w) + \rho_w f_w \quad (7.19)$$

式中 ρ_o 为原油密度； ρ_w 为水的密度； f_w 为含水量。

柱塞冲程长度 S_p 可由下式求得：

$$S_p = S - \lambda \quad (7.20)$$

其中 S 为悬点冲程，静载冲程损失 λ 由下式求出^[7]：

$$\lambda = \frac{W_L'}{E} \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{f_i} \quad (7.21)$$

式中 E 为钢的弹性模量，本题中为 2.1×10^{11} pa； L_i 为各级抽油杆柱的长度； f_i 为各级抽油杆柱的截面积。

步骤 3、实际泵功图中曲线包围的面积 A_{sj} ；

将泵功图沿横坐标等分为 n 份，每一份的长度为 ds 。每一份作为矩形来求面积，最后将所有矩形的面积相加即为泵功图的面积，可由下式表达：

$$A_{sj} = \sum_{i=1}^n (l_s - l_x) ds \quad (7.22)$$

其中 l_s 和 l_x 分别是每一份矩形上、下两条边界的高度，由泵功图中的原始数据点插

值而得。

7.1.3 计算结果及分析

为了计算油井的产液量，本文建立了有效冲程法与面积法两种方法，其中有效冲程法在具体实现上还分为三点曲率法、五点曲率法两种方法。采用本文方法求得的附件 1 和附件 2 油井的产液量如表 7.1 所示。面积法、三点曲率的有效冲程法、五点曲率的有效冲程法求得的附件 1 油井产液量都高于附件 2 油井产液量，这说明了这三种方法对于不同的油井，其计算结果是稳定的。同时，由表中数据还可以看出这三种方法的对于同一油井计算的日产液量都比较接近，从而互相验证了三种模型的正确性和可靠性。

表 7.1 采用有效冲程法和面积法计算的油井产液量比较

		附件 1 油井一天的产液量 (t/d)	附件 2 油井一天的产液量 (t/d)
有效冲程法	三点曲率	64.848	20.476
	五点曲率	63.192	19.384
面积法		65.988	22.983

7.2 泵故障诊断

本小题我们采用灰色理论与网格法相结合的方法，根据泵功图的特点，通过提取功图归一化无因次灰度统计特征：灰度均值、灰度方差、灰度偏度、灰度峰值、灰度能量、灰度熵，以此构成分类特征向量，将典型的正常泵功图和充气泵功图也转化为相同的特征向量，通过计算两者之间的灰关联度，来判断泵正常工作还是充气状态。

7.2.1 泵功图网格化

在泵示功图识别的过程中，只有示功图的形状是最重要的，而液体的载荷和柱塞的冲程对识别是无关的。为了便于比较油井各种工况，消除泵功图量纲对数据的影响，将得到的泵示功图归一化，得到与量纲无关的归一化示功图。将归一化的示功图放到一个 26×13 (2: 1) 的长方形网格中，示功图与长方形的四边相切，如图 7.9 所示为附件一油井泵功图的网格化图。

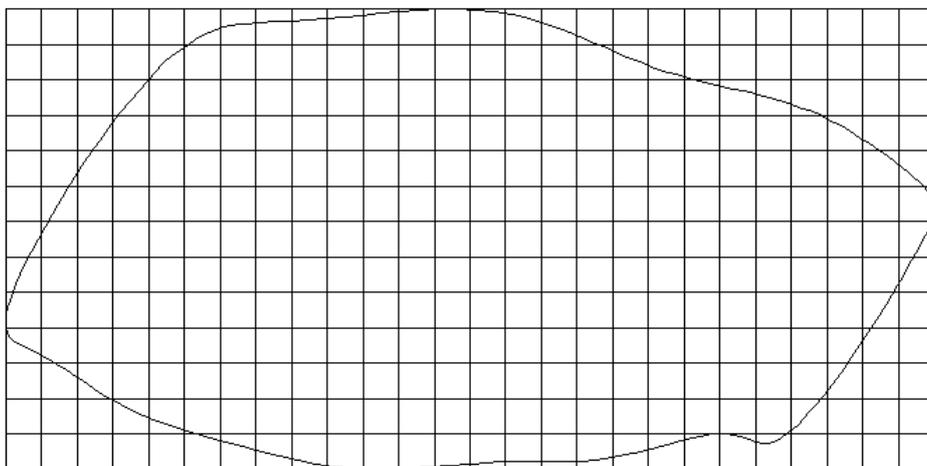


图 7.9 附件一油井网格化示功图

$$\text{灰度偏度 } S: \quad f_3 = S = \frac{1}{\sigma^3} \sum_{b=1}^B (b - \bar{g})^3 \cdot p(b) \quad (7.25)$$

$$\text{灰度峰度 } P: \quad f_4 = P = \frac{1}{\sigma^4} \sum_{b=1}^B (b - \bar{g})^4 \cdot p(b) \quad (7.26)$$

$$\text{灰度能量 } E: \quad f_5 = E = \sum_{b=1}^B [p(b)]^2 \quad (7.27)$$

$$\text{灰度熵 } T: \quad f_6 = T = -\sum_{b=1}^B [1 - p(b)] \cdot \log_{10} [1 - p(b)] \quad (7.28)$$

以 $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ 构成特征向量 F_0 ，称特征向量 F_0 为待检验示功图的统计特征。根据相关资料，提取典型的正常泵功图和充气泵功图的 6 个灰度统计特征(表 7.2)，作为参考泵示功图统计特征，记为 F_i 。 $F_i = \{f_{i1}, f_{i2}, f_{i3}, f_{i4}, f_{i5}, f_{i6}\}, i = 1, 2$ 。

表 7.2 典型的正常泵功图和充气泵功图的统计特征

	均值 f_1	方差 f_2	偏度 f_3	峰度 f_4	能量 f_5	熵 f_6
泵正常	3.230769	3.230769	0.398332	2.051705	0.164665	0.396199
泵内充气	1.43787	7.743181	-0.68056	3.349141	0.12939	0.404353

7.2.4 建立灰关联度

用泵示功图来识别泵的工作状况，是通过比较实际工况泵示功图与前面建立的参考典型工况泵功图的统计特征向量的相似性而得出结论。根据灰色系统理论，灰关联度分析能够较真实地揭示比较序列和参考序列间曲线几何形状的接近程度，几何形状越接近，变化趋势就越接近，关联度就越大^[9]。以此来判断实际工况泵示功图更接近正常泵示功图还是泵充气示功图，进而得出泵内是否充气。

待检验示功图特征向量 F_0 与参考典型泵示功图特征向量 F_i 的关联系数为：

$$\varepsilon_i(k) = \frac{\min_i \min_k |f(k) - f_i(k)| + \rho \max_i \max_k |f(k) - f_i(k)|}{|f(k) - f_i(k)| + \rho \max_i \max_k |f(k) - f_i(k)|} \quad (7.29)$$

其中 $i = 1, 2$ ， $k = 1, 2, \dots, 6$ 。 $\Delta_i k = |f(k) - f_i(k)|$ 称为 F_0 与 F_i 在第 k 特征处的信息差异。 $\min_i \min_k |f(k) - f_i(k)|$ 表示在 i 个故障曲线中找一条差异最小的曲线。 ρ 称为分辨系数，是 0 与 1 之间的数，一般取 $\rho = 0.5$ 。综合各特征点的关联系数，则 F_0 与 F_i 的关联度按下式计算：

$$\gamma_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_i(k) \quad (7.30)$$

最大关联度识别故障原则： γ_i 是待检验示功图特征向量与参考特征向量的关联度，是几何接近程度的定量描述， γ_i 值越大，则 F_0 与 F_i 的关系也密切，即相似度越大，认为

F_0 为属于 F_i 的工况种类。

7.2.5 计算结果及分析

使用灰色理论与网格法相结合的方法对附件 1 和附件 2 的油井泵内是否充气判断的结果如表 7.3 和表 7.4 所示。判断结果为附件 1 油井泵内未充气，附件 2 油井泵内充气。计算结果表明，采用灰色理论与网格法相结合通过泵功图的特征向量来判断相似性的方法是非常稳定的，但其准确性要依赖于参考的典型泵功图的统计特征向量。如果给定的典型泵功图的统计特征向量准确，则按灰色理论与网格法相结合的方法能够非常精准、正确地判断出泵功图的工作状态。

表 7.3 附件 1 油井是否充气判断结果

统计特征值	均值 f_1	方差 f_2	偏度 f_3	峰度 f_4	能量 f_5	熵 f_6
	2.4970	4.9778	-0.0305	2.5340	0.1313	0.4042
灰关联度	泵正常			泵充气		
	0.7619			0.7013		
判断结果	泵正常					

表 7.4 附件 2 油井是否充气判断结果

统计特征值	均值 f_1	方差 f_2	偏度 f_3	峰度 f_4	能量 f_5	熵 f_6
	2.1006	6.1911	-0.3407	3.1656	0.1236	0.4059
灰关联度	泵正常			泵充气		
	0.6848			0.8137		
判断结果	泵充气					

8 问题四：深入研究的问题

8.1 抽油系统模型改进

8.1.1 非齐次波动方程模型建立及求解

井下示功图直接反应了泵的工作状态，泵功图的求解不仅有利于对泵况进行准确的分析及故障判断，还可以求出泵的有效排量，从而准确的求出油井产液量。因此，准确进行井下示功图的转换非常重要。Gibbs 模型建立时，忽略了微元的重力和浮力，从而获得简单的齐次波动方程。然而在实际计算中，由于抽油杆重力和浮力的影响必须考虑，Gibbs 模型只能将抽油杆的重力和浮力视为悬点处的集中力。很显然，抽油杆的重力和浮力属于分布力，将其等效为集中力并且作用在非质心处的悬点时将导致变形的计算不准确，并最终影响泵功图的计算精度。鉴于此，通过微元分析法，考虑抽油杆的重力和浮力后，我们可以建立更精确的力学方程来描述抽油杆的位移函数。

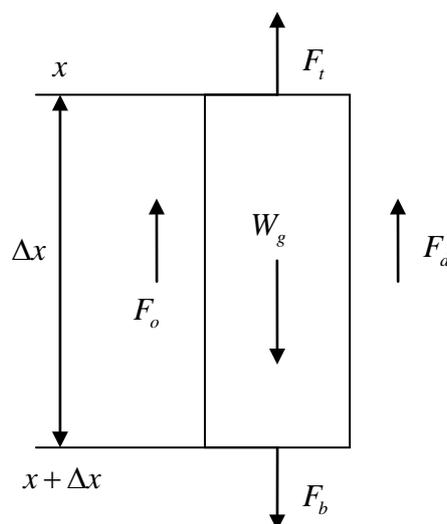


图 8.1 抽油杆柱微元受力示意

考虑重力影响的抽油杆柱微元受力如图 8.1 所示。这里假设以悬点为原点，沿井深方向为位移方向，沿杆柱纵向截取一点 x 和另一点 $x+\Delta x$ 。抽油杆柱密度均匀为 ρ_g ，截面积恒为 A 。 F_d 为微元所受阻尼力，其方向与位移方向相反， F_t 为微元在 x 处的张力， F_b 为微元在 $x+\Delta x$ 处的张力， W_g 为微元的重力， F_o 为微元所受到的浮力。混合液密度均匀为 ρ_l ，阻尼系数设为常数 c ，重力加速度 g 。依据牛顿第二定律有

$$F_b - F_t - F_b + W_g - F_o = \rho_g A \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (8.1)$$

式中

$$F_b = EA \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} \quad (8.2)$$

$$F_t = EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \quad (8.3)$$

$$F_b = c \rho_g A \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} \quad (8.4)$$

$$W_g = \rho_g A \Delta x g \quad (8.5)$$

$$F_o = \rho_l A \Delta x g \quad (8.6)$$

将(8.2)-(8.6)式代入(8.1)式有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \frac{\partial u}{\partial t} + g' \quad (8.7)$$

式中

$$g' = \frac{\rho_g - \rho_l}{\rho_g} g \quad (8.8)$$

方程(8.7)即为考虑重力和浮力影响之后的抽油杆柱微元的受迫振动方程，该方程为非齐次的波动方程。由于抽油杆材质均匀，油水混合均匀， g' 实际上为常数，方程(8.7)的求解与 Gibbs 方程类似。仅考虑方程(8.7)的齐次部分时，其一般解与 Gibbs 方程一致，即

$$\bar{z}(x, t) = \xi \eta x + \xi \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} (\phi_n \sin(\lambda_n x) + \varphi_n \cos(\lambda_n x)) e^{in\omega t} \quad (8.9)$$

方程(8.7)的特解可取为

$$z^*(x, t) = -\frac{g'}{2a^2} x^2 \quad (8.10)$$

综合方程(8.9)和(8.10)，可得方程(8.7)的一般解为

$$z(x, t) = \bar{z}(x, t) + z^*(x, t) \quad (8.11)$$

方程(8.7)的物理解应为(8.11)式的实部，即

$$u(x, t) = \text{Re}[\bar{z}(x, t) + z^*(x, t)] = \text{Re}[\bar{z}(x, t)] - \frac{g'}{2a^2} x^2 \quad (8.12)$$

任意时刻 x 截面处杆的载荷可采用胡克定律计算，表示为

$$F(x, t) = \text{Re} \left[EA \frac{\partial (\bar{z}(x, t) + z^*(x, t))}{\partial x} \right] = \text{Re} \left[EA \frac{\partial \bar{z}(x, t)}{\partial x} \right] - EA \frac{g'}{a} x \quad (8.13)$$

由于初始时刻位移 $x=0$ ，重力和浮力项对初始条件无影响。代入初始条件可知方程(8.9)的所有系数与 Gibbs 方程解的系数完全一致。因此方程(8.7)的最终解为

$$u(x, t) = \frac{\sigma_0}{2EA} x + \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} (O_n(x) \cos(n\omega t) + P_n(x) \sin(n\omega t)) - \frac{g'}{2a^2} x^2 \quad (8.14)$$

$$F(x, t) = \frac{\sigma_0}{2} + EA \sum_{n=1}^{\bar{n}} (O_n'(x) \cos(n\omega t) + P_n'(x) \sin(n\omega t)) - EA \frac{g'}{a^2} x \quad (8.15)$$

8.1.2 计算结果与分析

采用当前模型计算时，除了不需要将实测悬点载荷减去杆重力载荷和浮力外，其计算流程与 Gibbs 模型基本一致。依据附件一和附件二悬点示功图数据计算的泵功图如下：

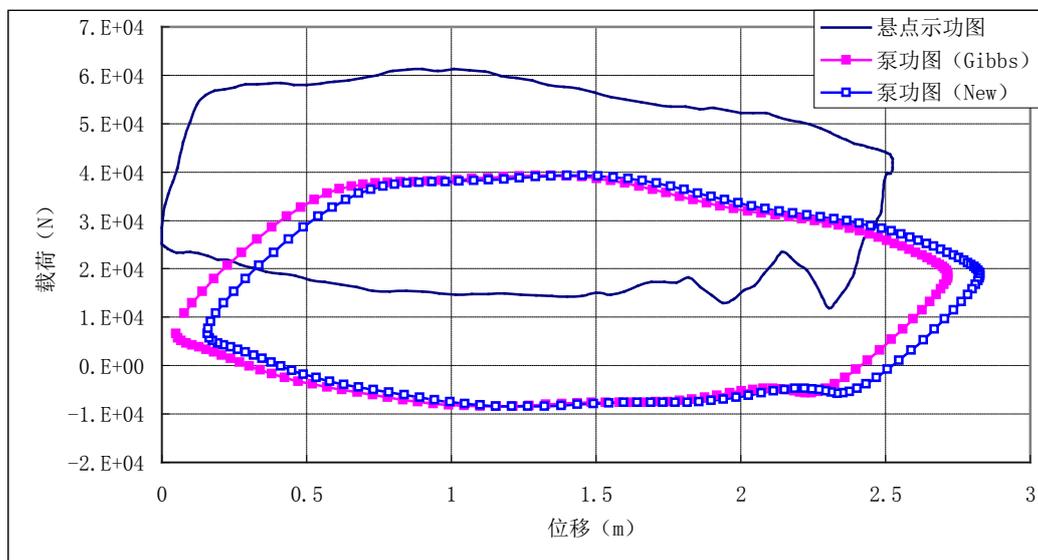


图 8.2 算例一悬点示功图与泵功图对比

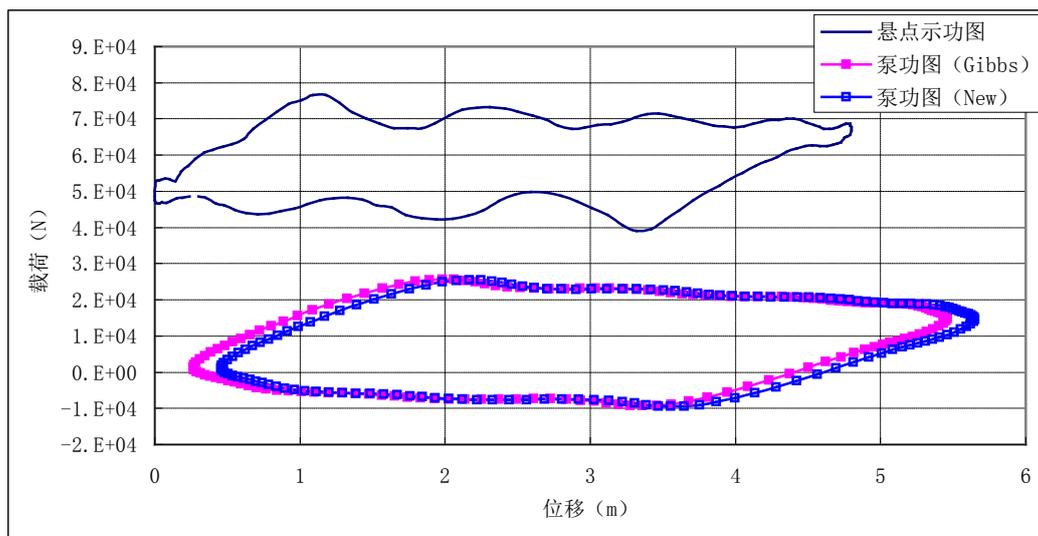


图 8.3 算例二悬点示功图与泵功图对比

图 8.2 和 8.3 分别为由附件一和附件二数据计算的结果。图中给出了悬点示功图、由 Gibbs 模型计算的泵功图和由本文模型计算的泵功图。结果比较可以发现，采用本文模型计算的泵载荷与 Gibbs 模型计算的结果基本一致，但是泵位移比 Gibbs 模型计算的结果要大。如图 8.2 所示，下死点处 Gibbs 模型计算的泵位移为 $\Delta l_G = 0.048711m$ ，采用本文模型计算的泵位移为 $\Delta l_N = 0.158016m$ 。下面我们将通过理论分析来说明本文模型的计算结果更为合理。

抽油杆可以等效为如图 8.4 的杆件模型

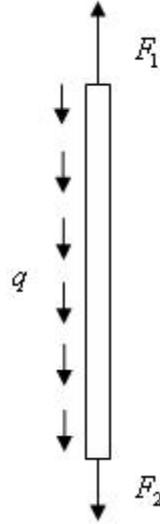


图 8.4 抽油杆受力分析

图中， F_1 为悬点处载荷， F_2 为抽油杆下端载荷，可以近似取为泵载荷， q 为抽油杆所受的均布载荷，包含重力，浮力和摩擦阻力等。

由计算结果可知，下死点处， $F_1 = 24538\text{N}$ ， $F_2 = 6582.1\text{N}$ ，由此可计算等效均布载荷为

$$q = \frac{F_1 - F_2}{L} = \frac{24538 - 6582.1}{792.5} = 22.66 \text{ N/m} \quad (8.16)$$

利用上述数据，同时注意到杆的杨氏模量 $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ pa}$ ，杆直径 $D_r = 0.022\text{m}$ ，可以求得抽油杆下端的变形为

$$\Delta l = \frac{4}{E\pi D_r^2} \int_0^L (F_1 - qx) dx = \frac{4}{E\pi D_r^2} \left(F_1 L - \frac{1}{2} q L^2 \right) = 0.1545\text{m} \quad (8.17)$$

采用 Gibbs 模型计算的下死点处抽油杆下端变形的误差为

$$\gamma_G = \frac{|\Delta l - \Delta l_G|}{\Delta l} \times 100\% = \frac{|0.1545 - 0.048711|}{0.1545} \times 100\% = 68.47\% \quad (8.18)$$

采用本文模型计算的下死点处抽油杆下端变形的误差为

$$\gamma_G = \frac{|\Delta l - \Delta l_N|}{\Delta l} \times 100\% = \frac{|0.1545 - 0.158016|}{0.1545} \times 100\% = 2.28\% \quad (8.19)$$

由此可见，本文模型计算的结果与分析结果更为接近，从而验证了本文模型计算泵位移的精度高于 Gibbs 模型。

表 8.1 给出了由本文模型计算的泵功图求得的油井产液量，图中还给出了 Gibbs 模型计算的结果作为比较。两个模型计算的油井一的产液量完全一致，油井二的产液量稍有不同，但两者差值很小。由此说明，本文模型计算泵载荷的精度与 Gibbs 模型基本一致。在只关注泵载荷的情况下，采用 Gibbs 模型与采用本文模型都可以得到很好的结果。

表 8.1 Gibbs 模型和本文模型计算的油井产液量比较

Gibbs 模型		附件 1 油井一天的产液量 (t/d)	附件 2 油井一天的产液量 (t/d)
有效冲程法	三点曲率	64.848	20.476
	五点曲率	63.192	19.384
面积法		65.988	22.983
本文模型		附件 1 油井一天的产液量 (t/d)	附件 2 油井一天的产液量 (t/d)
有效冲程法	三点曲率	64.847	20.488
	五点曲率	63.192	19.372
面积法		65.988	22.822

9 模型评价与改进

9.1 问题一模型评价

对于问题一，本文分别建立简化模型和解析模型。简化模型比较适合于没有适当计算工具时的定性分析，但是不能用于精确分析悬点运动规律。解析模型在计算资源充足时，能够快速、精确的得到悬点的运动规律，但对计算资源要求较高。

9.2 问题二模型评价

问题二所采用的计算模型为 Gibbs 模型。Gibbs 模型在建立时，忽略了微元的重力和浮力，从而获得简单的齐次波动方程。然而在实际计算中，由于抽油杆重力和浮力的影响必须考虑，Gibbs 模型只能将抽油杆的重力和浮力视为悬点处的集中力。很显然，抽油杆的重力和浮力属于分布力，将其等效为集中力并且作用在非质心处的悬点将导致变形的计算不准确，并最终影响泵功图的计算精度。这正是 Gibbs 模型的不足之处，也是第四问我们提出新模型时要克服的缺陷。

9.3 问题三模型评价

为了计算油井日产液量，本文建立了有效冲程法模型和面积法模型。其中为了消除泵功图封闭曲线中的高频部分的影响，有效冲程法模型又分为三点曲率法与五点曲率法两种具体实现方式。从计算结果来看，有效冲程法模型与面积法模型都能够根据泵功图快速地计算出油井的产液量，且两个模型的计算结果基本一致，相互验证了两个模型的正确性。

为了快速诊断油井故障，本文建立了灰色理论与网格法相结合的方法。该方法通过实际泵功图与典型故障泵功图的特征向量来判断相似性，进而获得实际泵功图对应的工作状态。灰色理论与网格法相结合的方法的计算精度依赖于所用参考的典型泵功图的统计特征向量，只要给定的典型泵功图的统计特征向量准确，该方法就能够非常精准、正确的判断出泵功图的工作状态。

9.4 问题四模型评价

考虑了重力和浮力影响之后，本文提出了非齐次的波动方程模型。对于材质均匀的抽油杆，如果油水混合液也是均匀的，新模型方程中的齐次项变为常数。对于齐次项为常数的波动方程，通过理论推导可以求得解析解。通过与 Gibbs 模型计算结果比较发现，新模型的位移计算精度比 Gibbs 模型高，载荷计算精度与 Gibbs 模型相当。该模型虽然克服了 Gibbs 模型的一些不足之处，但是它也还存在很多值得改进的地方。例如，模型中并没有考虑抽油杆倾斜的影响，抽油杆与抽油管摩擦的影响和油水混合液不均匀的影响等。

10 参考文献

- [1] 王鸿勋, 张琪, 采油工艺原理, 北京: 石油工业出版社, 1985。
- [2] Gibbs.S.G , Neely,A.B , Computer Diagnosis of Downhole Condition in Sucker Rod Pumping Wells, J.Pet.Tech.,Jan. 1966.
- [3] Gibbs.S.G ,Method of Determining Sucker Rod Pump Performance,United States Patent Office,Sep.1967.
- [4] Ray, L.I. Using Down Hole Displacement and Inferred Production for Verification of Measured Test Data. Case Services,2000:1-4.
- [5] 万仁博, 罗英俊, 采油技术手册(上册), 北京: 石油工业出版社, 1992。
- [6] 王淑梅, 用泵的示功图法计算抽油机井的产量, 油田地面工程, 9(1): 19~20, 1990。
- [7] 万仁溥, 采油工程手册(上册), 北京: 石油工业出版社, 2000。
- [8] 樊滢, 基于灰色理论的抽油井泵示功图诊断技术研究, 微电子学与计算机, 22(3):77-80, 2005。 .
- [9] 邓聚龙, 灰预测与灰决策, 武汉: 华中科技大学出版社, 2000。