参赛密码 _____

（由组委会填写）

第九届“华为杯”
全国研究生数学建模竞赛

学　　校	空军工程大学信息与导航学院
参赛队号	**90052015**
队员姓名	**1.** 张国祥
	2. 赵　一
	3. 杨凯陟

参赛密码 _____

（由组委会填写）

第九届“华为杯”全国研究生数学建模竞赛

题 目 有杆抽油系统的数学建模及诊断

摘 要

本文以油杆抽油系统作为研究对象，针对提出的问题，建立了 6 个数学模型。定量描述了四连杆结构抽油系统中光杆悬点的运动规律，给出了悬点在一个冲程中的位移函数、速度函数、加速度函数的表达式。分析利用 Gibbs 模型将题中给出的悬点示功图转化为泵功图，并利用泵功图对附件 1、2 中的油井产液量进行估算，最后在分析 Gibbs 模型优缺点基础上，对其进行了改进，同时理论推导了新的阻尼系数计算方法，并编程进行了仿真。

针对问题一，建立了模型Ⅰ、模型Ⅱ。模型Ⅰ将悬点的运动视为曲柄滑块结构运动，根据几何关系和给出的其他参数，计算出了悬点的位移、速度、加速度函数；模型Ⅱ利用解析法精确求解计算出了悬点的位移、速度、加速度函数。最后将两种模型求解得出的结果和给出的数据作图比对，由图可知，解析法求得的结果能够更加真实得反映悬点的运动规律，同时可以根据运动规律推算出合理的结构设计。

针对问题二，建立模型Ⅲ。模型Ⅲ利用给出的 Gibbs 模型，采用基于分离变量的傅里叶变换算法，分析边界条件、连续性条件，编写 MATLAB 程序，将给出的悬点示功图转化成泵功图，利用模型将附件 1、附件 2 数据转化得到的泵功图边线较为光滑，接近长方形，对比悬点示功图和泵功图，泵功图的冲程要明显小于示功图的，泵功图的位移较示功图位移有明显滞后，泵功图有效的消除了由于弹性形变和震动造成的示功图上下边线波动的现象。

针对问题三，建立模型Ⅳ、模型Ⅴ。模型Ⅳ用泵功图面积估计日产液量，求解过程中提出了一种求解非等间隔采样图形面积的“最近点分割算法”，该算法克服了传统算法中必须等间隔采样的局限，不仅可用于泵功图面积的求解，对任意非等间隔采样图形求面积的问题都适用。模型Ⅳ通过泵功图分析了阀门的不同工作状态，根据泵功图的曲率变化得到柱塞有效冲程，进而估算日产液量，这是目前生产中应用最为广泛的估算方法。通过 MATLAB 仿真，对附件 1 中 7#井和附件 2 中 1#井的日产液量进行估算。对于 7#井，用面积法求得日产量为 126.42 吨，用有效冲程计算日产量为 89.34 吨；对于 1#井，用面积法求

得日产量为 21.94 吨，用有效冲程计算日产量为 20.11 吨。

针对问题四，改进模型Ⅲ，建立模型Ⅵ。通过对模型Ⅲ抽油杆力学分析，得出在用 Gibbs 模型求解多级抽油杆系统泵功图时，相邻两根抽油杆柱连接处的环形区域受到油管内液体的压力不能忽略，为此修改了油杆在连接处的连续性条件，重新计算泵功图，并进行了比较，效果要好于 Gibbs 模型。模型Ⅵ推导得出了用示功图计算阻尼系数的方法，并将附件 1、2 中的数据带入，求解得出了阻尼系数分别为 1.0341s^{-1}、0.3395s^{-1}。

关键词：四连杆模型　Gibbs 模型　泵功图　日产液量估算　阻尼系数

一 问题的重述与分析

1.1 问题重述

有杆泵往复抽汲方式是应用最早也最为广泛的一种人工举升采油法，其具有设备装置简单、操作方便、综合成本低的特点。早在石油工业问世时，就开始采用这一方法进行采油。目前，在各种人工举升采油方法中，有杆抽油仍居于首要地位。然而，抽油井井下工作环境复杂，易于发生故障，且井下难于长期放置监测装置，使得井下故障难于及时发现，因此开发一套抽油井诊断系统，对油田降低能耗，提高生产效率具有重要意义。

1966 年美国壳牌石油公司的 S.G.Gibbs 和 A.B.Neely 提出了有杆抽油系统的计算机诊断技术，并于 1967 年 9 月 26 日获得美国专利权[1][2]。其基本原理是把抽油杆柱看作井下动态信号的传导线，而抽油泵则为发送器，泵的工作状况以应力波的形式沿抽油杆柱传递到地面，被作为接受器的动力仪所接收。根据这个原理，建立了带阻尼的波动方程作为描述应力波在抽油杆柱中传递过程的基本微分方程，以光杆动载荷及位移作为边界条件求解此方程，可以得到抽油杆柱任意截面处的位移和载荷，从而绘出所需的抽油杆柱任意截面及泵的示功图。根据这些示功图，可以对抽油系统的工作状况作出分析和判断。

1.2 需要解决的问题

1、建立杆式抽油机数学模型，求出悬点 E 的一个冲程的运动规律：位移函数、速度函数、加速度函数。
2、利用 Gibbs 模型，结合给出的附件数据和油井参数，通过对数据的预处理，明确边界，将已有的悬点示功图转化为泵示功图，并画出图形。
3、建立不同的由泵功图估计油井产量的模型，并利用模型估算附件中两口油井一天的产液量。
4、分析 Gibbs 模型的优缺点，尝试体会出新的模型，根据已有数据计算泵功图，并将其与 Gibbs 模型进行对比；目前由于阻尼系数的求解多在假设基础之上，不能完整的反应实际情况，尝试从 Gibbs 波动方程本身或者是现有数据给出阻尼系数的计算方法。

二 问题假设

根据题意，可以做出如下假设：
1、分析悬点运动规律时将抽油机视为理想四连杆结构，忽略其弹性形变。
2、所有抽油杆均为钢制，密度为：8456（单位：kg/m^3），弹性模量为：2.1*10^{11}（单位：pa）。
3、抽油机的油管是锚定的，因此不必考虑抽油管的长度变化（伸缩）。
4、光杆与第一级抽油杆粗细相同，计算时把光杆与第一级抽油杆同等看待，长度也计入了

第一级。
5、电机匀速转动。

三 符号说明

a 应力传播的速度， m/s
c 阻尼系数， s^{-1}
E 弹性模量， Pa
f_r 抽油杆截面积， m^2
L 抽油杆柱总长度， m
L_t 表示t时刻油杆在油管内的长度， m
ρ 表示油杆密度， kg/m^3
ρ_o 地面原油密度， kg/m^3
ρ_1 油水混合的密度， kg/m^3
ρ_w 水的密度， kg/m^3
f_w 原油含水量
W_r 油杆在内管液体中的重量， kg
μ 原油动力粘度， $mPa•s$
g 重力加速度， kg/m^2
D 泵径或柱塞直径， m
$S_{有效}$ 有效冲程， m
N 抽油机冲次，次/min
Q 抽油机日产液量， t
Q_p 理论日产液量， t
K 曲率
ρ' 井下混合液密度， t/m^3
ε 原油体积系数

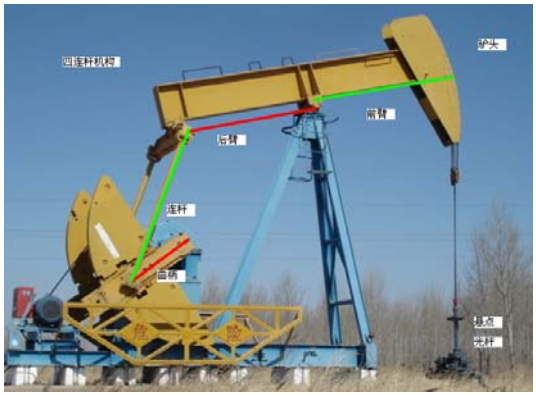
四 模型建立与求解

4.1 问题一：光杆悬点的运动规律

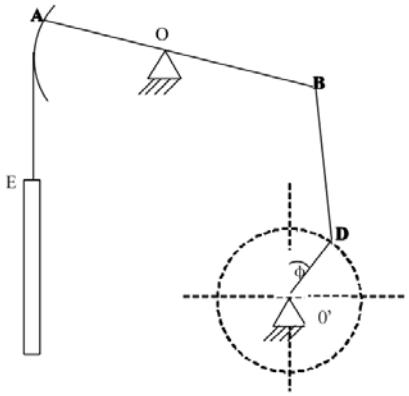
4.1.1 模型建立

杆式抽油机是当今运用最为广泛的抽油系统。其具有设备装置简单、操作方便、综合成本低的特点。图 4-1-1(a)为典型杆式抽油机地面部分实物图。经简化得到结构如图 4-1-1(b)所示。其中，前臂 $a=4315\,\text{mm}$ ，后臂 $b=2495\,\text{mm}$，连杆 $l=4315\,\text{mm}$，曲柄半径 r =950mm。假设 D 点绕O'顺时针匀速转动，则 D 带动游梁 AB 做上下往复运动，E 点通过驴头与悬点

A 连接，E 点上下运动一个周期即为一个冲程。



(a)



(b)

图 4-1-1 杆式抽油机实物图和简图

4.1.2 简化为曲柄滑块机构求解悬点 E 运动规律

根据题目所给数据，$r/l \approx 0.25$，因此可以将 B 点绕游梁支点的弧线运动近似地看作直线运动，抽油机可简化为图 4-1-2 所示结构[4]。其中 ϕ 为 $O'D$ 与竖直方向的夹角，ψ 为 BD 与竖直的夹角。

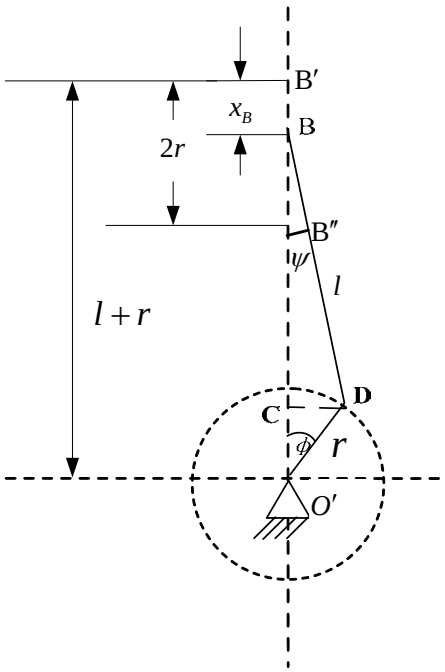


图 4-1-2 曲柄滑块结构简图

当 $\phi = 0$ 时，游梁与连杆的连接点 B 在 B' 点，为距曲柄轴心最远位置，相应于悬点 E 的下死点。当 $\phi = \pi$ 时，B 点在 B'' 处，为距曲柄轴心最近的位置，相应于悬点 E 为上死点。$O'B' = l + r$，$O'B'' = l - r$。B 点的最大位移为 $2r$。B 点在任意时刻的位移（从 x_B 算起）x_B 为：

$$x_B = BB' = O'B' - O'B = l + r - O'B$$

由三角形$O'DB$得：

$$O'B = O'C + BC = \mathrm{r}\cos\phi + l\cos\psi$$

则

$$\begin{aligned} x_B &= l + r - (r\cos\phi + l\cos\psi) \\ &= r(1-\cos\phi) + l(1-\cos\psi) \\ &= r[(1-\cos\phi) + 1/\lambda(1-\cos\psi)] \end{aligned} \qquad (4\text{-}1\text{-}1)$$

其中，$\lambda = r/l$。在三角形$O'DB$中利用正弦定理，可找到ψ与ϕ的关系：

$$\sin\psi = \frac{r}{l}\sin\phi$$

而

$$\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\phi}$$

将该式带入（4-1-1）式，得到：

$$x_B = r\left[(1-\cos\phi) + \frac{1-\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\phi}}{\lambda}\right] \qquad (4\text{-}1\text{-}2)$$

B 点速度为：

$$v_B = \frac{\mathrm{d}x_B}{dt} = r\left(\sin\phi + \frac{\lambda\sin 2\phi}{2\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\phi}}\right)\frac{d\phi}{dt} \qquad (4\text{-}1\text{-}3)$$

因为$\dfrac{d\phi}{dt} = \omega$，故：

$$v_B = \frac{\mathrm{d}x_B}{dt} = \omega r\left(\sin\phi + \frac{\lambda\sin 2\phi}{2\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\phi}}\right) \qquad (4\text{-}1\text{-}4)$$

B 点的加速度为：

$$a_B = \frac{dv_B}{\mathrm{d}t} = \omega^2 r\left(\cos\phi + \frac{\lambda\cos 2\phi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\phi}} + \frac{\lambda^3\sin^2 2\phi}{4\left(1-\lambda^2\sin^2\phi\right)^{\frac{3}{2}}}\right) \qquad (4\text{-}1\text{-}5)$$

至此，B 点的速度位移，速度，加速度均已求得。由于 A 点与 B 点为杠杆的两端，A 点与 E 点用刚性线缆连接，可视为同步运动，因此可以由 B 求出 E 点的运动规律：
E 点位移：

$$x_E = x_B\frac{a}{b} = r\left[\left(1-\cos\omega t\right) + \frac{1-\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t}}{\lambda}\right]\frac{a}{b} \qquad (4\text{-}1\text{-}6)$$

E 点速度：

$$v_E = v_B\frac{a}{b} = \omega r\left(\sin\omega t + \frac{\lambda\sin 2\omega t}{2\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t}}\right)\frac{a}{b} \qquad (4\text{-}1\text{-}7)$$

E 点加速度：

$$a_E = a_B \frac{a}{b} = \omega^2 r \left(\cos\omega t + \frac{\lambda \cos 2\omega t}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \omega t}} + \frac{\lambda^3 \sin^2 2\omega t}{4\left(1-\lambda^2 \sin^2 \omega t\right)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{a}{b} \qquad (4\text{-}1\text{-}8)$$

附件 1 中给出了油泵的冲次为每分钟 7.6 次，换算成角速度为 $\omega \approx 0.253\pi\, rad/s$，$\lambda = r/l = 0.2585$。

4.1.3 由解析式求得运动规律的精确解

上一节中简化为曲柄滑块机构后的研究结果可用于一般计算和分析。但是精确的分析计算和抽油机结构设计时，则必须按四连杆机构来研究抽油机的实际运动规律。本节根据解析式用计算机来精确计算每种抽油机的位移、速度和加速度，并将结果与滑块法所得的结果进行对比。

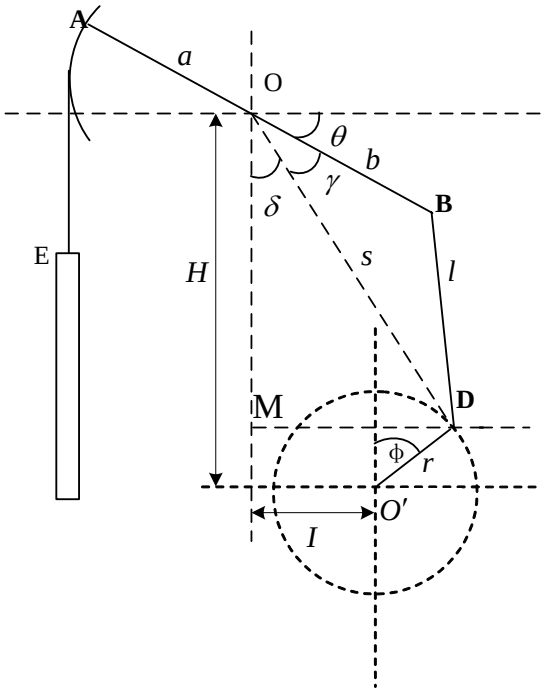


图 4-1-3 解析法结构简图

首先给出解析法求精确解的数学模型。图 4-1-3 为抽油机的四连杆结构示意图，这里对图中一些符号做必要的说明：由于题目中未给出 O 点位置，这里假设 O 点距离 O' 水平距离为 I，垂直距离为 H。连接 OD，设 OD 长度为 s，γ 为 OD 与 OB 夹角，δ 为 OD 与过 O 点竖直方向的夹角，$MD \perp OM$。下面给出解析法的求解过程。

首先，在三角形 ODB 中，对角 γ 用余弦定理有：

$$\gamma = \arccos \frac{b^2 + s^2 - l^2}{2bs} \qquad (4\text{-}1\text{-}9)$$

在三角形 ODM 中：

$$\delta = \arctan\frac{I + r\sin\phi}{H - r\cos\phi} \tag{4-1-10}$$

$$s = \sqrt{(I + r\sin\phi)^2 + (H - r\cos\phi)^2} \tag{4-1-11}$$

将（4-1-11）式代入（4-1-9）式，则γ、δ都能用ϕ表示出。显然，

$$\theta = \pi/2 - \gamma - \delta$$

可推导出θ与ϕ之间的关系：

$$\theta(\phi) = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{b^2 + (I + r\sin\phi)^2 + (H - r\cos\phi)^2 - l^2}{2b\sqrt{(I + r\sin\phi)^2 + (H - r\cos\phi)^2}} - \arctan\frac{I + r\sin\phi}{H - r\cos\phi} \tag{4-1-12}$$

悬点位移

$$x_E = a\theta$$

根据临界条件：t=0 时刻，曲柄滑块 D 位于上顶点（$\phi = 0$），AB 平行于水平面，E 对应坐标原点（称为 E 的下死点），E 的位移为 0；D 运动到下顶点（$\phi = \pi$）时，E 的位移到达最大（称为 E 的上死点），对于（4-1-12）得到以下对应结果：

当$\phi = 0$时：

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{b^2 + I^2 - l^2 + (H - r)^2}{2b\sqrt{I^2 + (H - r)^2}} - \arctan\frac{I}{H - r} = 0 \tag{4-1-13}$$

当$\phi = \pi$时：

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{b^2 + I^2 - l^2 + (H + r)^2}{2b\sqrt{I^2 + (H + r)^2}} - \arctan\frac{I}{H + r} = \theta_{\max} \tag{4-1-14}$$

其中，

$$\theta_{\max} = \frac{S_{\max}}{a}$$

$S_{\max}$对应最大位移即冲程，可在附件 1 中查得。用 MATLAB 求解由（4-1-13）（4-1-14）两式联立而成的方程组，得数值解$I = 1028.1(\text{mm})$，$H = 4319.5(\text{mm})$，确定出O点的相对位置。将H和I回代（4-1-13），即可得到E点的位移x_E：

$$x_E = a\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{b^2+(I+r\sin\phi)^2+(H-r\cos\phi)^2-l^2}{2b\sqrt{(I+r\sin\phi)^2+(H-r\cos\phi)^2}} - \arctan\frac{I+r\sin\phi}{H-r\cos\phi}\right) \quad (4\text{-}1\text{-}15)$$

根据题设条件，D 点绕O'顺时针匀速转动，设其角速度为ω，则位移函数为：

$$x_E(t) = a\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{b^2+(I+r\sin\omega t)^2+(H-r\cos\omega t)^2-l^2}{2b\sqrt{(I+r\sin\omega t)^2+(H-r\cos\omega t)^2}} - \arctan\frac{I+r\sin\omega t}{H-r\cos\omega t}\right) (4\text{-}1\text{-}16)$$

接下来，求 E 点的速度。

$$v_E(t) = \frac{dx_E}{dt} = a\frac{d\theta}{dt} = a\frac{d}{dt}(2\pi-\delta-\gamma) = -a(\frac{d\gamma}{dt}+\frac{d\delta}{dt}) \quad (4\text{-}1\text{-}17)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{b^2+s^2-l^2}{2bs}\right)^2}}\cdot\frac{s^2-b^2+l^2}{2bs^2}\cdot\frac{ds}{dt} \quad (4\text{-}1\text{-}18)$$

根据（4-1-9）式有 $\cos\gamma = \dfrac{b^2+s^2-l^2}{2bs}$

故（4-1-18）式改写为

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2\gamma}}\cdot\frac{s^2-b^2+l^2}{2bs^2}\cdot\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{\sin\gamma}\frac{s^2-b^2+l^2}{2bs^2}\frac{ds}{dt} \quad (4\text{-}1\text{-}19)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{r(I+r\sin\phi)\cos\phi + r(H-r\cos\phi)\sin\phi}{\sqrt{(I+r\sin\phi)^2+(H-r\cos\phi)^2}}\cdot\frac{d\phi}{dt} \quad (4\text{-}1\text{-}20)$$

从图 3 中可看出，在三角形 ODM 中：

$$I + r\sin\phi = s\cdot\sin\delta,\quad H - r\cos\phi = s\cdot\cos\delta$$

因此将（4-1-20）式改为

$$\frac{ds}{dt} = r\cdot\frac{s\cdot\sin\delta\cos\phi + s\cdot\cos\delta\sin\phi}{s}\cdot\frac{d\phi}{dt} = r\omega\sin(\delta+\phi) \quad (4\text{-}1\text{-}21)$$

$$\frac{d\delta}{dt}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{I+r\sin\phi}{H-r\cos\phi}\right)^2}\cdot\frac{r\left(H-r\cos\phi\right)\cos\phi-r\left(I+r\sin\phi\right)\sin\phi}{\left(H-r\cos\phi\right)^2}\frac{d\phi}{dt}$$
$$=\frac{rs\cos\delta\cos\phi-rs\sin\delta\sin\phi}{\left(H-r\cos\phi\right)^2+\left(I+r\sin\phi\right)^2}\frac{d\phi}{dt}=\frac{r\omega\cos\left(\delta+\phi\right)}{s} \tag{4-1-22}$$

结合（4-1-17）（4-1-18）（4-1-22）式，得到 E 点的速度函数：

$$v_E\left(t\right)=ar\omega\left[\frac{\sin(\delta+\omega t)}{\sin\gamma}\frac{s^2-b^2+l^2}{2bs^2}-\frac{\cos(\delta+\omega t)}{s}\right] \tag{4-1-23}$$

其中，γ、δ、s分别由式（4-1-9）、（4-1-10）和（4-1-11）确定。

再对$v_E\left(t\right)$求导，得到 E 点的加速度函数：

$$\begin{aligned}a_E\left(t\right)=&ar\omega\left[\frac{\cos\left(\delta+\omega t\right)}{\sin\gamma}\left(\frac{d\delta}{dt}+\omega\right)-\frac{\sin\left(\delta+\omega t\right)}{\sin\gamma\tan\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\right]\frac{s^2-b^2+l^2}{2bs^2}\\&+ar\omega\left[\frac{\sin\left(\delta+\omega t\right)}{\sin\gamma}\frac{b^2-l^2}{bs^3}\frac{ds}{dt}+\frac{\sin\left(\delta+\omega t\right)}{s}\left(\frac{d\delta}{dt}+\omega\right)+\frac{\cos\left(\delta+\omega t\right)}{s^2}\frac{ds}{dt}\right]\end{aligned} \tag{4-1-24}$$

其中γ、δ、s、$\dfrac{d\gamma}{dt}$、$\dfrac{ds}{dt}$、$\dfrac{d\delta}{dt}$分别由式(4-1-9)、(4-1-10)、(4-1-11)、(4-1-19)、(4-1-21)、(4-1-22）确定。

4.1.4 两种方法结果对比

利用 MATLAB 程序实现两种方法，分别得出了 E 点的运动规律。图 4-1-4、图 4-1-5、图 4-1-6 分别给出了两种方法得到的位移曲线、速度曲线和加速度曲线，从图中看出两者比较吻合，均高于附件 1 给出的有荷载的实测位移。这是由于两个模型中均忽略了弹性形变对悬点的影响。实际情况下，由于井下带有载荷，必然引起游梁弯曲以及悬点和驴头之间钢缆的拉伸，当负载较大时，忽略这些形变量会引起一定误差。

从三个图中还可以发现，解析算法得到的曲线较滑块法有一个微小的水平偏移，并且解析法求出的结果出现负值。这是由于解析算法考虑了 B 点实际的圆周运动而不是滑块法中简单的上下运动，水平方向上存在位移造成了实际的上下死点位置并不是严格的在$\phi=\pi$和$\phi=0$处取得。从仿真结果中得出，当$\phi=\pi/12$时悬点到达下死点，下死点位移为 -0.05 m。$\phi=37\pi/36$时悬点到达上死点，上死点位移为 3.2 m。在速度和加速度曲线图中的滞后同样也是解析解法考虑 B 为圆周运动造成的结果。

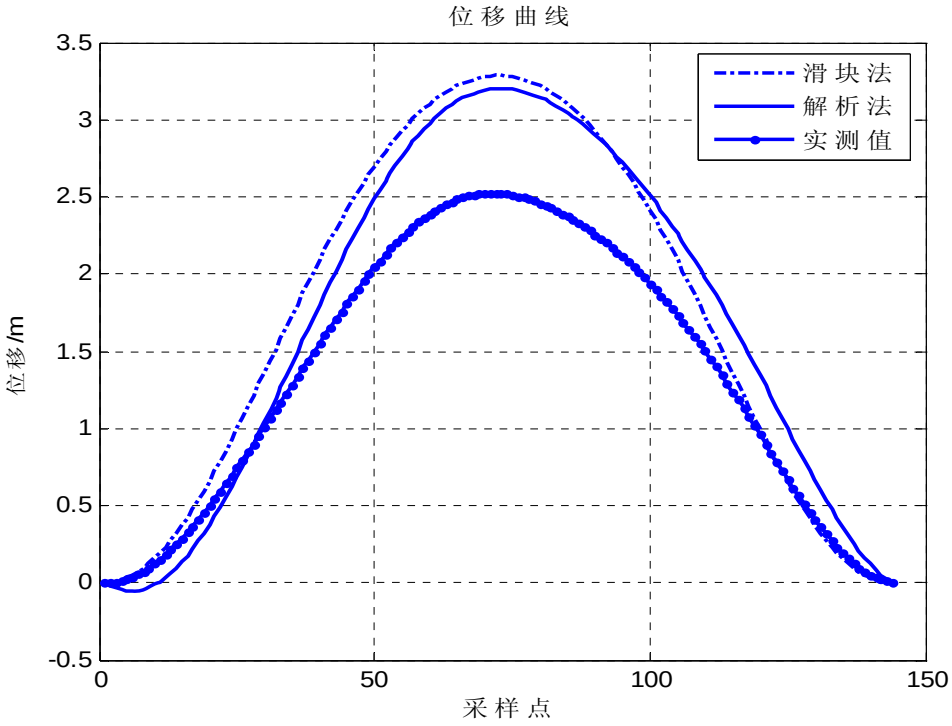


图 4-1-4　位移曲线

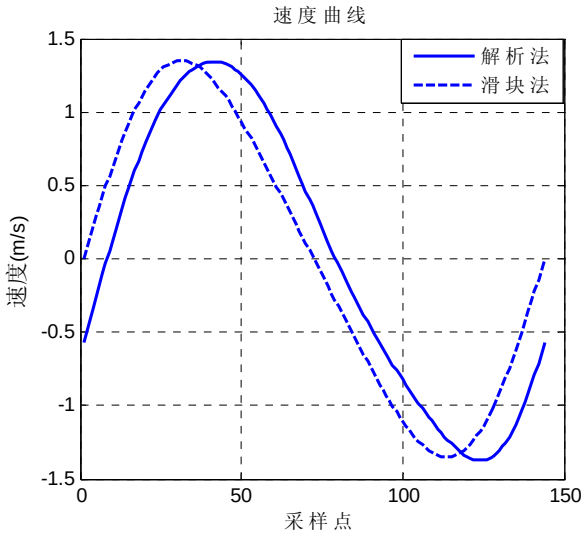


图 4-1-5　速度曲线

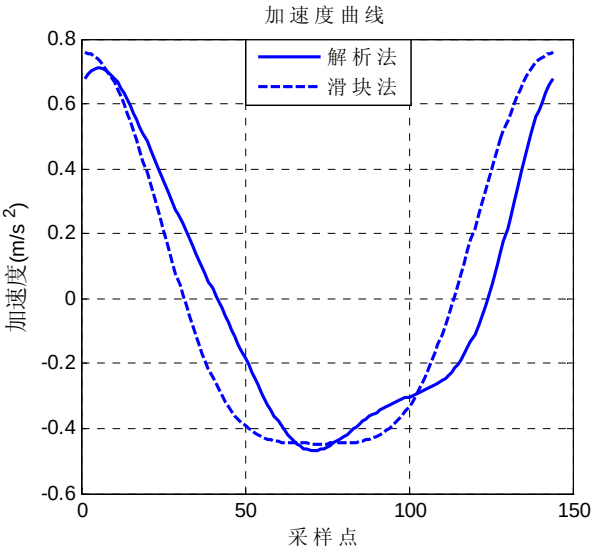


图 4-1-6　加速度曲线

4.1.5 对问题一的再思考

由上一节解析法求得的O点坐标发现，OO'的横向距离小于 OB。因此，当 OB 在水平位置，BD 并不是严格垂直的，而是与竖直方向有一个夹角δ。进一步分析发现，悬点的最小位移并不是 0 而是一个很小的负值，并且对应的角度也并不是 0，下面给出简略的证明。

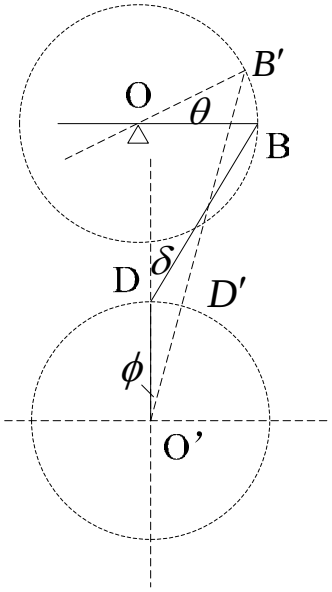


图 4-1-7 实际四连杆示意图

图 4-1-7 为实际四连杆的示意图，为便于观察未按比例画出，令 OD 由 0° 转动角度 ϕ 到 D' 位置时，$OD'B'$ 在一条直线上，由于三角形三边关系可知 $O'B' > O'B$，由于 B 点只能在以 O 为圆心，OB 为半径的圆周上运动，那么 B' 位置将高于 O 点，造成悬点的负位移，这个结论与图 4-1-4 曲线吻合，说明解析法较滑块法能够更加真实地反应悬点的实际运动规律。

需要指出的一点是，在四连杆模型中，O' 与 O 的位置关系是十分重要的，它决定着四连杆结构如何工作或者能否工作。本题的难点在于 O' 与 O 的位置关系是未知的，如果认为当 OB 水平时 $O'BD$ 共线且垂直将得出错误的结论，因为上文中已经得出，当 $\phi = \pi/12$ 时悬点到达下死点，这个角度是不能近似为零的，进一步计算可知，如果认为当 OB 水平时 $O'BD$ 共线且垂直，题目所给的结构将不能完成圆周运动。这一结论可以通过简单的几何关系推出，这里不再赘述。而由解析式求精确解的优势在于可以通过已知尺寸计算出合理的结构设计，确定 O' 与 O 的位置关系，或者根据计算出的运动规律反推结构设计存在的问题，这在工程实践中具有指导意义。

4.2 问题二泵功图计算

4.2.1 Gibbs 模型介绍

1966 年，Gibbs 给出了由悬点示功图转化为地下泵功图模型[1][1]，称为 Gibbs 模型。该模型的核心在于用一维粘滞阻尼波动方程作为描述油杆运动和应力传播的基本微分方程，在满足边界条件、初始条件的基础上，采用分离变量傅里叶变换法，通过傅里叶级数拟合位移和荷载。对于多级油杆的油井系统来说，根据力的连续性原理，进而求得多级的油杆末端的位移、荷载。

Gibbs 模型一维粘滞阻尼波动方程为：

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-c\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{4-2-1}$$

a 表示应力传播的速度，c 表示阻尼系数，求解阻尼系数的公式在后面给出。他描述了应力在油杆上传递的过程。利用分离变量的傅里叶变换法，其解是在两个以截断傅里叶级数表示的边界条件下的特解。两个边界条件见式（4-2-2）、（4-2-3）：

$$D(\omega t)=L(\omega t)-W_r=\frac{\sigma_0}{2}+\sum_{n=1}^{\bar{n}}\sigma_n\cos n\omega t+\tau_n\sin n\omega t \tag{4-2-2}$$

$$U(\omega t)=\frac{\gamma_0}{2}+\sum_{n=1}^{\bar{n}}\gamma_n\cos n\omega t+\delta_n\sin n\omega t \tag{4-2-3}$$

特解见式（4-2-4）、（4-2-5）：

$$u(x,t)=\frac{\sigma_0}{2Ef_r}x_1+\frac{\gamma_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}O_n(x_1)\cos n\omega t+P_n(x_1)\sin n\omega t \tag{4-2-4}$$

$$F(x,t)=Ef_r[\frac{\sigma_0}{2Ef_r}+\sum_{n=1}^{\infty}O_n^{'}(x_1)\cos n\omega t+P_n^{'}(x_1)\sin n\omega t] \tag{4-2-5}$$

式（4-2-2）、（4-2-3）中的傅里叶系数σ_n、τ_n、γ_n、δ_n由式（4-2-6）~（4-2-9）计算得到：

$$\sigma_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega}D(\omega t)\cos n\omega t dt\ ,n=0,1,2,\ldots \tag{4-2-6}$$

$$\tau_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega}D(\omega t)\sin n\omega t dt\ ,\ n=1,2,\ldots \tag{4-2-7}$$

$$\gamma_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega}U(\omega t)\cos n\omega t dt\ ,n=0,1,2,\ldots \tag{4-2-8}$$

$$\delta_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\mathrm{U}(\omega t)\sin n\omega t dt\ ,\ n=1,2,\ldots \tag{4-2-9}$$

对于离散的值，上述公式可以转化为以下公式（4-2-10）~（4-2-13）近似求解：

$$\sigma_n=\frac{2}{K}\sum_{p=1}^{K}D(\frac{2\pi}{K}p)\cos(\frac{2n\pi}{K}p)\quad n=0,1,2\ldots,\bar{n} \tag{4-2-10}$$

$$\tau_n=\frac{2}{K}\sum_{p=1}^{K}D(\frac{2\pi}{K}p)\sin(\frac{2n\pi}{K}p)\quad n=1,2,\ldots\bar{n} \tag{4-2-11}$$

$$\gamma_n=\frac{2}{K}\sum_{p=1}^{K}U(\frac{2\pi}{K}p)\cos(\frac{2n\pi}{K}p)\quad n=0,1,2\ldots,\bar{n} \tag{4-2-12}$$

$$\delta_n=\frac{2}{K}\sum_{p=1}^{K}U(\frac{2\pi}{K}p)\sin(\frac{2n\pi}{K}p)\quad n=1,2,\ldots\bar{n} \tag{4-2-13}$$

对于由（4-2-10）~（4-2-13）式解出的傅里叶系数随着 p 的增加其精度也提高，但是运算量

增大。在文献[1]给出的建议为：求σ_n、τ_n时，p取 75；求γ_n、δ_n时，由于位移、时间函数比较光滑，p取 35。

在特解公式（4-2-4）、（4-2-5）中，未知参数$O_n(x)$、$P_n(x)$、$O_n^{'}(x)$、$P_n^{'}(x)$可由以下公式求解[1]：

$$O_n(x)=(\kappa_n\cos h\beta_n x+\delta_n\sin h\beta_n x)\sin\alpha_n x+(\mu_n\sin h\beta_n x+\nu_n\cos h\beta_n x)\cos\alpha_n x \quad (4\text{-}2\text{-}14)$$

$$P_n(x)=(\kappa_n\sin h\beta_n x+\delta_n\cos h\beta_n x\cos\alpha_n x-(\mu_n\cos h\beta_n x+\nu_n\sin h\beta_n x)\sin\alpha_n x \quad (4\text{-}2\text{-}15)$$

$$\begin{aligned}O_n^{'}(x)=&(\frac{\tau_n}{Ef_r}\sinh\beta_n x+(\delta_n\beta_n-\gamma_n\alpha_n)\cosh\beta_n x)\sin\alpha_n x\\&+(\frac{\sigma_n}{Ef_r}\cosh\beta_n x+(\gamma_n\beta_n+\delta_n\alpha_n)\sinh\beta_n x)\cos\alpha_n x\end{aligned} \quad (4\text{-}2\text{-}16)$$

$$\begin{aligned}P_n^{'}(x)=&(\frac{\tau_n}{Ef_r}\cosh\beta_n x+(\delta_n\beta_n-\gamma_n\alpha_n)\sinh\beta_n x)\cos\alpha_n x\\&+(\frac{\sigma_n}{Ef_r}\sinh\beta_n x+(\gamma_n\beta_n+\delta_n\alpha_n)\cosh\beta_n x)\sin\alpha_n x\end{aligned} \quad (4\text{-}2\text{-}17)$$

则公式（4-2-14）~（4-2-17）中的未知参数可由以下公式求解：

$$\alpha_n=\frac{n\omega}{a\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1+(\frac{c}{n\omega})^2}} \quad (4\text{-}2\text{-}18)$$

$$\beta_n=\frac{n\omega}{a\sqrt{2}}\sqrt{-1+\sqrt{1+(\frac{c}{n\omega})^2}} \quad (4\text{-}2\text{-}19)$$

$$\kappa_n=\frac{\sigma_n\alpha_n+\tau_n\beta_n}{Ef_r(\alpha_n^2+\beta_n^2)} \quad (4\text{-}2\text{-}20)$$

$$\mu_n=\frac{\sigma_n\beta_n-\tau_n\alpha_n}{Ef_r(\alpha_n^2+\beta_n^2)} \quad (4\text{-}2\text{-}21)$$

式中$\omega=2\pi/\mathrm{T}$，T 为一个冲程的周期。

至此，对于单级杆的抽油系统的悬点示功图与泵功图的转化已经完成，但是，一般抽油机为多级杆，若想求解多级油杆末端的示功图，通过力的连续性原理，可以得到函数参数满足如下关系[1]：

$$
\begin{aligned}
{}_{j+1}\sigma_0 &= {}_{j}\sigma_0 \\
{}_{j+1}\sigma_n &= Ef_{rj}O_n^{'}(x_j) \\
{}_{j+1}\tau_n &= Ef_{rj}P_n^{'}(x_j) \\
{}_{j+1}\gamma_0 &= {}_{j}\gamma_0 + \frac{{}_{j}\sigma_0 x_j}{Ef_{rj}} \\
{}_{j+1}\gamma_n &= O_n(x_j) \\
{}_{j+1}\delta_n &= P_n(x_j)
\end{aligned}
\qquad (4\text{-}2\text{-}22)
$$

以此为条件可以计算 $j+1$级油杆末端的$u(x_{j+1},t)$和$F(x_{j+1},t)$，亦即与理论示功图相近的示功图。

4.2.2 Gibbs 模型在计算泵功图中的应用

4.2.2.1 Gibbs 模型理论应用

由 4.2.1 节 Gibbs 模型知，一维粘滞波动模型方程式（4-2-1）在满足边界条件下的特解是式（4-2-4）、（4-2-5）。其特解在计算泵功图中即为泵功图的位移、荷载函数。故计算泵功图的过程亦即求解 Gibbs 模型特解的过程。而所满足的边界条件对应为悬点的位移函数和荷载函数。由此可以利用 Gibbs 模型和给定悬点示功图计算得到泵功图。

4.2.2.2 利用 Gibbs 模型求解步骤

利用 Gibbs 求解泵功图的过程可分为：对数据的预处理、求解边界条件、连续性条件、求解算法几个过程。

1、数据预处理

附件 1、2 中皆给出了悬点功图的位移采样值，以及与之对应的悬点功图荷载采样值，而观测到的悬点示功图描述的是悬点静荷载$L(t)$与位移之间的关系，在 Gibbs 模型中需要求解其动荷载$D(t)$，根据公式

$$D(t) = L(t) - W_r \qquad (4\text{-}2\text{-}23)$$

其中W_r表示油杆在液体中重量，油杆在一个冲程中其在油管中的长度是变化的，相应的其W_r也是变化的，但是变化的范围相对于油管的长度之比很小，计算公式如下：

$$W_r = f_r L_t(\rho - \rho_1) \qquad (4\text{-}2\text{-}24)$$

$$\rho_1 = \rho_0(1 - f_w) + \rho_w f_w \qquad (4\text{-}2\text{-}25)$$

其中，公式中各系数含义为：

f_r 油杆横截面积

L_t t时刻油杆在油管内的长度

ρ 分别表示油杆密度

ρ_1 表示油水混合的密度

ρ_w 表示水的密度

f_w 原油含水量

2、 上下边界条件

模型的上下边界条件是由抽油机悬点的运动规律来确定的，若用$U(t)$表示悬点的位移函数，则模型的上边界条件为：

$$u(x,t)\big|_{x=0} = U(t) \tag{4-2-26}$$

模型的下边界条件是由井下泵的工作状况决定的。若设柱塞的荷载函数为$D(t)$，则有：

$$F(x,t)\big|_{x=L} = D(t) \tag{4-2-27}$$

其中，L表示抽油杆柱总长度。

3、确定初始条件

假设抽油机启动前，抽油杆从驴头上自由悬挂于充满液体的油管中，并且悬点从下死点开始向上运动，则模型的初始条件为：

$$\begin{cases} u(x,t)\big|_{(0\le x\le L,\ t=0)} = 0 \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{(0\le x\le L, t=0)} = 0 \end{cases} \tag{4-2-28}$$

4、连续性条件

一般抽油机的油杆是多级的，两杆连接处的荷载与位移连续条件根据 J.F.Lea 提出的过渡处理条件：上级抽油杆底端与下级抽油杆顶端的荷载、位移都是始终相等的，有如下公式成立：

$$\begin{aligned} F(x_{j+1},t) &= F(x_j,t) \\ u(x_{j+1},t) &= u(x_j,t) \end{aligned} \tag{4-2-29}$$

式中，$u(x_j,t)$、$F(x_j,t)$分别表示t时刻第j级抽油杆底端的位移与荷载；

$u(x_{j+1},t)$、$F(x_{j+1},t)$分别表示t时刻第$j+1$级抽油杆底端的位移与载荷。

结合 Gibbs 模型及以上条件，可以总结得到抽油杆波动数学模型如下：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - c\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} \\ u(x,t)\big|_{x=0} = U(t) \\ F(x,t)\big|_{x=\mathrm{L}} = D(t) \\ u(x,t)\big|_{(t=0)} = 0 \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{(t=0)} = 0 \\ F(x_{j+1},t) = F(x_j,t) \\ u(x_{j+1},t) = u(x_j,t) \end{cases} \qquad (4\text{-}2\text{-}30)$$

5、求解算法：

（1）根据公式（4-2-10）~（4-2-13）,结合初始条件，首先计算第 j 级油杆满足边界条件的傅里叶系数 ${}_j\sigma_n$、${}_j\tau_n$、${}_j\gamma_n$、${}_j\delta_n$；

（2）根据公式计算第 j 级油杆阻尼系数 c_j，本文选择利用摩擦功确立阻尼系数的方法[3]，其公式为：

$$c_j = \frac{2\pi\mu}{\rho f_r}\left\{\frac{1}{\ln m} + \frac{4}{B_2}(B_1+1)\left[B_1 + \frac{2}{\dfrac{\omega r}{a\sin\dfrac{\omega r}{a}} + \cos\dfrac{\omega r}{a}}\right]\right\} \qquad (4\text{-}2\text{-}31)$$

f_r　抽油杆截面积

μ　原油动力粘度

ω　曲柄角速度

a　应力传播的速度

r　曲柄长度

m　直径系数

D_t　油管内径

D_r　抽油杆直径

式中

$$B_1 = \frac{m^2-1}{2\ln m} - 1 \qquad (4\text{-}2\text{-}32)$$

$$B_2 = m^4 - 1 - \frac{(m^2-1)^2}{\ln m} \quad (4\text{-}2\text{-}33)$$

$$m = D_r / D_t \quad (4\text{-}2\text{-}34)$$

（3） 计算特殊函数 ${}_j\alpha_n$、${}_j\beta_n$；

（4） 计算函数参数 ${}_j\kappa_n$、${}_j\mu_n$；

（5） 计算位移、荷载参数 ${}_jO_n$、${}_jP_n$、${}_jO_n^{'}$、${}_jP_n^{'}$；

（6）判断是否为最后一根抽油杆，如果是，计算得到的位移、荷载关系为泵示功图，计算结束。否则，求杆与杆之间新的过渡条件，计算下一根抽油杆位移—荷载函数，直到计算得到泵示功图。

综上计算步骤，可以归纳为下图所示流程图：

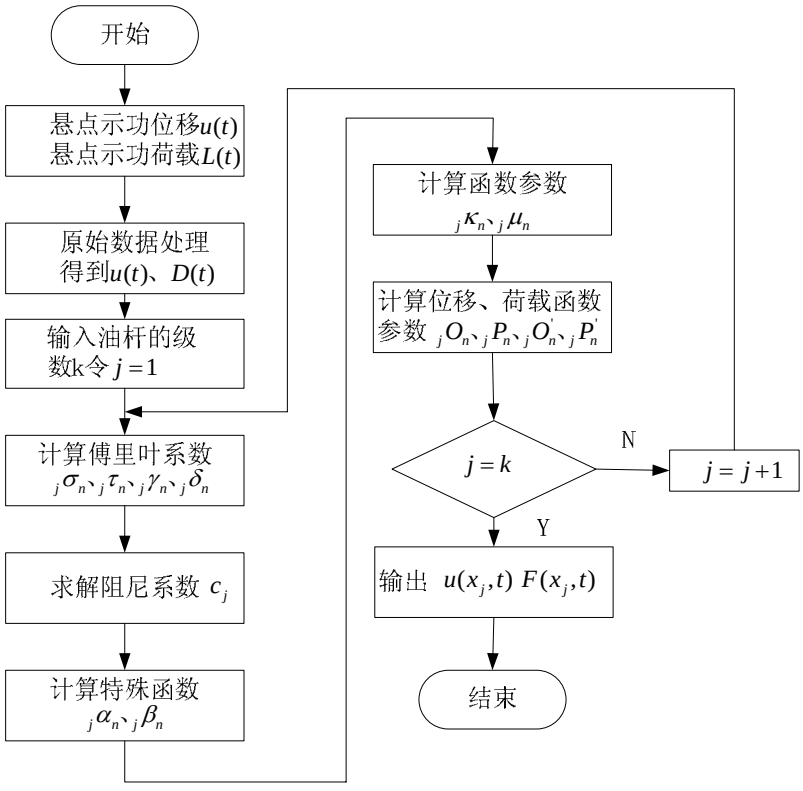


图 4-2-1　Gibbs 模型求解算法流程图

4.2.3 模型求解结果及分析

根据 4.2.2.2 节中 Gibbs 模型求解流程图，编写 MATLAB 程序进行仿真（具体程序详电子版压缩包），采用附件中提供的数据进行仿真实验。

4.2.3.1 对附件 1 中 1#抽油井求解泵功图

仿真所用数据来源于附件 1 中悬点功图位移和荷载，其余参数设置如表 4-2-1 所示：

表 4-2-1 附件 1 中单级杆油井参数设置

泵径(mm)	一级杆杆长(m)	泵深(m)	冲程(m)	冲次(1/min)	一级杆杆径(mm)	悬点功图位移(m)	悬点功图荷载(kn)
70	792.5	793	3.2	7.6	22	144 个数据	144 个数据

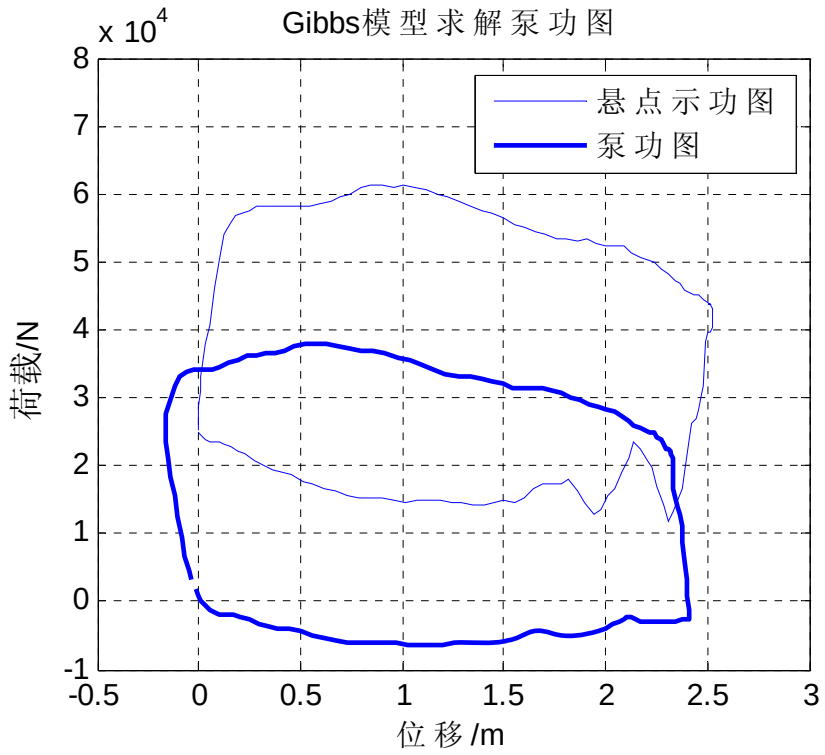


图 4-2-2 Gibbs 模型求解单级杆泵功图

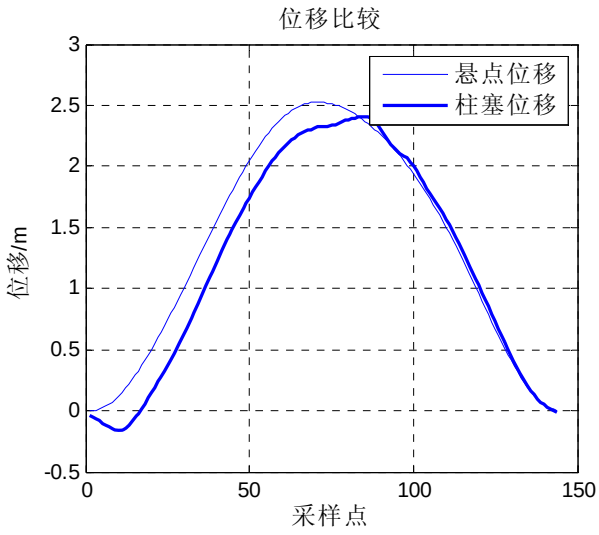


图 4-2-3 示功图与泵功图位移比较

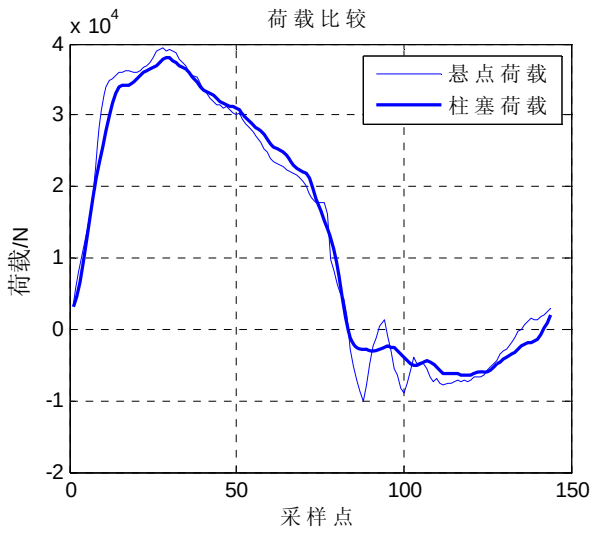


图 4-2-4 示功图与泵功图荷载比较

仿真结果定性分析：
（1） 由 MATLAB 仿真得到的单级抽油杆的泵功图其形状上与悬点示功图相近，接近于平行四边形。
（2） 对于泵功图而言，其上边和下边比较光滑，振幅小于悬点的示功图，荷载明显比示功图平稳，这是因为泵功图在一定程度上消除了油杆和柱塞震动的影响，符合实际情况。
（3） 对于悬点和柱塞位移图来说，由于弹性形变的存在，柱塞的运动要滞后于悬点的运动，这与事实是相符的。
（4） 由图（4-2-3）不难看出柱塞的冲程要小于悬点的冲程，由于附件 1 中提供的数据为单杆抽油系统，油杆短，冲程差比较小，不是很明显，理论上是正确的。
（5） 泵功图左边向左上方倾斜，参照文献[6],可能存在固定凡尔磨损问题。
综合以上定性分析，Gibbs 模型仿真得出的泵功图是符合实际情况，比较准确。

4.2.3.2 对附件 2 中 7#号抽油井求解泵功

仿真所用数据来源于附件 1 中悬点功图位移和荷载，其余参数设置如表 4-2-2 所示。通过 MATLAB 编写吉布斯模型仿真程序，载入上图所示数据得到的悬点示功图和泵功图如图（4-2-5）所示：

图 4-2-2　附件 2 中 7#井三级抽油杆油井参数设置

泵径(mm)	一级杆杆长(m)	二级杆杆长(m)	三级杆杆长(m)	泵深(m)	冲程(m)
44	523.61	664.32	618.35	1819.6	4.2
冲次(1/min)	一级杆杆径(mm)	二级杆杆径(mm)	三级杆杆径(mm)	悬点功图位移(m)	悬点功图荷载(kn)
4	25	22	19	144 个数据	144 个数据

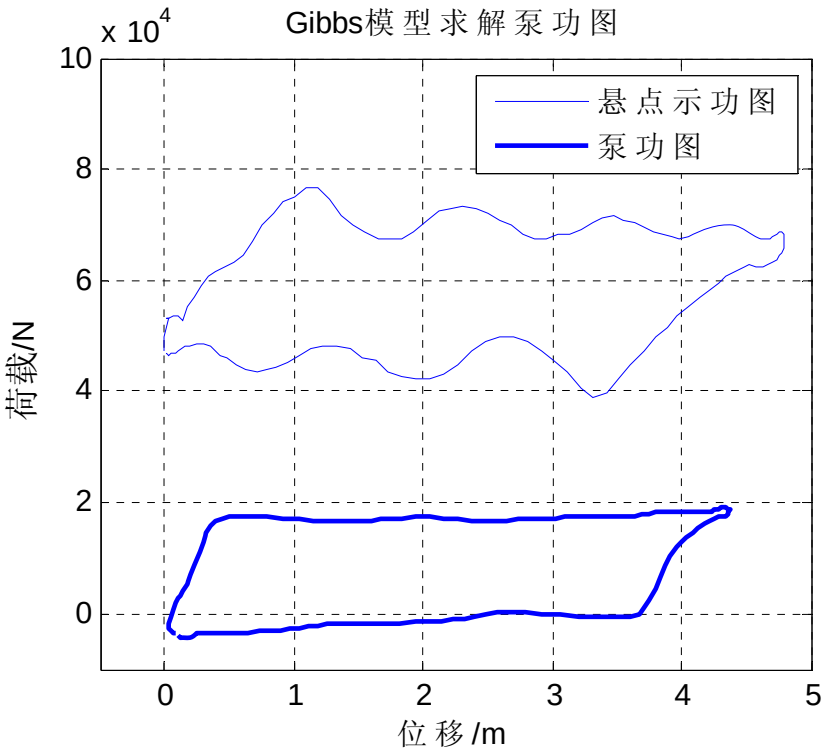


图 4-2-5　Gibbs 模型求解三级油杆泵功图

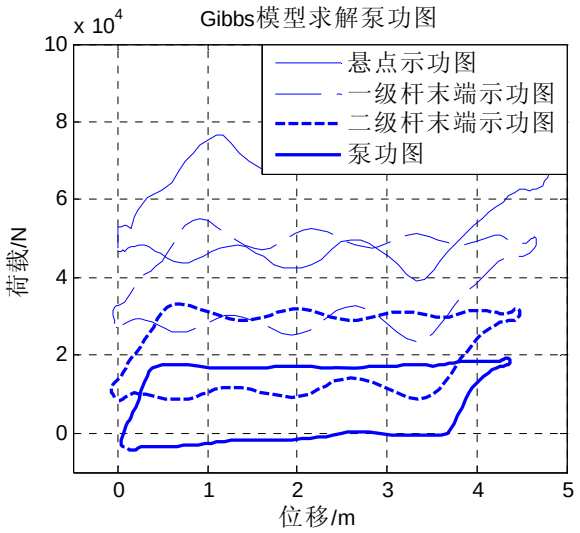


图 4-2-6　Gibbs 模型求解三级油杆末端示功图

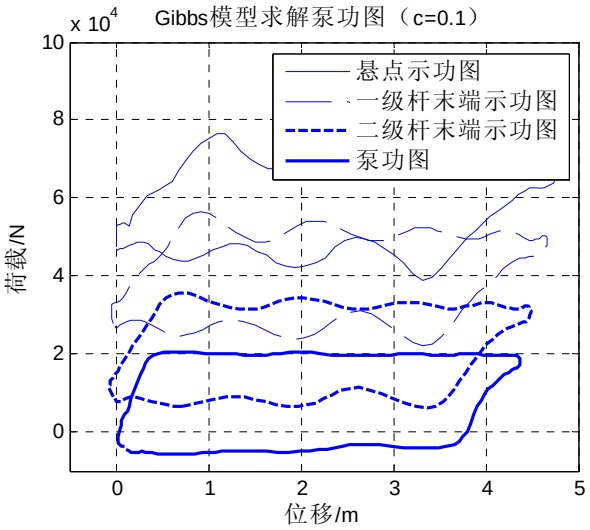


图 4-2-7　固定阻尼系数三级油杆末端示功图

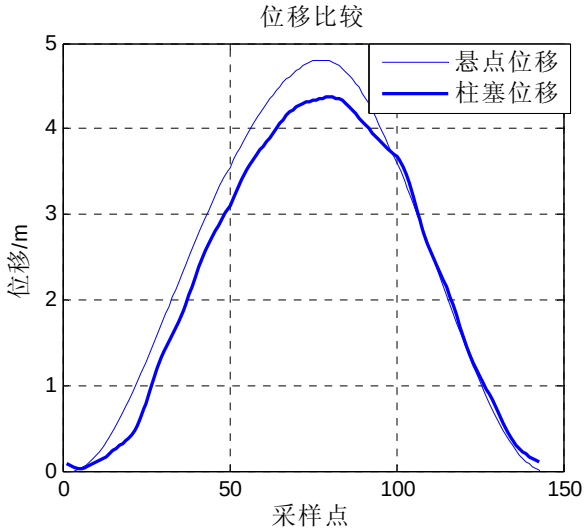


图 4-2-8　示功图与泵功图位移比较

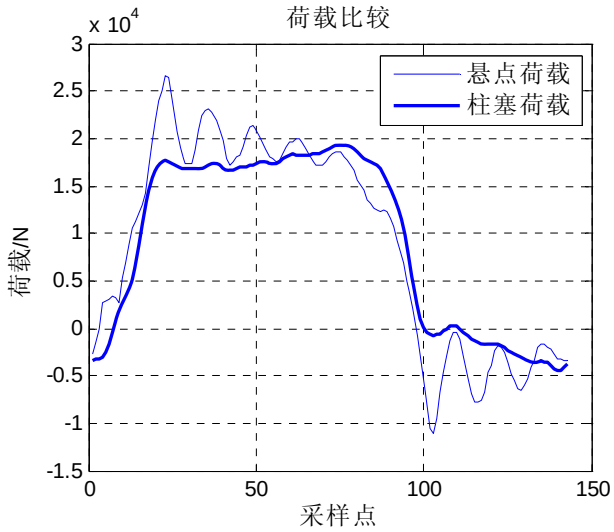


图 4-2-9　示功图与泵功图荷载比较

仿真结果定性分析：

（1） 由 MATLAB 仿真得到的三级抽油杆的泵功图其形状上接近于平行四边形，右边存在向左凹的情况。

（2） 对于仿真出的泵功图（图 4-2-5）而言，相比于示功图水平段图形，其图形的上边和下边很光滑，几乎没有波动，荷载明显比示功图平稳；由图（4-2-6）可以看出从随着抽油杆级数的增加，泵功图荷载的波动越来越小，这表明了泵功图在一定程度上消除了油杆和柱塞震动的影响，符合理论实际。

（3） 对于悬点和柱塞位移图来说，由于弹性形变和震动的存在，柱塞的运动要滞后于悬点的运动，这与事实是相符的。

（4） 由图（4-2-6）不难看出柱塞的冲程要小于悬点的冲程。

（5） 由图（4-2-7）得出阻尼系数对于 Gibbs 模型求解泵功图是由影响的，在泵功图的形状上、上下边的平滑程度上基本相同，但是，在泵功图围成的面积上，后者固定阻尼系数的较大。基于阻尼系数对计算泵功图的影响及解决措施将在问题四中做进一步的探讨。

综合以上定性分析，Gibbs 模型仿真得出的泵功图是符合实际情况的，比较准确。

4.3 问题三 估计产油量

4.3.1 模型 1：“面积法”估计油井产量

4.3.1.1 模型分析

抽油机在运动过程中，上下冲程由于抽油杆柱振动、摩擦等动载因素的影响，绘出的功图就有动载曲线。但实测静载线与动载阻尼曲线加以对比时，针对深井泵的实际做功大小而言，动载阻尼曲线对做功没有影响。为了避开动载线的变化影响，本文用示功图的静载线来反映活塞在井下的工况。采用人工拉线方法处理功图，将上下静载线与有效冲程围成的图形定义为理论功图。由于示功图纵轴为载荷量，横轴为位移量，那么示功图的所围成的面积其实就是油泵在一个周期内对外做的功，因此，从闭合曲线的面积大小就可以直观的看出油泵做功的多少。如果忽略抽油杆震动、摩擦等因素，泵所做的功都转化为有用功，那么实测泵功图的面积与理论功图的面积之比就等于油井日产液量与理论产量的比。理论产量可根据已知数据求得，只需要求得泵功图“面积”与理论功图“面积”之比就可估算油井日产液量，即：

$$实际日产液量=\frac{泵功图“面积”}{理论示功图“面积”}\times 理论产液量$$

4.3.1.2 模型求解

“面积法”求解模型的思路如下：

1、计算静载理论示功图面积

当悬点静载时，其承受载荷来自于抽油杆在油液中的重力。下静载线高度 $H_{下}$ 为：

$$H_{下}=\sum_{i=1}^{M}W_i$$

其中，W_i 为第 i 根抽油棒在油液中的重力。

由于有效冲程相对于抽油杆长非常小，每次上升过程中排出的混合液与泵中的混合液相比非常少，所以可以近似认为一个冲程中柱塞之上的油液重量不发生改变。当悬点处于上静载位置时，其承受的载荷来自抽油杆重力与泵中混合液的重力之和。可以得到上静载线高度：

$$H_{上}=\sum_{i=1}^{M}W_i+W_{液}$$

$$W_{液}=\frac{\pi D^2}{4}L\rho_1 g$$

其中，L 为抽油杆总长度，ρ_1 为混合液密度，g 为重力加速度。D 为泵径。

设 $S_{有效}$ 为有效冲程，根据上文中得到的各项参数可以求得静载理论示功图面积：

$$A_p=(H_{上}-H_{下})\ S_{有效}=W_{液}S_{有效}=\frac{\pi D^2}{4}L\rho_1 g S_{有效}$$

2、计算理论产量

理论产量是理想状况下油井每天生产油水混合物的质量，可以根据所给各项参数求得。

$$Q_p=1440\frac{\pi D^2}{4}S_{有效}N\rho_1$$

其中，N 为抽油机的冲次。

3、计算泵功图“面积”

泵功图可以从悬点示功图推算得出，这在问题二中已经得到解决。这里的主要工作是求泵功图的面积。

由于问题二中求得的泵功图中各离散点是等时间间隔条件下采样的，而在位移上并不等间隔。由于传统的求面积方法都是基于等间隔分割，因此无法解决该问题。接下来，提

出一种新的求非等间隔图形面积的“最近点分割”算法。

“最近点分割算法”思路：

将图形中最左端的点设为点 1，向右寻找下个距离该点最近的点，记为点 2，计算过两点范围内图形的面积。再以点 2 为起始点向右找到下一个距离最近的点，同样计算两点范围图形的面积，以此类推直到位移最大点处终止，最后将各个面积求和得到总面积。

“最近点分割算法”具体步骤：

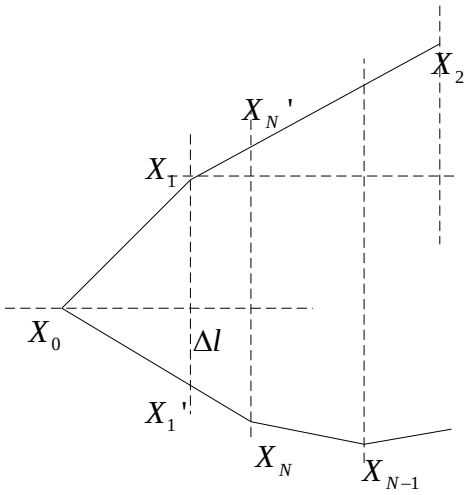


图 4-3-1 最近点分割法模型

1）从最左端点开始，以采样时间为顺序依次对所有采样点编号为 $X_0, X_1, X_2, X_3 \ldots X_N$。记第 m 个点坐标为 $X_m(a_m, b_m)$，各点的坐标是已知的。

2）计算 X_1、X_N 到 X_0 的水平距离，这里假设 $|a_1 - a_0| < |a_n - a_0|$，那么 X_1 就是距离 X_0 最近的点，过 X_1 做垂线，与线段 $X_0\ X_N$ 交点记为 X_1'，

3）计算三角形 $X_1X_0X_1'$ 面积：

$$S_{\Delta X_0X_1X_1'} = \frac{1}{2}|a_1 - a_0|(|b_1 - b_0| + \Delta l)$$

由等比例关系

$$\Delta l = \frac{|a_1 - a_0|}{|a_n - a_0|}|b_n - b_0|$$

代入面积公式即可求得 $S_{\Delta X_0X_1X_1'}$。

4）以 X_1 为起始点，用步骤 2 的方法找到 X_2 和 X_N 中距离最近的点，这里假设为 X_N。

5）计算梯形 $X_1X_N'X_NX_1'$ 的面积，算法与步骤三同理。

6）以 X_N 为起始点继续计算。直到计算到点 X_M 时 $a_m - a_{m-1} > 0$，可以判断 X_M 为最大值点，停止计算。

7）将所有面积求和，得到曲线的总面积。

最近点分割算法克服了传统算法中必须等间隔采样的局限，不仅可用于泵功图面积的求解，对任意非等间隔采样图形求面积的问题都适用。

4、计算日产液量

泵功图的面积与理论功图的面积之比等于油井日产液量与理论产量的比，那么可以得

到日产液量的计算公式：

$$Q=\frac{Q_p}{A_p}A=\frac{1440\dfrac{\pi D^2}{4}Sn\rho}{\dfrac{\pi D^2}{4}L\rho gS}=\frac{1440n}{gL}A$$

其中，Q为日产液量，Q_p为理论产液量，A为泵功图面积，A_p为静载理论示功图面积。从上式可以看出，日产液量与泵功图面积和冲次成正比，与抽油杆长度成反比。

4.3.2 模型 2：有效冲程估算油井产量

用有效冲程估算油井产量的关键环节之一是准确计算柱塞有效冲程。本文将对泵功图进行定量分析，确定泵的有效冲程，即柱塞的有效冲程，进而通过抽油泵排量公式计算抽油泵日产量，然后折算出井口产液量。

4.3.2.1 泵功图模型再分析

从泵示功图中我们可以分析得到柱塞冲程。通常，柱塞冲程就是柱塞的有效冲程，然而对于某些特殊的泵工况，柱塞有效冲程$S_{有效}$主要根据泵示功图中阀开闭点的位置来确定。

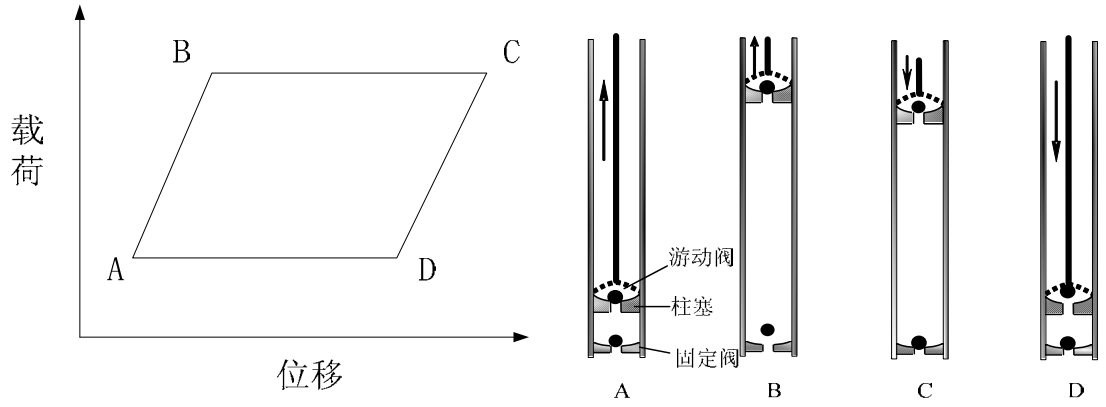


图 4-3-2　理论示功图与各点阀门状态

图 4-3-2 给出了油泵正常工作下的示功图。A 点为游动阀关闭点，B 点为固定阀开启点，C 点为固定阀关闭点，D 点为游动阀开启点，ABC 为上冲程，CDA 为下冲程。根据泵的工作过程和泵柱塞上载荷的大小及阀开闭点的位置，可以将泵示功图分为四个阶段，如图 4-3-2 所示。

AB 柱塞加载段，从游动阀关闭到固定阀开启，柱塞上行，柱塞载荷在短时间内迅速增大，但相对于泵筒的位移变化量较小；

BC 高载荷段又称为泵的吸入过程，从固定阀开启到固定阀关闭，柱塞上行，柱塞载荷维持在一个较高的水平，同时相对于泵筒的位移变化量较大；

CD 柱塞卸载段，从固定阀关闭到游动阀开启，柱塞下行，柱塞载荷在短时间内迅速减小，但相对于泵筒的位移变化量较小；

DA 低载荷段又称为泵排出过程，从游动阀开启到游动阀关闭，柱塞下行，柱塞载荷维持在一个较低的水平，同时相对于泵筒的位移变化量较大。

通过分析可知，泵示功图曲线曲率变化最大点即为阀开闭点；固定阀的开闭点位于泵示功图上冲程的高载荷段，游动阀的开闭点位于泵示功图下冲程的低载荷段；柱塞有效冲程为固定阀开、闭点位移差与游动阀阀开、闭点位移差的绝对值中较小的一个。

本文结合泵工况，通过在示功图的高、低载荷段各求出 2 个曲率变化最大的点以确定阀开闭点，进而计算柱塞有效冲程。

4.3.2.2 曲率模型的建立

取连续曲线上任意一点，将其曲率 K 定义为夹角 α 对弧度 S 的变化率，并等于曲率半径 R 的倒数，如下所示：

$$K=\frac{d\alpha}{dS}=\frac{1}{R}$$

由于泵示功图曲线由一系列离散点组成，其解析函数无法得到，故无法由上式直接求得泵示功图上任一点的曲率。

本文将相邻三点圆弧近似为连续曲线来求泵示功图各离散点的曲率 K，即利用泵示功图上任意离散点 $X_i(x_i,y_i)$ 及其前一离散点 $X_{i-1}(x_{i-1},y_{i-1})$ 和后一离散点 $X_{i+1}(x_{i+1},y_{i+1})$ 三点之间的几何关系计算出点 $X_i(x_i,y_i)$ 的曲率。如图 4-3-3 所示。

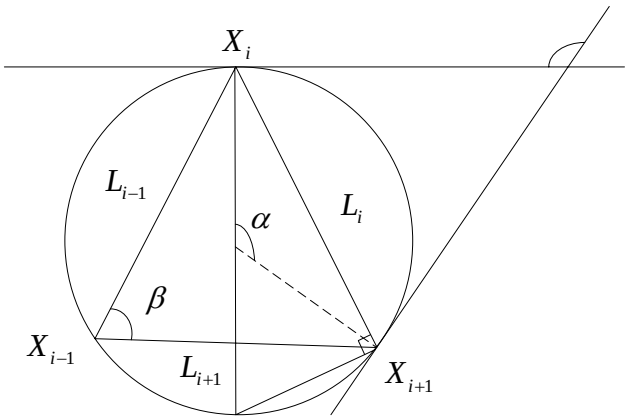


图 4-3-3 离散点曲率求解模型

由三角几何关系容易得出：

$$\sin\beta=\frac{L_i}{2R}$$

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}L_{i+1}L_{i-1}\sin\beta \qquad (4\text{-}3\text{-}1)$$

将过 X_i 点的曲率 $K_i=\frac{1}{R}$ 进行整理，可得到：

$$K_i=\frac{L_i}{R}\times\frac{2}{L_i}\times\frac{L_{i-1}L_{i+1}}{L_{i-1}L_{i+1}} \qquad (4\text{-}3\text{-}2)$$

式中

R 点 X_i 到点 X_{i+1} 圆弧段的曲率半径， m；

α 点 X_i 到点 X_{i+1} 圆弧段的夹角， rad

L_{i-1} 点 X_{i-1} 和点 X_i 之间的线段长度， m

L_i 点 X_i 和点 X_{i+1} 之间的线段长度， m

L_{i+1} 点 X_{i+1} 和点 X_{i-1} 之间的线段长度， m

S_Δ 任意三角形 $\Delta X_{i-1}X_iX_{i+1}$ 的面积， m^2

将式(4-3-1)代入式(4-3-2)可得：

$$K_i = \frac{4L_{i-1}L_{i+1}\sin\beta}{L_{i-1}L_iL_{i+1}} = \frac{4S_\Delta}{L_{i-1}L_iL_{i+1}} \tag{4-3-3}$$

式(4-3-3)即为求某一离散点曲率的数学模型，其中任意三角形的面积 S_Δ 由海伦公式求得：

$$\begin{cases} S_\Delta = \sqrt{P(P-L_{i-1})(P-L_i)(P-L_{i+1})} \\ P = \dfrac{L_{i-1}+L_i+L_{i+1}}{2} \\ L_{i-1} = \sqrt{(y_i-y_{i-1})^2+(x_i-x_{i-1})^2} \\ L_i = \sqrt{(y_{i+1}-y_i)^2+(x_{i+1}-x_i)^2} \\ L_{i+1} = \sqrt{(y_{i-1}-y_{i+1})^2+(x_{i-1}-x_{i+1})^2} \end{cases} \tag{4-3-4}$$

4.3.2.3 柱塞有效冲程的确定方法

柱塞有效冲程 $S_{有效}$ 主要根据泵示功图中阀开闭点的位置来确定。曲率变化量的值越大，说明曲线弯曲程度越大。本文将结合泵工况，通过在泵功图的高、低载荷段各求出 2 个曲率变化最大的点来确定阀开闭点。由于采用数值计算方法得到的泵示功图封闭曲线中含有大量高频部分，故在实际计算中采用五点平均法消除或降低其引起的曲率变动，来提高计算曲率的精度。计算柱塞有效冲程的具体步骤如下：

1、用五点平均法求每一点的坐标平均值，即：

$$\overline{X}_i = \frac{x_{i-2}+x_{i-1}+x_i+x_{i+1}+x_{i+2}}{5}$$

$$\overline{Y}_i = \frac{y_{i-2}+y_{i-1}+y_i+y_{i+1}+y_{i+2}}{5}$$

2、分别求出泵功图离散点横坐标的最大值 $X_{\max}$ 和最小值 $X_{\min}$，纵坐标的最大值 $Y_{\max}$ 和最小值 $Y_{\min}$；

3、将离散点归一化，归一化公式如下：

$$\Delta X_i = \frac{\overline{X}_i - X_{\min}}{X_{\max} - X_{\min}}$$

$$\Delta Y_i = \frac{\overline{Y}_i - Y_{\min}}{Y_{\max} - Y_{\min}}$$

4、将归一化的泵功图沿柱塞冲程展开，泵功图由闭合曲线变成单值曲线；

5、根据式(4-3-3)和(4-3-4)，计算各离散点的曲率值K_i；

6、根据$\delta_i = |K_{i+1} - K_i|$，求任一离散点的曲率$K_i$及其后一离散点的曲率$K_{i+1}$的曲率变化量$\delta_i$；

7、为了提高算法的精度，根据$\delta_i' = \frac{\delta_{i-2} + \delta_{i-1} + \delta_i + \delta_{i+1} + \delta_{i+2}}{5}$，采用五点法求曲率变化量的平均值；

8、引入归一化载荷的平均载荷dfa，假设$dfu = dfa + 0.1$，$dfd = dfa - 0.1$，则：

(1)在上冲程中，在归一化载荷大于dfu的范围内查找固定阀开闭点。在归一化位移[0.5，1]之间查找曲率变化量最大点$B(X_{mb}, Y_{mb})$，在[0，0.5]之间查找曲率变化量最大点$A(X_{ma}, Y_{ma})$，且$X_{ma} \neq X_{mb}$，则比例位移$S_{Rg} = |X_{mb} - X_{ma}|$；

(2)在下冲程中，在归一化载荷小于dfd范围中查找游动阀开闭点。在归一化位移[1，1.5]中查找曲率变化量最大点$C(X_{mc}, Y_{mc})$，在[1.5，2]之间查找曲率变化量最大点$D(X_{md}, Y_{md})$，且$X_{mc} \neq X_{md}$，则比例位移$S_{Ry} = |X_{md} - X_{mc}|$；

9、比较S_{Rg}和S_{Ry}，取较小者为比例有效冲程S_{Rpe}，然后乘以归一化位移($X_{\max} - X_{\min}$)，便可得到实际的有效冲程$S_{有效}$。

4.3.2.4 抽油机井产液量计算

将油井一天的产液量记作Q，其计算公式为：

$$Q = 1440 S_{有效} \mathrm{N} \frac{\pi D^2}{4} \rho' \qquad (4\text{-}3\text{-}5)$$

由于上式中体积为井下体积，那么ρ'应为井下混合液密度，由于附件中未给出，现给出简要的估算过程。

首先做出几个假设：

忽略地下混合液中混入气体的质量，即认为混合液在井下和地面质量是相等的；水的密度不发生变化。

附件中提供了地面原油密度设为ρ_o、原油体积系数设为ε以及含水率设为f_w。根据假设，忽略气体的重量，那么原油密度系数为$1/\varepsilon$，地下原油密度$\rho_{uo} = \rho_o/\varepsilon$。最终求得井下

混合液密度：

$$\rho' = (1-f_w)\rho_{uo} + f_w\rho_{水} = \frac{1\text{-}f_w}{\varepsilon}\rho_o + f_w\rho_{水} \qquad (4\text{-}3\text{-}6)$$

代入（4-3-5）就得到了油井一天的产液量。

4.3.3 模型仿真与分析

在 MATLAB 中实现两种算法。使用附件 1、2 中的数据分别估算两口井的产油量，得到如下结果。

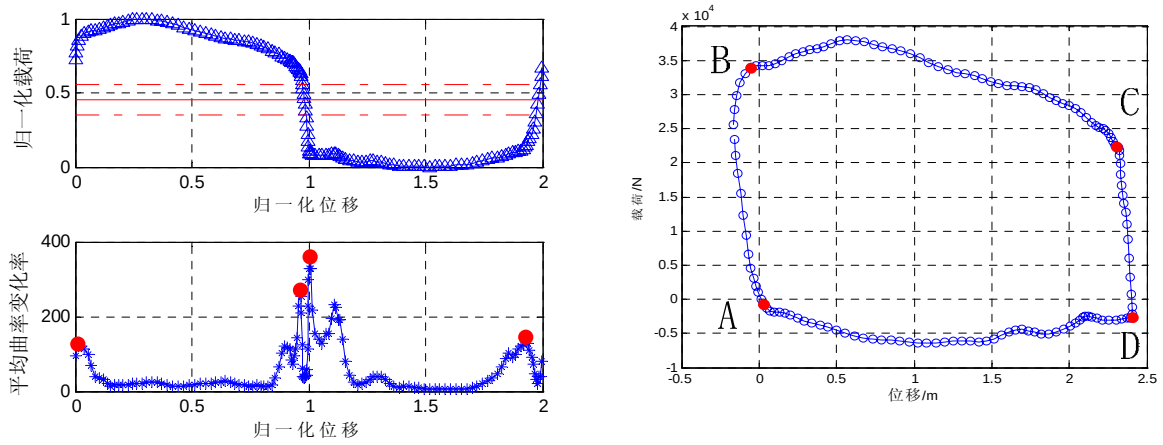
模型 1 求解结果：

表 4-3-1 面积法求油井日产量

井号	泵功图“面积”	日产液量（吨/天）
7#（附件 1）	89706	126.42
1#（附件 2）	67450	21.94

模型 2 求解结果：

1、7#井（附件 1）求解结果



(a)曲率变化率曲线　　(b)泵功图中阀门开闭点位置

图 4-3-4 7#井阀开闭点位置及有效冲程

图 4-3-4（a）上图为泵功图归一化展开图，图中实心线为平均载荷线。下图为平均曲率变化量与比例位移的关系曲线，从中可以看出良好的对应关系，证明了算法的正确性。图 4-3-5（b）中标出了阀门开闭点的位置，各点的状态和坐标在表 4-3-2 中列出。

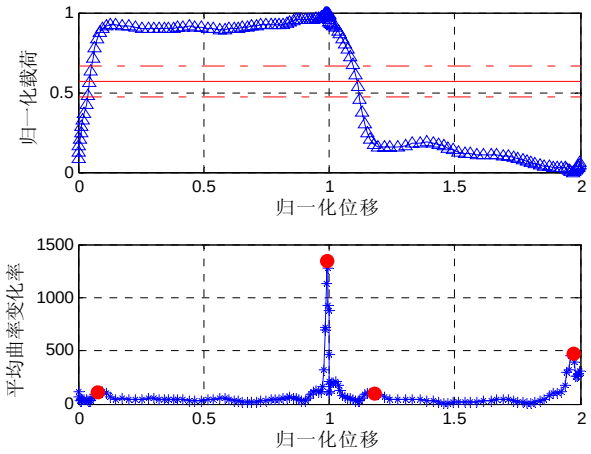
表 4-3-2 阀门工作状态及坐标

	工作状态	坐标
A	游阀关闭	（0.0311，-710）
B	固定阀打开	（-0.0571,33931）
C	固定阀关闭	（2.3041,22345）
D	游阀打开	（2.4063，-2591）

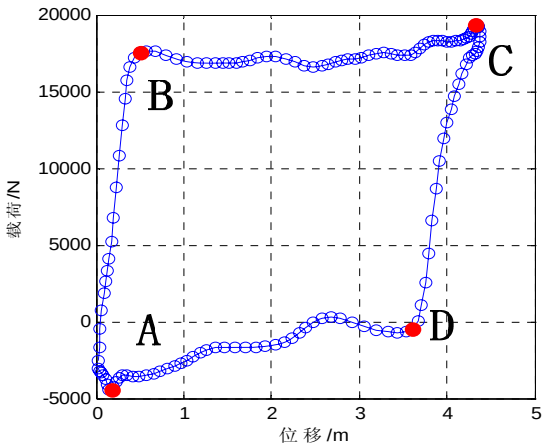
从表中可以得出，固定阀开闭点之间的位移差 S_{BC}=2.3612m，游动阀开闭点之间的位移差 S_{AD}=2.3752m。根据“取小”原则，柱塞有效冲程 $S_{有效}$=2.3612m。最终计算得出产量为 89.34

吨。

2、1#井（附件 2）求解结果



(a)曲率变化率曲线



(b)泵功图中阀门开闭点位置

图 4-3-5　1#井阀开闭点位置及有效冲程

图 4-3-5（a）上图为泵功图归一化展开图，下图为平均曲率变化量与比例位移的关系曲线，图 4-3-5（b）中标出了阀门开闭点的位置，各点的状态和坐标在表 4-3-3 中列出。

表 4-3-3 阀门工作状态及坐标

	工作状态	坐标
A	游阀关闭	（0.1729，-4456）
B	固定阀打开	（0.4996,17548）
C	固定阀关闭	（4.3307,19327）
D	游阀打开	（3．6104，-454）

从表中可以得出，固定阀开闭点之间的位移差 S_{BC}=4.1578m，游动阀开闭点之间的位移差 S_{AD}=3.4375m。根据“取小”原则，柱塞有效冲程 $S_{有效}$=3.4375m。最终计算得出产量为 20.11 吨。

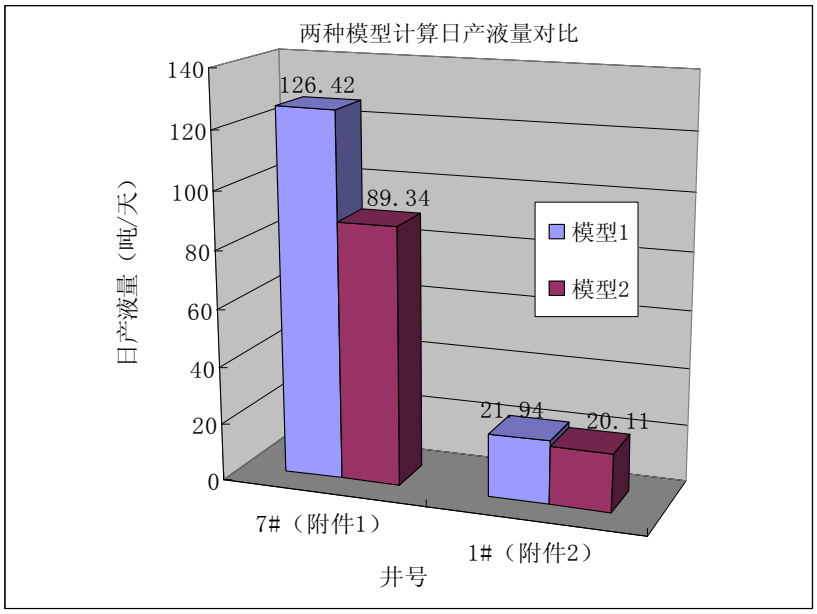


图 4-3-6 两种模型计算日产液量对比

结果对比分析：

图 4-3-6 为两模型计算得出的日产液量对比图，从图中可以看出，对于 1#井的估计两种方法的结果吻合较好，偏差不超过 8.4%，对于 7#井的估计二者偏差较大，原因是泵工作不正常造成的，问题二中已经对该问题作出分析。另外，从对比图中可以看出面积法求产结果较有效冲程法求产结果总是偏高，这是由于面积法求产比较粗略，忽略了很多应该考虑的损耗所致。由于题目没有给出实际产量无法验证两种估计方法的准确性，因此两种方法的正确性和优劣暂时无法确定。

4.4 问题四 深入研究的问题

通过前三个问题的解决，对 Gibbs 模型有了较为深入的了解，Gibbs 模型提出的一维的粘滞阻尼波动方程是基于对抽油杆柱进行力学分析推导得出的结果。为简化方程或者计算过程，在公式推导的过程中，Gibbs 模型对某些受力进行了理想化或者是简化忽略，这样对由该公式求得的泵功图也只是一种较大的近似结果。因此有必要对 Gibbs 模型进行分析完善。

此外在问题二的计算中发现，泵功图的形状和阻尼系数有着较大的关系。对同一个悬点示功图取不同的阻尼系数可以得出不同的泵功图（4-4-1）。泵功图的图形正确与否将直接影响计算机对油井情况的诊断准确性。到目前为止，随着计算机诊断技术的繁荣发展，计算阻尼系数的方法也很多，归纳起来有三类：（1）经验算法；（2）根据不同的假设推导出等效粘滞阻尼系数；（3）根据示功图计算阻尼系数。几类方法各有千秋，本文将在此基础之上提出一种阻尼系数计算方法。

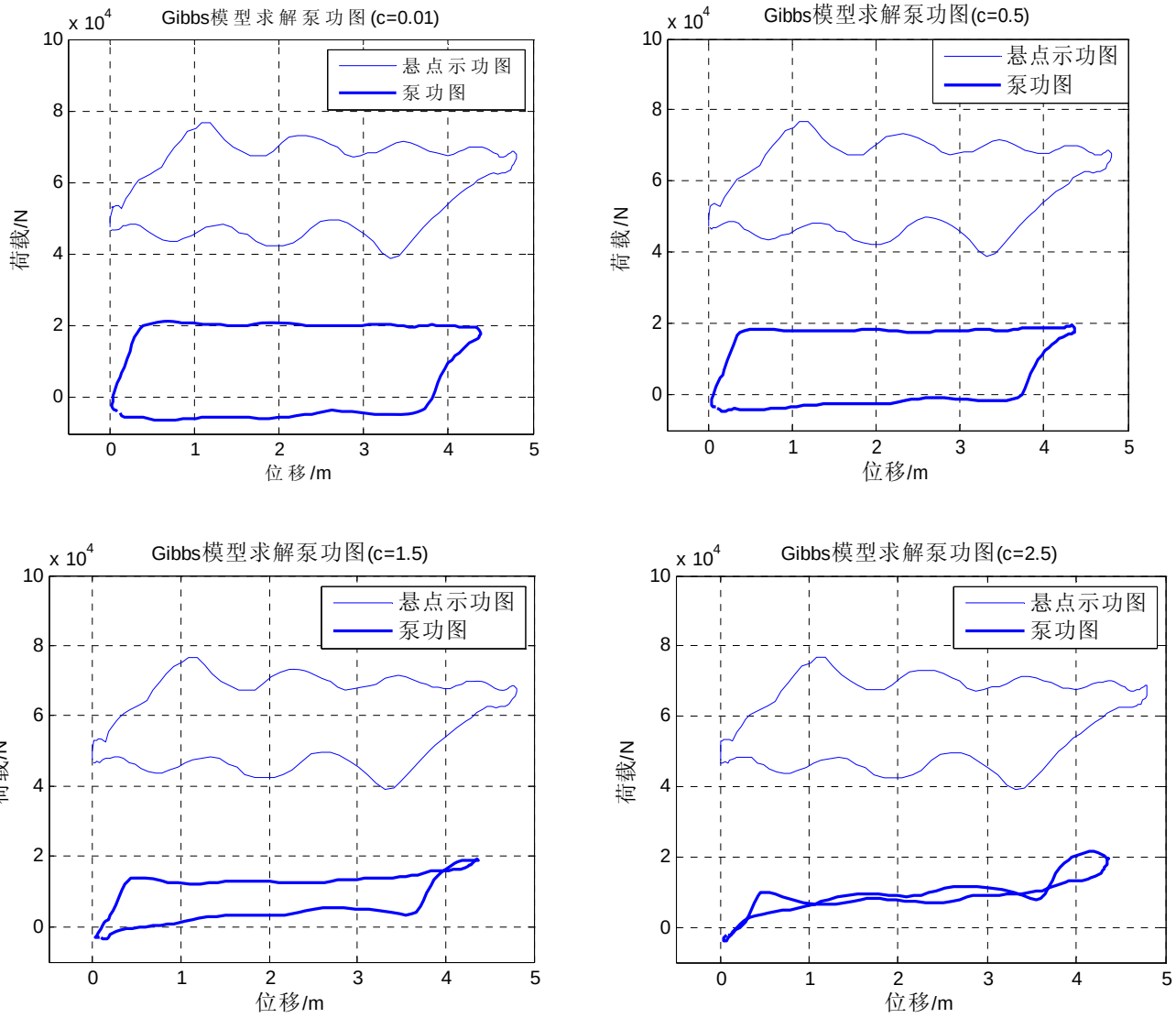


图 4-4-1　不同的阻尼系数条件下 Gibbs 模型计算泵功图

4.4.1　Gibbs 模型的改进

4.4.1.1 Gibbs 模型优缺点分析

对于 Gibbs 模型的算法已在 4.2.2 节进行了分析，但是未对其推导过程及其假设条件进行提及，下面将从抽油杆柱力学分析的角度出发，对其进行模型分析，寻找 Gibbs 模型存在的缺点。

对抽油杆柱力学分析以垂直井为对象，微元体作为受力分析的基本单元。分析前做如下约定：

（1） 位移和载荷的方向均以向上为正，抽油杆柱的位置以向下为正；

（2） 油管内充满密度均匀的液体。

（3） 油管是锚定的，抽油杆不与油杆发生摩擦。

（4）运动起始点为悬点运动的下死点，抽油杆上的任意截面的运动用 $u(x,t)$ 表示；截面

随着悬点的上下运动用$U(t)$表示，截面相对于悬点的弹性位移用$u_1(x,t)$表示。

基于以上约定，我们可以得到微元体的受力情况如图 4-4-2 所示：

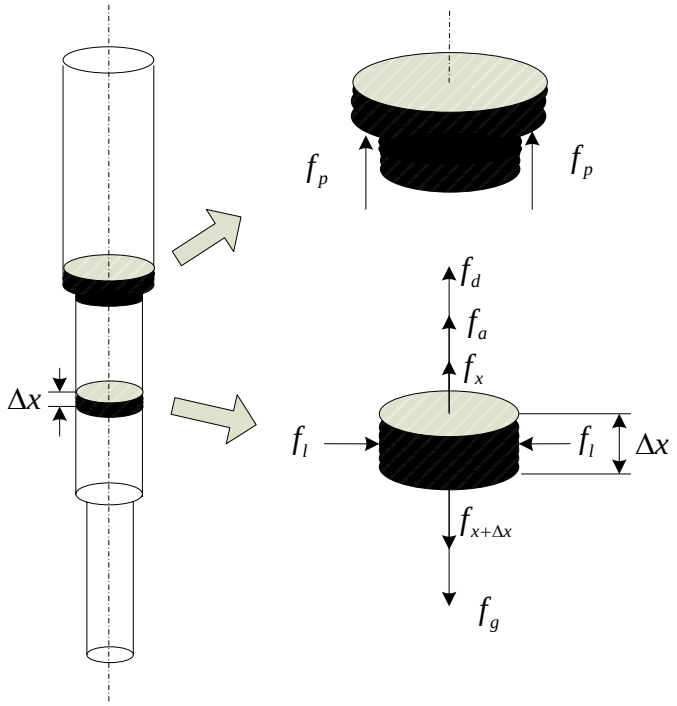


图 4-4-2　　抽油杆连接处及微元体受力分析图

ρ_r　表示似第 r 级抽油杆的密度，kg/m^3；

μ　油管内液体的动力粘度，$Pa\bullet s$；

f_r　表示 r 级抽油杆的横截面积，m^2；

N　表示采油系统中抽油杆的总级数；

ρ_1　表示油管内液体的密度，kg/m^3；

f_{cr}　表示相邻抽油杆连接处突出部分面积，m^2

（1）微元体重力为：

$$f_g = -\rho_1 g f_r dx \tag{4-4-1}$$

（2）微元体上、下截面的内力分别为：

$$f_x = -Ef_r\left(\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\right)_x \tag{4-4-2}$$

$$f_{x+\Delta x} = Ef_r\left(\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} \tag{4-4-3}$$

（3）微元体与油管内液体的粘滞阻力为：

$$f_d = -\mu\left(\frac{\partial U(t)}{\partial t} + \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}\right)dx \tag{4-4-4}$$

（4）微元体的惯性力为：

$$f_a = -\rho_1\left(\frac{\partial^2 U(t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2}\right)dx \tag{4-4-5}$$

（5）油管液体对微元体的压力是垂直于微元体的轴线指向微元体，各向相等，其合力为 0；
（6）抽油杆连接处，相邻两根抽油杆的直径不同，一般上粗下细，导致突出的环形部分受到油管内液体的压力：

$$f_p = \rho_1 g f_{cr} \sum_{r=1}^{N} L_r \tag{4-4-6}$$

根据抽油杆柱的微元体受力分析，其轴向力的静平衡条件为：

$$\sum F_N = 0 \tag{4-4-7}$$

即

$$f_x + f_{x+\Delta x} + f_a + f_g + f_p = 0 \tag{4-4-8}$$

综上公式推导，可以得到

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - c\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - g \tag{4-4-9}$$

该公式与 Gibbs 的一维粘滞阻尼波动方程式一致的，此处将抽油杆的重力考虑在内，并在计算中使用静荷载，故公式中有 g 项。

从上述推导过程中，发现 Gibbs 模型假设的是抽油杆为粗细相同时，忽略了其相邻杆之间存在的突出部分存在会受到油管内液体的向上的力的影响。在实际情况中，采油系统多采用多级抽油杆，该力的存在只对求多杆抽油机泵功图时杆与杆之间的连接条件产生影响，进一步传递到下一根杆中。

4.4.1.2 Gibbs 模型改善方法

基于 4.4.1.1 节中的分析，只需在利用 Gibbs 模型求解泵功图过程中对其满足的连续性条件做改变即可。

现对 Gibbs 模型连续性条件改为：上级抽油杆底端的载荷等于下级抽油杆顶端的荷载加上油管内液体对上级抽油杆突出的环形面积的压力，同时上级抽油杆底端与下级抽油杆顶端的位移始终相等。

数学表达式如下：

$$\begin{aligned} F(x_{j+1},t) &= F(x_j,t) + F_r^{cA} \\ u(x_{j+1},t) &= u(x_j,t) \end{aligned} \tag{4-4-10}$$

$$F_r^{cA} = \rho_1 g(f_r - f_{r+1})\sum_{r=1}^{N} L_r \qquad (4\text{-}4\text{-}11)$$

对于改进的Gibbs模型的初始条件、上下界条件以及数据的预处理方法同原来的Gibbs模型。由此可得到新的数学模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - c\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} \\ u(x,t)\big|_{x=0} = U(t) \\ F(x,t)\big|_{x=\mathrm{L}} = D(t) \\ u(x,t)\big|_{(t=0)} = 0 \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{(t=0)} = 0 \\ F(x_{j+1},t) = F(x_j,t) - F_r^{cA} \\ u(x_{j+1},t) = u(x_j,t) \end{cases} \qquad (4\text{-}4\text{-}12)$$

4.4.1.3 改善之后的优缺点分析

将连续性条件改变之后，求解过程同 4.4.1.2 节流程图所示是相同的，只是在抽油杆连接处对荷载进行调整即可。实验数据采用附件 2 中给出的。仿真结果比较如下图所示。

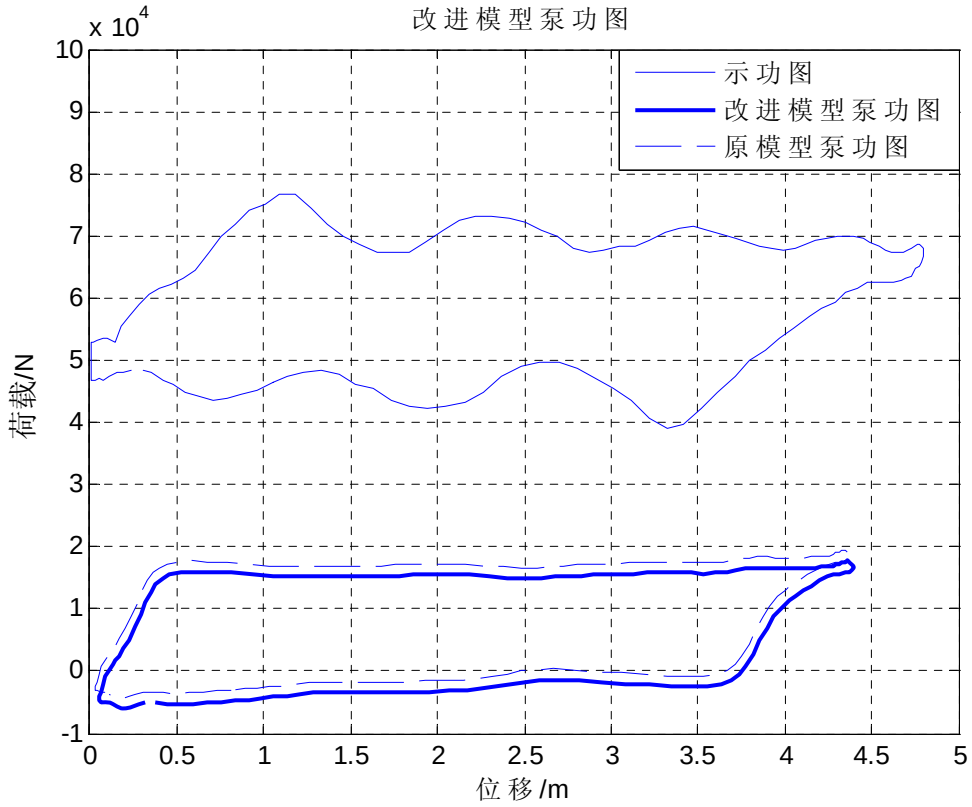


图 4-4-3 改进模型求解泵功图

4.4.2 阻尼系数计算方法

4.4.2.1 常用的阻尼系数计算方法

1、Gibbs 模型中，Gibbs 认为非粘滞阻尼力可以忽略不计，基于三点假设：1）悬点做简谐运动；2）以光杆瞬时运动速度的均方根值表示抽油杆的平均速度；3）抽油杆一周所耗散的功应等于等效粘滞阻尼所耗散的功。S.G.Gibbs 推导得出计算阻尼系数的两种方法，分别对应为等效粘滞阻尼系数和根据光杆效率与水力功率计算阻尼系数[3]：

$$c=\frac{\pi a\upsilon}{2L} \tag{4-4-13}$$

υ 表示无量纲阻尼因子。

$$c=\frac{(PRhp-Hhp)(T/S)^2}{\sqrt{2}\pi\sum_{i=1}^{N}\rho_i f_{ri}L_i} \tag{4-4-14}$$

$PRhp$ 光杆功率， W

Hhp 水功率， W

N 表示抽油杆级数

ρ_i 表示第 i 级油杆密度 kg/m^3

f_{ri} 表示第 i 级抽油杆截面积 m^2

S 表示冲程长， m

此外，还有利用摩擦功确立阻尼系数的方法，见式（4-2-31）。

4.4.2.2 基于示功图的阻尼系数计算方法

在 4.4.2.1 节所列的阻尼系数的计算方法中，大多是基于 Gibbs 模型在做了诸多假设之后，要用到的数据不仅仅是地面示功图，式（4-4-15）、式（4-4-13）还需要 $c_d-\upsilon$ 理想曲线；式（4-2-31）的计算需要混合物的动力粘度；对于式（4-4-14）需要计算功率，量大且复杂。因此迫切需要有一种比较准确且能够较为完整的反应全面实际情况，用到的数据最好是能够简单测得的。

鉴于此种情况，尝试从 Gibbs 波动方程本身和已给的示功图推导计算阻尼系数的公式。

首先，Gibbs 波动方程公式（4-2-1）可以写成以下形式：

$$Ef_r\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}dx=\rho f_r\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}dx-c\rho f_r\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dx \tag{4-4-15}$$

对式（4-4-15）沿 x 方向从 0 到 L 进行数值积分：

$$\int_0^L Ef_r \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = \int_0^L c\rho f_r \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx + \int_0^L \rho f_r \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (4\text{-}4\text{-}16)$$

则等式左边可以写成：

$$\int_0^L Ef_r \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = \sum_{i=1}^{n} \left\{ E_i f_{ri} \left[\frac{\partial u(x_i,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x_{i-1},t)}{\partial x} \right] \right\} \quad (4\text{-}4\text{-}17)$$

令

$$\frac{\partial u(x_i,t)}{\partial x} = F(x_i,t) \quad (4\text{-}4\text{-}18)$$

$$\frac{\partial u(x_{i-1},t)}{\partial x} = F(x_{i-1},t) \quad (4\text{-}4\text{-}19)$$

（4-4-17）式化成：

$$\int_0^L Ef_r \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = F_P(t) - F_0(t) \quad (4\text{-}4\text{-}20)$$

将式（4-4-20）代（4-4-16）式得：

$$F_P(t) - F_0(t) = \int_0^L c\rho f_r \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx + \int_0^L \rho f_r \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (4\text{-}4\text{-}21)$$

对式（4-4-21）进行时间积分，假设上冲程时间从 0 到T_1，下冲程时间从T_1到T，有：

$$\int_0^{T_1} (F_P(t) - F_0(t)) dx = \int_0^L c\rho f_r \int_0^{T_1} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dt dx + \int_0^L \rho f_r \int_0^{T_1} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dt dx \quad (4\text{-}4\text{-}22)$$

$$\int_{T_1}^{T} (F_P(t) - F_0(t)) dx = \int_0^L c\rho f_r \int_{T_1}^{T} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dt dx + \int_0^L \rho f_r \int_{T_1}^{T} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dt dx \quad (4\text{-}4\text{-}23)$$

设

$$\begin{aligned} \bar{F}_{ou} &= \frac{1}{L} \int_0^L F_{ou}(t) dx \\ \bar{F}_{od} &= \frac{1}{L} \int_0^L F_{od}(t) dx \\ \bar{F}_{pu} &= \frac{1}{L} \int_0^L F_{pu}(t) dx \\ \bar{F}_{pd} &= \frac{1}{L} \int_0^L F_{pd}(t) dx \end{aligned} \quad (4\text{-}4\text{-}24)$$

式（4-4-24）中$\bar{F}_{ou}$、$\bar{F}_{pu}$、$\bar{F}_{od}$、$\bar{F}_{pd}$分别表示上冲程光杆的平均动荷载、上冲程泵的平均动荷载、下冲程光杆的平均动荷载、下冲程泵的平均动荷载。则有（4-4-22）、（4-4-23）可写成：

$$T_1(\bar{F}_{pu}-\bar{F}_{ou})=c\int_0^L \rho f_r[u(x,T_1)-u(x,0)]dx+\int_0^L \rho f_r[\frac{\partial u(x,T_1)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}]dx \quad (4\text{-}4\text{-}25)$$

$$(T-T_1)(\bar{F}_{pd}-\bar{F}_{od})=c\int_0^L \rho f_r[u(x,T)-u(x,T_1)]dx+\int_0^L \rho f_r[\frac{\partial u(x,T)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,T_1)}{\partial t}]dx \quad (4\text{-}4\text{-}26)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\frac{\partial u(x,T)}{\partial t} \quad (4\text{-}4\text{-}27)$$

$$u(x,0)=u(x,T) \quad (4\text{-}4\text{-}28)$$

将上述（4-4-25）、（4-4-26）两式相减得到：

$$\begin{aligned}&[T_1\bar{F}_{pu}-(T-T_1)\bar{F}_{pd}]-[T_1\bar{F}_{ou}-(T-T_1)\bar{F}_{od}]\\&=2c\int_0^L \rho f_r[u(x,T_1)-u(x,0)]dx+2\int_0^L \rho f_r[\frac{\partial u(x,T_1)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}]dx\end{aligned} \quad (4\text{-}4\text{-}29)$$

假设

$$\begin{aligned}&T_1=\alpha T(0.5\le\alpha<1)\\&u(x,T_1)-u(x,0)=-(S_0+S_1)/2\\&\frac{\partial u(x,T_1)}{\partial t}=\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0\end{aligned} \quad (4\text{-}4\text{-}30)$$

这样最终得出阻尼系数的表达式：

$$c=\frac{T\left[(1-\alpha)(\bar{F}_{pd}-\bar{F}_{rd})-\alpha(\bar{F}_{pu}-\bar{F}_{ru})\right]}{S_r(1-S_p/S_r)\sum_{r=1}^{N_r}\rho_r f_r L_r} \quad (4\text{-}4\text{-}31)$$

从公式（4-4-31）可以看出，要计算阻尼系数必须要预先知道泵功图，这与求泵功图，先知道阻尼系数是矛盾的，故采用迭代算法解决问题。即在阻尼系数合理的范围内，任意选定一个初始值，利用 Gibbs 模型求出泵功图，然后再求阻尼系数，这样就会进入一个死循环，为得到较为准确的阻尼系数，并且能够使循环停下，选定一个门限值，使得要求的阻尼系数在某个范围内时或者由此阻尼系数得到其他值满足要求时停下并输出解算的阻尼系数。

那么如何确定这个门限值？在什么情况下收敛？

假如泵工作正常，P_0 表示游动阀上部的压力，用 $P(t)$ 表示泵内压力，P_l 表示泵的吸入压力。液体通过游动阀压力降为 ΔP_t，通过固定阀压力降为 ΔP_s，
假设：

$$\Delta P=\Delta P_t=\Delta P_s \quad (4\text{-}4\text{-}32)$$

如果忽略柱塞与液体德尔惯性力，则作用于柱塞上的平衡方程应是

$$F_P(t)=P_0(A_P-f_r)-P(t)A_p+W_p\pm f \quad (4\text{-}4\text{-}33)$$

A_P 柱塞截面积；

f_r 抽油杆截面积；

W_p 柱塞重；

f ——柱塞与泵筒间的摩擦力

在上冲程固定阀打开时

$$P(t)=P_l-\Delta P \tag{4-4-34}$$

则上冲程平均泵载荷为

$$\bar{F}_{pu}=(P_0-P_l)A_P-P_0A_r+W_p+f+\Delta PA_p \tag{4-4-35}$$

在下冲程游动阀打开时，

$$P(t)=P_l+\Delta P \tag{4-4-36}$$

则下冲程有效泵载荷为

$$\bar{F}_{pd}=-P_0A_r+W_p-(f+\Delta PA_p) \tag{4-4-37}$$

设 f_0=$f+\Delta PA_p$

$$\bar{F}_{pu}=(A_P-A_r)P_0-P_lA_p+W_p+f_0 \tag{4-4-38}$$

$$\bar{F}_{pd}=-P_0A_t+W_p-f_0 \tag{4-4-39}$$

所以得出

$$\bar{F}_{pu}-\bar{F}_{pd}=P_0A_P-P_lA_P+2f_0 \tag{4-4-40}$$

如果近似地忽略了 f_0，就得出

$$P_0=P_1+\left(\bar{F}_{pu}-\bar{F}_{pd}\right)\Big/A_P \tag{4-4-41}$$

根据文献[1]有:

$$P_0=P_1+F_0\Big/A_P \tag{4-4-42}$$

式中 F_0 为泵升举液体载荷。

对比（4-4-41）（4-4-42）可以确定收敛条件为

$$\left|\frac{K_1-F_0}{K_1-\left(\bar{F}_{pu}-\bar{F}_{pd}\right)}-1\right|<\varepsilon \tag{4-4-43}$$

式中 ε 为允许误差； $K_1=\bar{F}_{ou}-\bar{F}_{od}$

迭代计算阻尼系数流程图见图 4-4-4。

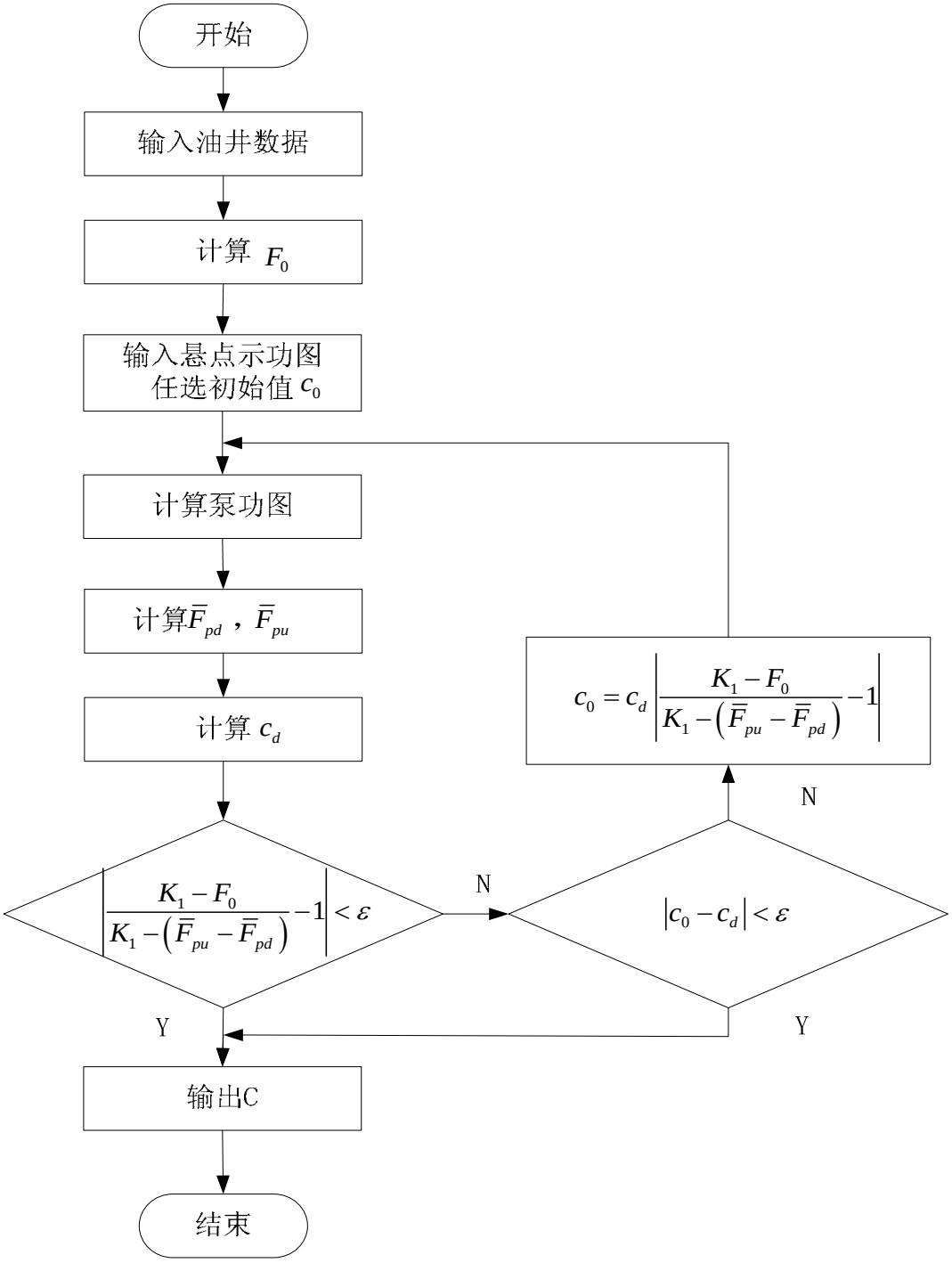


图 4-4-4　阻尼系数迭代运算流程图

4.4.2.3 实验仿真

根据 4.4.2.2 节中阻尼系数迭代运算流程图，编写 MATLAB 程序，实验参数设置为：$\alpha=0.5, c_o=0.1s^{-1}, \varepsilon=0.01$，通过迭代运算求得附件 1、2 中的阻尼系数分别为 1.0341 s^{-1}、0.3395 s^{-1}。

五 模型的评价与推广

问题一中，模型 II 通过解析方法可以得到悬点更加真实的运动规律，缺点是推导过程比较复杂。

问题二中，模型 III 由地面示功图推算出了泵功图，根据泵功图估算的日产液量与实际比较吻合，证明了模型 III 的正确性。另外，泵功图除了可以估算产液量还可以对井下工作状态进行计算机自动诊断，由于解题时间有限，这里仅简要介绍思路，即通过设置形变阈值鉴别泵功图形状，如凹陷度、倾斜度等，当泵功图形变达到某一阈值时即可判断井下工作状态。

问题三中，模型 IV 为求出泵功图面积提出了非等间隔点求面积的“最近点分割算法”。该算法克服了传统算法中必须等间隔采样的局限，不仅可用于泵功图面积的求解，对任意非等间隔采样图形求面积的问题都适用。模型 V 通过计算曲率变化最大点判断阀门的开合位置，进而得到泵不同阶段的工作状态，这不仅可以计算柱塞有效冲程和估算产液量，对抽油机运行状态检测也有重要意义。

问题四中，模型 VI 只需根据地面示功图和任意合理的阻尼系数初值，就可通过迭代得到较为精确的阻尼系数，具有需要已知量少，方法简单的优点，缺点是牺牲了一定的精度。

参考文献

[1] Gibbs.S.G , Neely,A.B , Computer Diagnosis of Downhole Condition in Sucker Rod Pumping Wells, J.Pet.Tech.,Jan. 1966.

[2] Gibbs.S.G ,Method of Determining Sucker Rod Pump Performance,United States Patent Office,Sep.1967.

[3] 张琪，吴晓东，抽油机井计算机诊断技术及其应用，华东石油学院学报，2:141-147，1984.

[4] 王鸿勋 张琪，采油工业原理,石油行业出版社，1985.

[5] 万仁溥，采油工程手册，石油行业出版社，2000.

[6] 袁震，抽油井在线自动诊断技术的研究与实现,2011:12-13.