

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

学 校 华北电力大学（保定）

参赛队号 10079012

队员姓名	1.	明镜
	2.	董怀普
	3.	林鹏

参赛密码 _____
(由组委会填写)



第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目 功率放大器非线性特性及预失真建模

摘 要：

本文以功率放大器在无记忆和有记忆两种情况下，根据输入/输出数据，分别建立非线性数学模型，并且用 NMSE 评价所建模型的准确度。根据线性化原则以及“输出幅度限制”和“功率最大化”约束条件，用均方误差 NMSE 作为目标函数，分别建立预失真模型，将功放特性线性化，并用 NMSE/EVM 指标评价模型；最后计算并画出输入信号、无预失真补偿的功率放大器输出信号、采用预失真补偿的功率放大器输出信号这三类信号的功率谱密度图，并用 ACPR 衡量由于非线性效应所产生的新频率分量对邻道信号的影响程度。

对于问题 1，分别采用 Saleh 模型和幂级数模型对无记忆性功放的进行了拟合，都比较好的模拟了其输入输出特性，并得出指标 NMSE 分别为 -33.3057 和 -53.4415，通过比较，采用幂级数模型对预失真处理建立数学模型。合理考虑了“输出幅度限制”和“功率最大化”约束，使目标函数 NMSE 达到合理的值。通过预判 g 的取值范围，采用步长迭代法对 g 进行搜索，在满足约束条件和目标函数的情况下，得出 $g=1.865$ ，并求得了预处理模型的参数和各项指标；

对于问题 2，对于有记忆功放特性，分析比较 Wiener 模型、Hammerstein 模型和记忆多项式模型，采用记忆多项式模型对有记忆功放建立模型，用 NMSE 评价其准确性，此时 $NMSE=-44.5408$ 。对于预失真处理模型，采用间接学习法，用 LS 算法和步长迭代算法求得预失真处理函数的系数和 g 以及各项参数，求得最佳 $g=9.489$ 。

对于问题 3，采用了周期图法和最大熵法模型计算输入信号、无预失真补偿的功率放大器输出信号、采用预失真补偿的功率放大器输出信号的功率谱密度，通过图形特征比较出最大熵法噪声小、平滑度高的优越性，取得了较平滑的功率谱密度曲线，并从图中截点获得传输信道和邻信道的宽度，再通过矩形法模

型对功率谱密度积分，求出采用补偿前后的 ACPR 值由-30.7666 减小为-35.7587,验证了本文采用的预失真模型有效地减小了非线性效应所产生的新频率分量对邻道信号的影响。

关键词：幂级数模型 记忆多项式模型 步长迭代法 LS 算法 最大熵法

一、问题的重述

信号的功率放大是电子通信系统的关键功能之一，其实现模块称为功率放大器（PA，Power Amplifier），简称功放。功放的输出信号相对于输入信号可能产生非线性变形，这将带来无益的干扰信号，影响信息的正确传递和接收，此现象称为非线性失真。传统电路设计上，可通过降低输出功率的方式减轻非线性失真效应。

功放非线性属于有源电子器件的固有特性，研究其机理并采取措施改善，具有重要意义。目前已提出了各种技术来克服改善功放的非线性失真，其中预失真技术是被研究和应用较多的一项新技术，其最新的研究成果已经被用于实际的产品（如无线通信系统等），但在新算法、实现复杂度、计算速度、效果精度等方面仍有相当的研究价值。

本题从数学建模的角度进行探索。若记输入信号 $x(t)$ ，输出信号为 $z(t)$ ， t 为时间变量，则功放非线性在数学上可表示为 $z(t) = G(x(t))$ ，其中 G 为非线性函数。预失真的基本原理是：在功放前设置一个预失真处理模块，这两个模块的合成总效果使整体输入/输出特性线性化，输出功率得到充分利用。原理框图如图 1 所示。

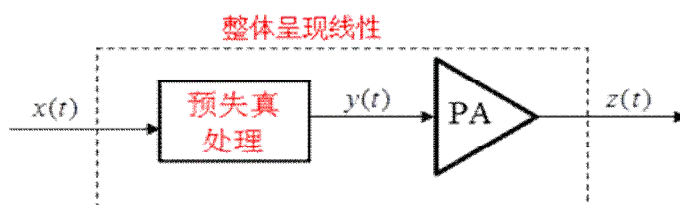


图1.1 预失真技术的原理框图示意

其中 $x(t)$ 和 $z(t)$ 的含义如前所述， $y(t)$ 为预失真器的输出。设功放输入/输出传输特性为 $G(\cdot)$ ，预失真器特性为 $F(\cdot)$ ，那么预失真处理原理可表示为：

$$z(t) = G(y(t)) = G(F(x(t))) = G \circ F(x(t)) = L(x(t)) \quad (1.1)$$

$G \circ F = L$ 表示为 $G(\cdot)$ 和 $F(\cdot)$ 的复合函数等于 $L(\cdot)$ 。线性化则要求：

$$z(t) = L(x(t)) = g \cdot x(t) \quad (1.2)$$

式中常数 g 是功放的理想“幅度放大倍数”（ $g > 1$ ）。因此，若功放特性 $G(\cdot)$ 已知，则预失真技术的核心是寻找预失真器的特性 $F(\cdot)$ ，使得它们复合后能满足：

$$(G \circ F)(x(t)) = L(x(t)) = g \cdot x(t) \quad (1.3)$$

如果测得功放的输入和输出信号值，就能拟合功放的特性函数 $G(\cdot)$ ，然后利用（1.3）式，可以求得 $F(\cdot)$ 。

题目提供的数据为某两个功率放大器在无记忆和有记忆两种情况下的输入/输出（pa_in_out_memoryless.mat 和 pa_in_out_memory.mat），要求分别建立其非线性特性的数学模型并用 NMSE 指标评价模型；再根据“输出幅度限制”和“功率最大化”约束分别建立预失真模型将功放特性线性化，并用 NMSE/EVM 指标评价模型；最后计算并画出输入信号、无预失真补偿的功率放大器输出信号、采用预失真补偿的功率放大器输出信号这三类信号的功率谱密度图，并用 ACPR 衡量由于非线性效应所产生的新频率分量对邻道信号的影响程度。

二 模型假设

根据题意，可以进行如下假设：

- (1) 本文模型属于行为模型建模，即将放大器的内部结构看作未知的“黑箱”，利用输出信号与输入信号的关系建立模型，不研究放大器的内部结构；
- (2) 现实中，不存在无记忆模型，任何功率放大器都存在着记忆效应，认为题中所给的无记忆功放数据是在理想绝对无记忆条件下的；
- (3) 功率最大化等效为功放的输入幅度需尽可能提高；
- (4) 所给数据输入的最大幅度值即为功放最大功率输入；
- (5) 所求得的预失真模型都能通过硬件实现；
- (6) 本题涉及的信号为时间平稳信号；

三 符号说明

t : 时间变量；
 $x(t)$: 预失真器输入信号；
 $y(t)$: 预失真输出信号；
 $z(t)$: 输出信号；
 F_s : 数据采样频率；
 N : 数据的长度；
 $G(\)$: 功放输入/输出特性；
 $F(\)$: 预失真器输入/输出特性；
 $L(\)$: 复合函数输入/输出特性；
 g : 功放理想放大倍数；
 $NMSE$: 归一化均方误差
 EVM : 误差矢量幅度；
 $\hat{S}_x(f)$: 功率谱估计；
 FFT : 傅里叶变换；

四 问题分析

功放模型实质上是曲线拟合问题，预失真模型实质为功放模型的求逆问题，理论上如果功放模型在信号包络区间是单调的，则其逆存在。

预失真系统的识别通常有两种方式：一种方式为直接学习结构，先识别出功放本身的特性函数，然后再取其反函数得到预失真器的系数，但通常取反函数的工作量很大，而且使得系统的精确性降低；第二种方式为通过间接学习结构直接识别出预失真器的系数^[1]。本文选用间接训练的方法。

问题 1：题目已经给出了无记忆性功放（某一时刻的输出仅与此时刻的输入相关）的输入/输出数据，就可以根据最小二乘法原理，利用曲线拟合的方法给出其数学模型；通过 `matlab` 画图，根据图形自身特征来判断输出与输出关系，选取 Saleh 模型和幂级数多项式模型（5 次）进行拟合，通过评价指标参数 NMSE 评价两种模型的准确度和优劣；

所求非记忆性预失真模型，应使预失真器具有与功率放大器幅值和相位上非

线性相反的特性，从而使两个非线性系统的级联整体呈现为线性特性，其中预失真器的特性函数与功放的特性函数模型相同，只是参数不同；

建立预失真模型时，需要考虑“输出幅度限制”和“功率最大化”约束，根据题意分别理解为预失真处理的输出幅度最大值不大于所给出的功放输入幅度最大值和功放的输入幅度需尽可能提高；

以加入预失真模型后的实测输出值与理想值之差平方和为目标误差函数，综合约束条件，得出理想幅度放大倍数 g ，运用评价指标参数 NMSE/EVM 评价预失真补偿的结果；

问题 2：给出的有记忆性功放（某一时刻输出不仅与此时刻输入有关，而且与此前某一时间段的输入有关）的复输入/输出数据，也可以用多项式进行拟合，但要增加记忆效应，并简化为记忆多项式模型进行建模，通过评价指标参数 NMSE 评价模型的准确度；

记忆性预失真模型与功放模型相同，画出预失真处理模型的框图，采用间接训练结构用 LS 多项式自适应的算法，计算出模型相关参数；

运用评价指标参数 NMSE/EVM 评价预失真补偿的结果；

问题 3：通过不同的算法（周期图法和最大熵法）画功率谱密度，根据图形判断算法在精度和平滑程度上的好坏，使用好的算法模型画出输入信号、无预失真补偿的功率放大器输出信号、采用预失真补偿的功率放大器输出信号这三个信号的功率谱密度图，并根据题目所给的采样频率、传输信道和邻信道宽度求取相邻信道功率比 ACPR，计算过程中的积分采用矩形法建模。

五 模型的建立与求解

5.1 问题 1 模型的建立与求解

5.1.1 功率放大器的非线性失真

功率放大器是通讯系统中的关键器件，作用是扩大信号，以保证调制信号能够在高功率下传输，一般说来，当输入功率较小时，功率放大器呈线性状态。但是，当功率放大器工作接近饱和点，此时，放大器的非线性非常严重，当输入信号通过非线性放大器时，就生成了一些失真和邻道干扰，降低了通讯质量。

所有的电子电路都呈非线性这是电子工程中的一个基本事实。作为现代电路理论基础的线性假设，实际上仅仅是一种近似。但是，有些电路，像小信号放大器，只是由于具有非常弱的非线性，才把它们视为线性的。当这类电路应用到射频和微波通信系统时，其非线性肯定会影响系统的性能，因此必须设法改善其非线性性能。另一方面，像混频器和倍频器等电路，必须利用非线性才能正常工作。在这类电路中，往往希望把非线性加强。如果它的非线性特性 I/V ， Q/V 或 Φ/I 可用幂级数展开，且具有满意的精度，也就是说特性曲线是连续的，其导数也是连续的，只需取级数的很少几项就可以满足一般实际分析和应用。对常规电路状态下的所有晶体管和 无源器件都是满足的，因此，就可以用幂级数或 Volterra 级数进行分析^[2]。

5.1.2 AM/AM 和 AM/PM 特性

理想情况下，信号经过功率放大器，其输入/输出函数是线性函数，即公式 (1.2)；但在实际中，由于功率放大器的半导体器件的固有特性，其输入/输出呈非线性特性，对于无记忆的功率放大器来说，主要考虑 AM/AM 变换和 AM/PM 变换所产生的失真，AM/AM 失真是指信号的输出幅度与信号的输入幅度之间存在的关系，AM/PM 失真是指信号的输出幅度与信号的输入幅度之

间存在的非线性关系。

假设：非线性系统输入/输出的幂级数为：

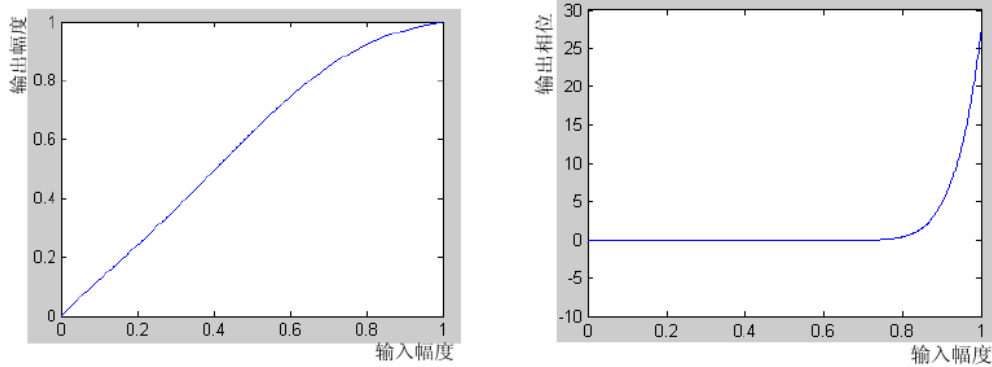
$$y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t) \quad (5.1.1)$$

设 $x(t) = \cos(\omega t + \theta)$ 代入 (5.1) 得：

$$\begin{aligned} y = & \left(\frac{a_2}{2} + \frac{3a_4}{8}\right) + \left(a_1 + \frac{3a_3}{4} + \frac{5a_5}{8}\right) \times \cos(\omega t + \theta) \\ & + \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{2}\right) \times \cos(2\omega t + 2\theta) + \left(\frac{a_3}{4} + \frac{5a_5}{16}\right) \times \cos(3\omega t + 3\theta) \\ & + \left(\frac{a_4}{8}\right) \times \cos(4\omega t + 4\theta) + \left(\frac{a_5}{16}\right) \times \cos(5\omega t + 5\theta) \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

由上式可以看出：输出分量有直流分量，基波分量、二次谐波、三次谐波分量。式中基波分量的幅度为： $a_1 + \frac{3a_3}{4} + \frac{5a_5}{8}$ ，而线性增益应是 a_1 ，因此输出信号产生了幅度失真。

典型的功率放大器的 AM/AM 与 AM/PM 特性曲线如下：

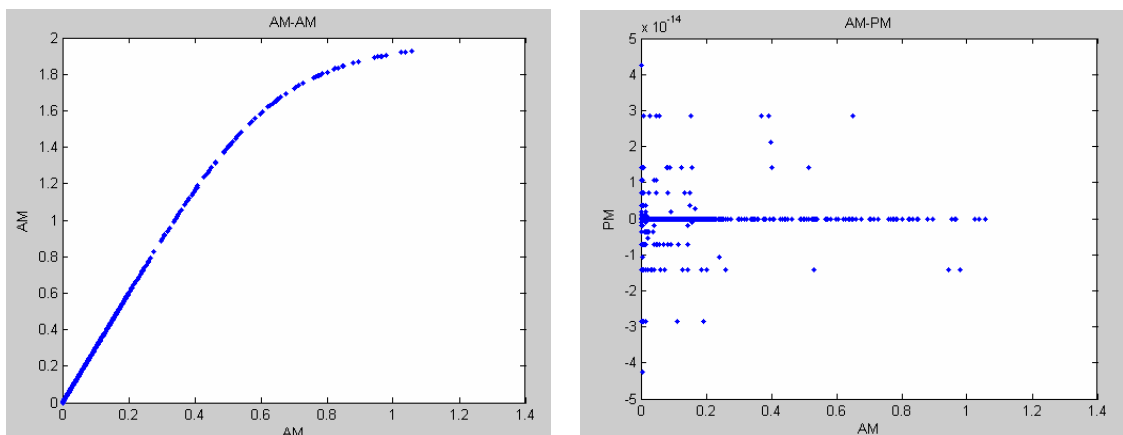


(a)

(b)

图 5.1.1 AM/AM 与 AM/PM 特性曲线

由所给的数据，画出功放的 AM/AM 与 AM/PM 特性曲线如下：



(a) 所给信号的 AM/AM

(b) 所给信号的 AM/PM

图 5.1.2 AM/AM 与 AM/PM 特性曲线

在上图，AM/AM 中功放在输入信号幅度较小时，输出幅度是线性的，当

输入信号幅度达到到一定的数值，输出信号发生了失真。AM/PM 相位图中，经过功放的信号相位几乎不发生变化，只是几个别的点发生相位的变化，由此，我们简化模型，在无记忆功放中，忽略功放的相位变化，只讨论幅度的变化。

5.1.3 无记忆的功率放大器的模型

无记忆效应的功率放大器，即当前的输出信号仅与当前时刻的输入信号有关，而与过去时刻的输入信号无关。因此，无记忆模型可以由包含幅度的代数函数来表示，这个函数描述了输出幅度。最常用的包括 Saleh 模型、幂级数模型等。

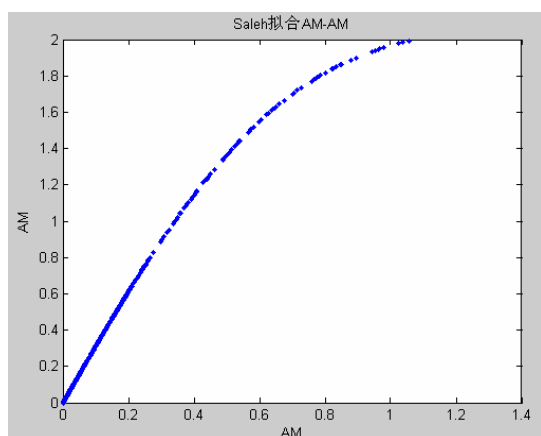
5.1.3.1 Saleh 模型

Saleh 模型是一种常用的无记忆功放模型，多用于描述行波管功率放大器特性。行波管功率放大器广泛应用于图像显示和微波大功率放射机，是一种真空电子器件。Saleh 模型能很好的描述行波管功率放大器的 AM/AM, AM/PM 特性，表达式如下：

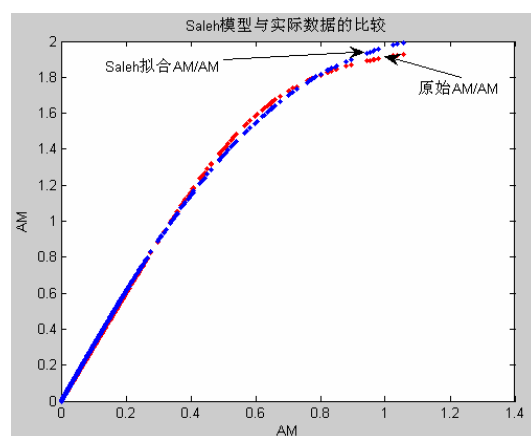
$$y(t) = \frac{\alpha_a x(t)}{1 + \beta_a x(t)^2} \quad (5.1.3)$$

式中： α_a ， β_a 为待定系数。

通过给定的数据（在 pa_in_out_memoryless.mat 中）拟合 Saleh 模型的待定系数。可得： $\alpha_a = 3.1316, \beta_a = 0.5927$ 。可得功放输入/输出幅度散点如下图：



(a) Saleh 模型功放输入/输出幅度



(b) Saleh 模型与实际功放输入/输出幅度

图 5.1.3 Saleh 模型功放输入/输出幅度

通过图像可以发现 Saleh 模型可以较好地模拟出功放输入/输出特性。

采用归一化均方误差 (Normalized Mean Square Error, NMSE)来估计 Saleh 模型的准确度。

$$NMSE = 10 \log_{10} \frac{\sum_{n=1}^N |z(n) - \hat{z}(n)|^2}{\sum_{n=1}^N |z(n)|^2} \quad (5.1.4)$$

由上公式可得到 NMSE 的值为： $NMSE = -33.3057$

总结可得：Saleh 模型功放为： $y(t) = \frac{3.1316x(t)}{1+0.5927x(t)^2}$

指标 NMSE 值为： $NMSE = -33.3057$

5.1.3.2 幂级数模型

幂级数模型将放大器的输入/输出关系表示为如下形式：

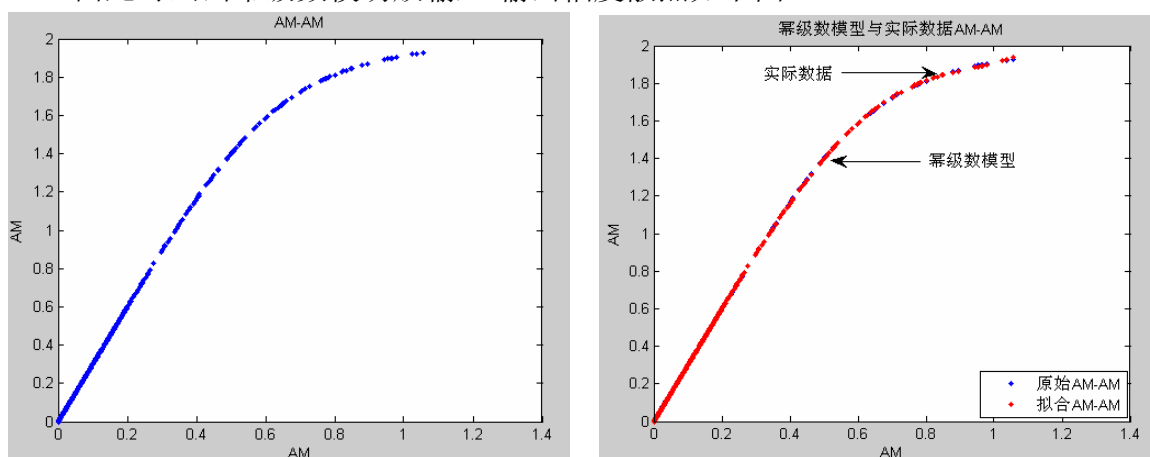
$$y(n) = \sum_{k=1}^K a_k x^k(n) \quad (5.1.5)$$

式中： K 为模型阶数， a_k 为模型系数。考虑到模型的精度和函数的计算复杂度，取 $K=5$ 。该多项式可以近似的模拟功放非线性函数。

通过给定的数据（在 `pa_in_out_memoryless.mat` 中）拟合幂级数模型的特定系数。可得：

$$a_1 = 2.9680, a_2 = 0.3099, a_3 = -0.1537, a_4 = -3.4245, a_5 = 2.2082。$$

由此可画出幂级数模功放输入/输出幅度散点如下图：



(a) 幂级数模型功放输入/输出幅度

(b) 幂级数模型与实际功放输入/输出幅度

图 5.1.4 幂级数模型功放输入/输出幅度

通过图像可以发现幂级数模型能很好的模拟实际功放数据的输入/输出幅度图像。

将模拟所得数据代入均方误差 NMSE 公式中，可得到均方误差为： $NMSE = -53.4415$ 。

总结可得：幂级数模型功放函数为：

$$z(t) = 2.9680y + 0.3099y^2 - 0.1537y^3 - 3.4245y^4 + 2.2082y^5$$

指标 NMSE 值为： $NMSE = -53.4415$

通过 Saleh 模型和幂级数模型建立和图形结果比较分析发现，幂级数模型的图形吻合程度更好，归一化均方误差较小，所以幂级数模型要好于 Saleh 模型，在以下的建模当中我们选择幂级数模型建立模型。

5.1.4 无记忆的功率放大器的预失真模型

预失真技术是最为常用的功率放大器线性化技术，也是目前最有发展前途的技术之一。预失真技术基本原理为：在输入信号和功率放大器之间，插入一

个失真特性与放大器非线性特性相反的网络，从而补偿功率放大器非线性失真，使其输出线性化放大信号。

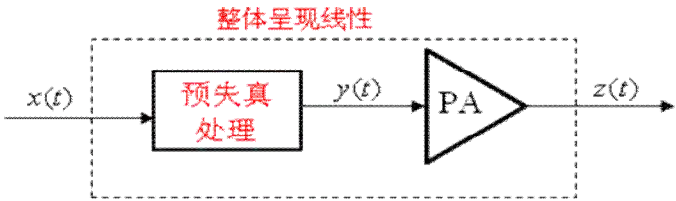


图 5.1.5 预失真技术原理框图示意

那么如何求得预失真模块的传递函数呢？其最初的基本思想来自于数学上的反函数思想，根据非线性放大器的传输特性，构造一个非线性器件即预失真器，通过人为的控制其失真特性，我们可以调节使之传递函数刚好与非线性放大器的特性相互补，最后达到线性化放大的最终目的。即功率放大器的失真特性为增益压缩时，预失真器的失真特性应该是增益扩张。这种补偿原理如图 4.6 所示。

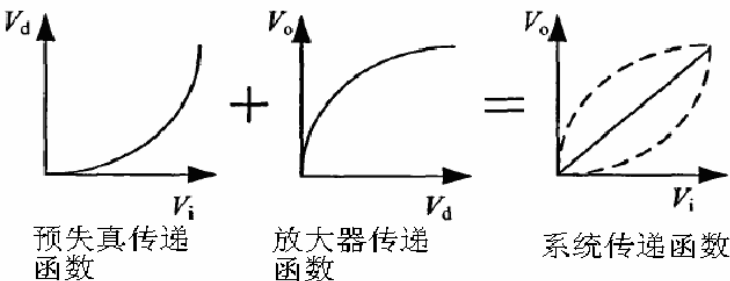


图 5.1.6 预失真放大系统实现机理

用于功率放大器预失真的实现的方法主要有两种，一种是查找表法(look-up-table)，另外一种是多项式法(polynomial)。查找表法的基本原理是建立一张工作函数表，里面储存预失真器的预失真系数，以输入信号作为表的地址，在系统工作过程中，当功率放大器的特性发生变化时通常采用自适应算法对表中的数据进行刷新处理，查找表法根据输入方式不同又可分为一维查找表和二维查找表，因为一维查找表是利用输入信号幅度作为表的地址，而二维表是用输入信号的两个正交分量作为表的地址，所以二维表相较一维表占用更多的容量。

多项式法采用的是应用数学模型来描述预失真器的特性，一般用非线性多项式来进行描述，直接学习结构和间接学习结构是实现预失真器建立多项式模型的两种方法，直接学习结构需要首先要对非线性建立行为模型，然后再对其求逆以得到预失真器的模型，此种方法比较适用于结构简单的非线性功率放大器，对于行为模型结构相对复杂的功率放大器，对其建立行为模型很难获得较高的精度，同时求逆也是十分困难的，所以通常我们使用第二种方法，间接学习结构和直接学习结构不同的是它不需要建立非线性功率放大器的行为模型，只需功率放大器的输入/输出数据便可求得预失真器的后失真函数，设计的精度取决于所采取的自适应算法的近似程度，这种方法和查找表法相比大大的节约了存储空间，采用的自适应算法只需要调整多项式的不同阶的参数，收敛速度大大提升，对具有记忆效应的非线性功率放大器的预失真器的模型的建立也成为可能。

5.1.4.1 查找表法预失真处理模型

功放的非线性只与输入信号的幅度有关，不考虑相位影响，下图所示，自适应更新参数单元对比输入信号 V_i 和反馈信号 V_f 的误差矢量，然后更新查找表的参数以产生预失真器输出信号 V_d ，经功放输出后的放大信号为 V_a ，反复迭代直到满足收敛条件，复增益查找表只考虑相对应幅度或功率的增益补偿量，因此也能够适应各种调制方式，它仅包含一个一维查找表，表中存放着与输入信号振幅或功率对应的增益补偿量^[3]。

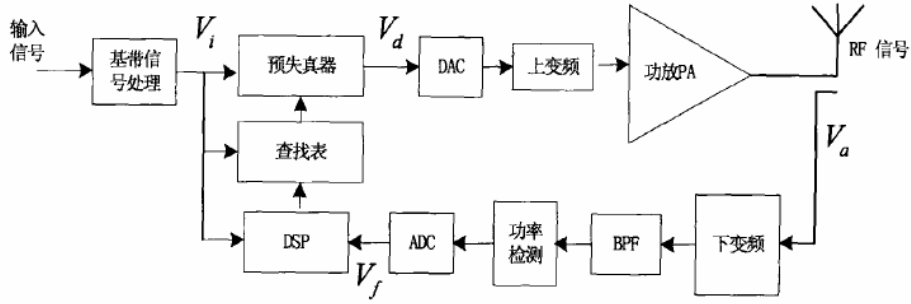


图 5.1.7 基于复增益查找表的预失真系统

设功率放大器的非线性增益为：

$$G = G\{|V_d(n)|\}$$

预失真器的非线性增益为：

$$F = F\{|V_i(n)|\}$$

t 表示时间， n 为采样时刻，那么输入信号 $V_i(n)$ 经过预失真器后：

$$V_d(n) = V_i(n) \times F\{|V_i(n)|\}$$

功放输出为：

$$V_a(t) = V_d(t) \times G\{|V_d(t)|\}$$

输入信号 $V_i(n)$ 和反馈信号 $V_f = V_a(n)$ 的误差矢量为：

$$V_{error} = |V_{error}| \times \exp(j \arg(V_{error}))$$

预失真器的特性函数 F 通过自适应算法迭代得到，自适应算法使得误差矢量 V_{error} 减小到零为止。复增益查找表的自适应过程中，根据输入信号查询查找表，得到对应表项与输入信号相乘，产生预失真信号，预失真信号经过功率放大器之后产生原始输入信号的线性放大信号。

为了便于工程实现，通常用输入信号 V_i 和反馈信号 V_f 的幅度差值 R_{error} 、相位差值 ϕ_{error} ，替代误差矢量 V_{error} 来更新查找表。

设复增益查找表的第 i 个表项为 K_i ，第 n 次迭代得到的值为 $K_{i,n}$ ，第 $n+1$

次迭代得到的值为 $K_{i,n+1}$ 。

根据幅度差值 R_{error} 更新查找表的递归方程为：

$$K_{i,n+1} = K_{i,n} - \alpha R_{error}$$

式中： α 为迭代步长，决定收敛速度和稳定性。

根据相位差值 ϕ_{error} ，更新查找表的递归方程为：

$$K_{i,n+1} = K_{i,n} - \beta \phi_{error}$$

式中： β 为迭代步长，决定收敛速度和稳定性。

查找表法预失真处理模型相对的在制表和自适应刷新过程中就要获取大量的数据，耗时较多，但从整体上看省去了将信号进行极坐标转换的过程，大大减少了数字信号处理的运算量，在使用查找表法进行数字预失真处理时，预失真器设计的精度取决于查找表构造的精度，在查找表容量足够大的时候，通过这种方法可以设计出较高精度的预失真器，但无论无记忆还是有记忆查找表预失真，其主要缺点是具有较慢的收敛速度。

5.1.4.2 多项式法预失真处理模型

在之前的功放模型中，幂级数模型能较好的模拟输入/输出幅度，误差较小，在此我们选择幂级数模型作为功放的数学模型，在预失真器特性也用幂级数模型描述，阶数相同。则设为：

$$y(n) = \sum_{k=1}^K a_k x^k(n) \quad (5.1.6)$$

$$z(n) = \sum_{k=1}^K b_k y^k(n) \quad (5.1.7)$$

式中： a_k, b_k 为待定参数。

经过预失真处理之后，输入数据和输出数据具有公式（1.2）的线性关系。

为了考虑精度和计算的复杂度，在此我们同样取 $K=5$ ，在之前功放的模型已经建立。为了求得预处理函数的系数，我们首先根据功放输入与输出的数据大致估算出整个预处理功率放大器的倍数 $g \in (1,3)$ ，计算出预处理函数系数关于放大倍数 g 的表达式，然后用步长为 $\alpha = 0.001$ 去逼近目标函数。

建立预失真模型时，需要考虑“输出幅度限制”和“功率最大化”约束，根据题意分别理解为预失真处理的输出幅度不大于所给出的功放输入幅度最大值和功放的输入幅度需尽可能提高。

在约束条件中，输出幅度限制为：

$$\max(|y(n)|) \leq \max(|x(n)|) \quad (5.1.8)$$

功率最大化约束为：

$$f = \max(|y(n)|) \quad (5.1.9)$$

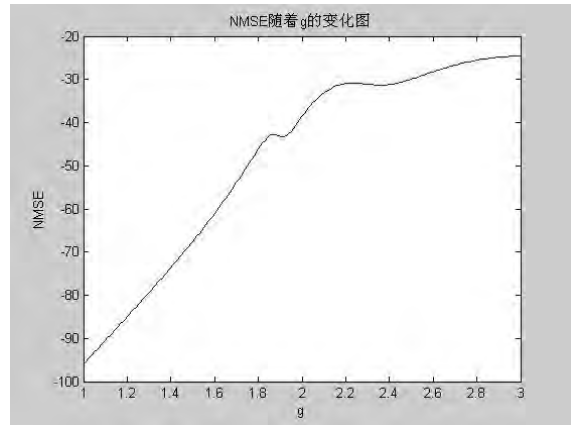
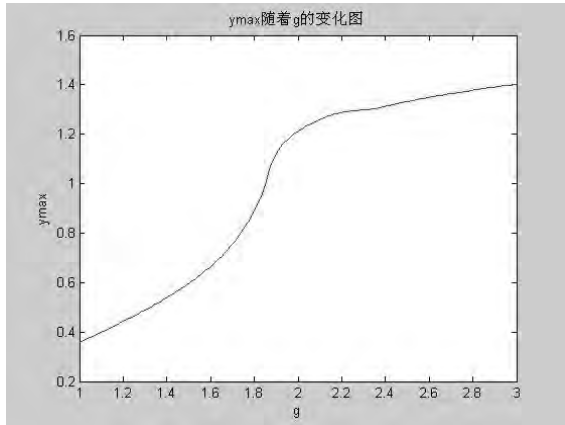
目标误差函数设为（应取最小值）：

$$NMSE = 10 \log_{10} \frac{\sum_{n=1}^N |z(n) - \hat{z}(n)|^2}{\sum_{n=1}^N |z(n)|^2} \quad (5.1.10)$$

算法循环步骤为：

1. $g_0 = 1$ ，计算预处理的输出为 $y_0(n)$ ，功放的输出为 $z_0(n)$ ，误差为 $NMSE_0$ ，预处理函数的系数矩阵为 A_0 ，计算是否满足 $|y_0(n)| \leq \max(|x(m)|)$ ，否则剔除该参数的值，转向步骤 2。
2. 判断 $g \in (1,3)$ 是否满足，否则转向步骤 3。 $g_p = g_{p-1} + \alpha$ ，计算预处理的输出为 $y_p(n)$ ，功放的输出为 $z_p(n)$ ，误差为 $NMSE_p$ ，预处理函数的系数矩阵为 A_p ，计算是否满足 $|y_p(n)| \leq \max(|x(m)|)$ ，否则剔除该参数的值，转向步骤 2。
3. 遍历所有满足条件的 g ，输出 $\max(g_k)$ ，预处理函数系数矩阵 A_k ，误差 $NMSE_k$ 。

经过迭代可得出 g 与预处理输出最大值函数输出幅度关系图和均方误差 NMSE 与 g 的关系图。如下图所示：



(a) 预失真输出幅度最大值与 g 的关系图

(b) 均方误差 NMSE 与 g 的关系图

图 5.1.8 预失真处理输出幅度最大值和均方误差 NMSE 与放大倍数 g 的关系图

通过上图可以发现，随着 g 的增大，预失真处理输出的幅度最大值逐渐增加。均方误差 NMSE 随着 g 的增大也在增加。因为预失真处理的输出幅度不大于所给出的功放输入幅度最大值，由于 $\max(|x(n)|) = 1.0553$ ，所以 $|y(n)| \leq 1.0553$

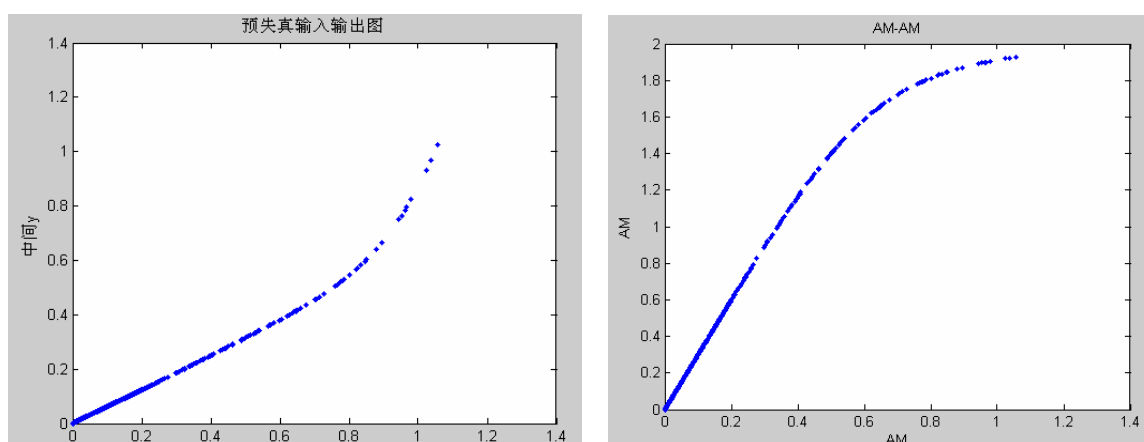
预失真处理加载后，尽可能使功放的输出“功率最大化”。为了充分发挥功放的作用，预失真处理模型的建立必需考虑尽可能使功放的信号平均输出功率最大，因此预失真处理后的输出幅度（等效为功放的输入幅度）需尽可能提高。

因 $\max(|y(n)|) \leq 1.0553$ ，经过上图可以发现预失真处理输出幅度最大值随 g 增大；为了使功率最大化，在此可取 $\max(|y(n)|) = \max(|x(n)|) = 1.0553$ ，此时达到功率最大化，由此可得：

$$g = 1.865, NMSE = -42.8711$$

$$b_1 = 0.6548, b_2 = -0.4683, b_3 = 1.9870, b_4 = -3.2987, b_5 = 1.9965$$

可得预失真处理模块的输入与输出幅度图为：



(a) 预失真模块输入/输出幅度

(a) 功放输入/输出幅度

图 5.1.9 预失真处理输出和功放的输入/输出幅度

由图可观测到预失真处理函数调节使之传递函数刚好与非线性放大器的特性相互补，最后达到线性化放大的最终目的。

由输入信号经过预失真处理，之后进入功放，得到输出信号，可得出功率放大器的加预失真补偿后模型的图像：

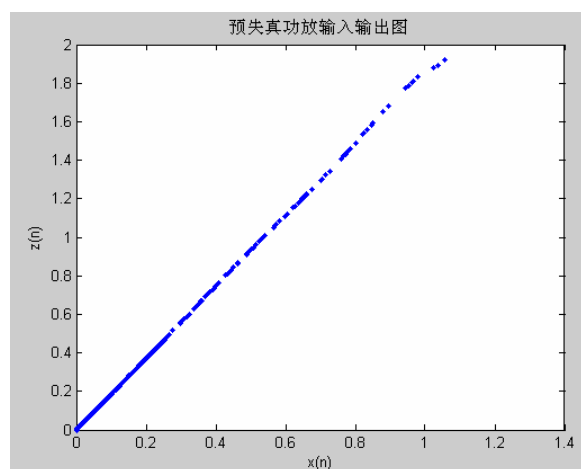


图 5.1.10 加预失真补偿后功放输入/输出幅度

通过上图可以发现预失真功放输入/输出幅度达到线性化放大。

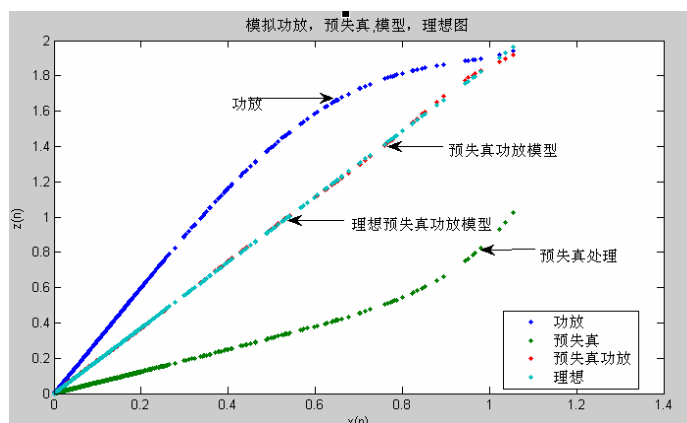


图 5.1.11 预失真功放各个模块的输入/输出幅度关系

通过，上图可以发现经过预失真处理之后，功放在约束条件之内输出达到线性关系。

由此将模拟数据代入误差矢量幅度 (Error Vector Magnitude, EVM)公式可计算出

$$EVM = \sqrt{\frac{E[e^2]}{E[X^2]}} \times 100\% \quad (5.1.11)$$

可得： $EVM = 0.72\%$

总结该模型：

预失真处理函数为：

$$y(t) = 0.6548x(t) - 0.4683x(t)^2 + 1.9870x(t)^3 - 3.2987x(t)^4 + 1.9965x(t)^5$$

功放处理函数为：

$$z(t) = 2.9680y + 0.3099y^2 - 0.1537y^3 - 3.4245y^4 + 2.2082y^5$$

归一化均方误差 (NMSE)的值为：

$$NMSE = -42.8711$$

误差矢量幅度 (EVM)的值为：

$$EVM = 0.72\%$$

5.2 问题 1 模型的建立与求解

5.2.1 记忆功率放大器的记忆性

功率放大器记忆效应产生的原因是电路中存在储能元件电感和电容, 电路节点的电压和电流瞬态值, 不仅取决于当前输入还取决于所有历史值, 此时电路表现出记忆性。电感和电容的阻抗与工作频率有关, 所以电路的记忆性随工作频率的变化而变化。放大器的记忆效应表现为与信号带宽有关, 窄带信号记忆效应可以忽略不计, 而宽带信号或大功率功放的记忆效应非常明显。由于记忆效应的存在, 功率放大器非线性产生的互调分量随输入信号的幅度及带宽动态变化。

记忆效应可分为电记忆效应和热记忆效应。电记忆效应产生多是由功放的电路中存在电容阻抗等存储元件引起的。这样, 在放大器随着输入调制信号频率变化, 放大器的电容和阻抗会保存工作点之前输入频率, 最终导致放大器输出幅度和相位也随着输入调制信号的频率动态变化而变, 具体表现为放大器输出的频谱分量不对称。功放设计时尽量保持偏置电路基带阻抗响应的恒定, 可以减少

偏置电路产生的记忆效应，一般功放的匹配电路对单一工作频率匹配效果比较好，对宽带信号，如果精心设计调试，优化匹配电路可以减小电记忆效应。热记忆效应的产生是由于功率器件芯片温度的动态变化导致，半导体器件对温度非常敏感，其特性对温度具有很强的依赖性，随着使用时间增加，功率器件的温度逐渐升高，产生热效应，导致热功率反馈，产生通常所说的热记忆效应，从而导致放大器性能下降。为了减小热记忆效应，需要给功率放大器提供良好的散热系统。

有记忆功率放大器的数学模型主要有 Volterra 级数模型，及 Volterra 级数模型的简化形式如：记忆多项式模型、Wiener 模型、Hammerstein 模型和 Wiener-hammerstein 模型，其中后三者是记忆多项式模型的特例。Volterra 级数能以任意地精度逼近一个因果的非线性动态系统，它是描述功率放大器的非线性及记忆效应的通用模型。但 Volterra 核参数的数目会随着功放系统的记忆深度和阶次的增加而迅速增长，使得系统辨识计算量很大，从而降低了该模型的实用性。因此实际中一般采用其简化模型。

5.2.2 记忆功率放大器的数学模型

5.2.2.1 Wiener 模型

Wiener 模型是最早用来描述记忆功率放大器的模型，它一般由一个线性时变系统来表征功率放大器的记忆效应，用一个无记忆的非线性系统来表征功率放大器的非线性，将两个系统级联构成。其结构图表示如下：

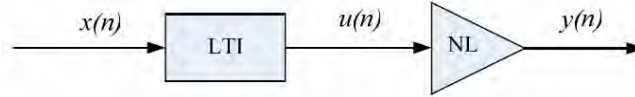


图 5.2.1 Wiener 功率放大器模型

其中；LTI 模块表示线性时变系统，它的数学模型为：
$$u(n) = \sum_{l=0}^{L-1} a_l x(n-l)$$

NI 模块表示非线性系统，它的数学模型为：
$$y(n) = \sum_{k=1}^K b_k u(n) |u(n)|^{k-1}$$

结合 LTI 与 NI 的表达式，可得输入输出的关系为；

$$y(n) = \sum_{k=1}^K b_k \left[\sum_{l=0}^{L-1} a_l x(n-l) \right] \left| \sum_{l=0}^{L-1} a_l x(n-l) \right|^{k-1} \quad (5.2.1)$$

上面三式中， a_l 为 LTI 线性系统中滤波器的函数系数， b_l 为 NL 非线性系统中函数的系数。L 为功率放大器模型记忆深度，K 为功放模型多项式的阶数。

5.2.2.2 Hammerstein 模型

Hammerstein 模型从结构上说，它是 Wiener 模型的逆模型，具有与 Wiener 模型相逆的特性，也是由一个线性时变模块 LTI 与无记忆的非线性模块 NL 级联而成，不同的是，输入信号先通过无记忆非线性模块 NL，然后再输入到线性时变模块（LTI）中产生输出信号，其结构图表示如下：

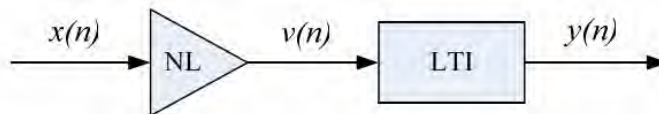


图 5.2.2 Hammerstein 功率放大器模型

其中：NL模块的输入输出数学表达式为：
$$v(n) = \sum_{k=1}^K b_k x(n)^k$$

LTI模块的输入输出数学表达式为：
$$y(n) = \sum_{l=0}^{L-1} c_l x(n-l)$$

上两式结合可得：

其输入输出表达式为：
$$y(n) = \sum_{l=0}^{L-1} c_l \left[\sum_{k=1}^K b_k x(n-l) \right] |x(n-l)|^{k-1} \quad (5.2.2)$$

其中 c_l 表示线性时变模块 LTI 的脉冲响应序列， b_k 表示奇数阶的无记忆线性多项式的系数，L 为功放模型的记忆深度，K 为功放模型的多项式阶数。

5.2.2.3 记忆多项式模型

记忆模型被认为是不对称的动态 AM/AM 和 AM/PM 模型，但实数或复数的多项式都不能描述互调失真分量的不对称性，它们仅表征的是 AM/AM 和 AM/PM 特性。记忆多项式模型在多项式的基础上，引入了记忆效应的影响，即加入了一些延迟单元和与延迟单元对应的非线性函数，可以看成是 Volterra 级数的一种简化。记忆多项式模型的结构如图所示：

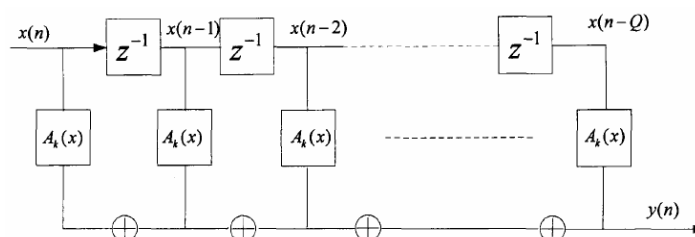


图 5.2.3 记忆多项式模型的结构图

记忆多项式功率放大器的模型输入输出关系可以表为：

$$y(n) = \sum_{q=0}^Q \sum_{k=1}^K a_{k,q} |x(n-q)|^{k-1} x(n-q) \quad (5.2.3)$$

其中 $x(n)$ ， $y(n)$ 分别表示输入、输出信号。K 为模型的阶数，Q 为模型的记忆深度。

通过对以上记忆功率放大器的数学模型比较，可知，Wiener模型结构虽然简单，但也存在着两个缺点：1)不能描述基于频率间隔的AM/AM和AM/PM函数形状的改变，2)不能描述瞬时频率间的相互关系。对于Hammerstein模型在功率放大器中，有时信号的上下边带失真很严重，但带内却没有明显失真，对于这种情形，标准Hammerstein模型很难准确表现。对于记忆多项式模型优点是形式简单，直观，参数少，可方便使用自适应LS算法辨识，实用性较强，广泛被应用于非线性功率放大器的建模和仿真中。在此问题中我们选择记忆多项式模型。

5.2.3 有记忆功放模型的建立于问题的求解

根据前面的分析，该问题用记忆多项式模型，记忆多项式功率放大器的模型输入输出关系可以表为：

$$z(n) = \sum_{q=0}^Q \sum_{k=1}^K a_{k,q} |y(n-q)|^{k-1} y(n-q) \quad (5.2.4)$$

其中 $x(n)$, $y(n)$ 分别表示输入、输出信号, $a_{k,q}$ 为系数。K 为模型的阶数, Q 为模型的记忆深度。

经过对问题的建模与求解, 可以发现阶数取5可以满足精度的要求, 可以很好的模拟出功放的模型, 在记忆功放当中, 我们同样选择阶数为5, 综合考虑精度和计算的复杂度, 我们选择记忆深度为3。由此可知 $K=5, Q=3$ 。

将给定输入与输出的数据 (在 pa_in_out_memory.mat 中) 输入到记忆多项式模型当中, 用最小二乘法, 可以逼近算出系数矩阵。

$$a_{1,0} = 14.4611 - 3.3133i, a_{2,0} = 7.4199 + 6.8854i, a_{3,0} = -4.3146 - 18.6977i$$

$$a_{4,0} = -19.1156 + 18.5343i, a_{5,0} = 18.3385 - 6.0562i, a_{1,1} = -22.9116 + 6.1373i$$

$$a_{2,1} = 2.4023 + 1.0762i, a_{3,1} = -18.3923 - 5.1083i, a_{4,1} = 46.1544 + 13.2887i$$

$$a_{5,1} = -33.9901 - 11.0081i, a_{2,2} = 28.3955 - 8.2316i, a_{2,2} = 2.3699 + 1.8782i$$

$$a_{5,1} = -33.9901 - 11.0081i, a_{2,1} = 28.3955 - 8.2316i, a_{2,2} = 2.3699 + 1.8782i$$

$$a_{3,2} = -6.7854 - 5.4553i, a_{4,2} = -30.9010 + 2.5875i, a_{5,2} = 26.7243 + 2.5303i$$

$$a_{1,3} = -12.0764 + 4.2646i, a_{2,3} = -1.7673 - 0.7521i, a_{3,3} = -0.6030 + 3.5126i$$

$$a_{4,3} = 10.4842 - 3.8910i, a_{5,3} = -10.3563 + 0.5956i$$

由求得的矩阵, 将给定的数据输入到记忆多项式里, 求得模拟输出与实际输出数据比较, 画出实际数据的与记忆多项式的AM/AM和AM/PM图形, 如图所示:

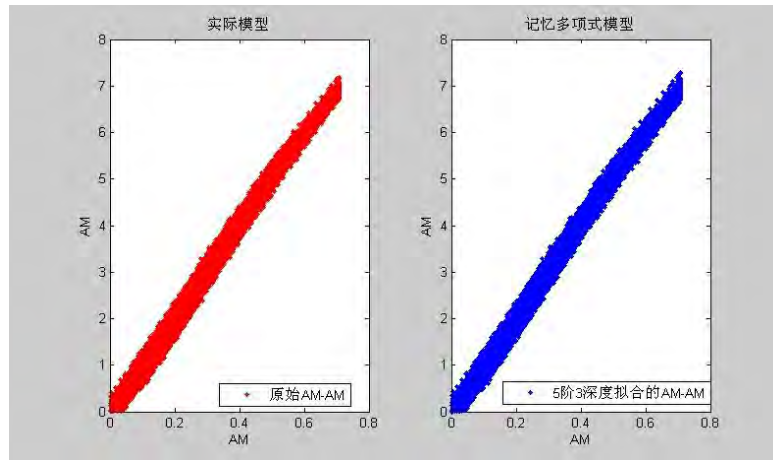


图5.2.4 AM/AM

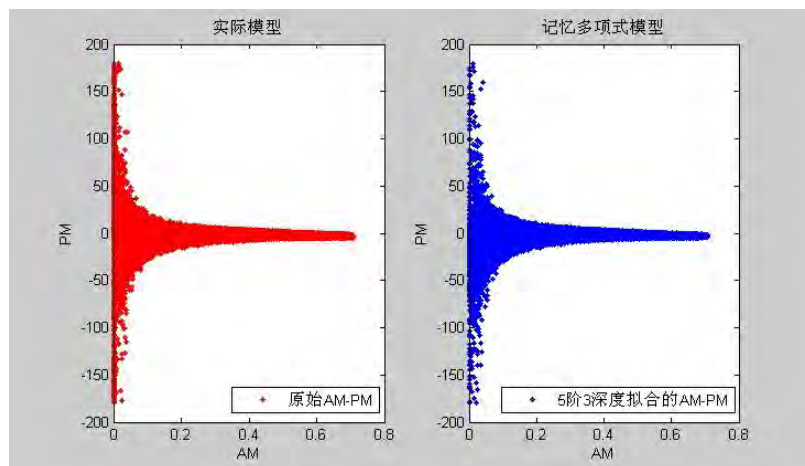


图5.2.5 AM/PM

从上图中可以清晰的看出功放输出信号的AM/AM和AM/PM曲线不再是一条清晰的曲线，而是一簇曲线，这就是由于“记忆效应”引起的。

从上图可以发现经过记忆多项式的输入数据和原输出数据在幅度和相位都有好的复合型。为了评价准确度。求出均方误差为：

$$NMSE = -44.5408$$

5.2.4 预失真处理有记忆功放模型的建立于问题的求解

5.2.4.1 预失真线性化实现方案

目前的参数模型法进行有记忆非线性功放的预失真线性化实现方案主要两种：直接学习结构和间接学习结构。

5.2.4.1.1 直接学习结构

直接学习结构如下所示；自适应算法根据输入与反馈信号的误差直接作用于预失真器，反复迭代更新预失真器的参数值，直到自适应算法收敛。

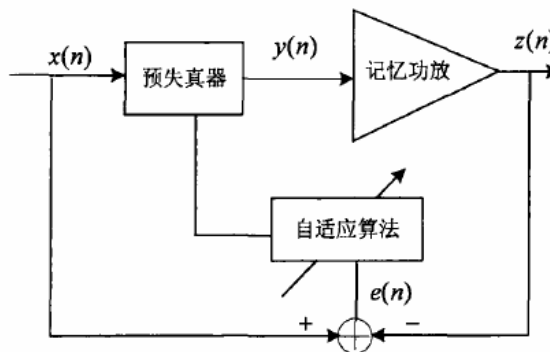


图5.2.6 直接学习结构

直接学习结构需要先建立功率放大器的模型,然后再求解预失真器模型，当功率放大器的模型较简单时,这种方法是可行的,但对于有记忆高阶非线性系统,辨识它的逆模型十分困难。此外,这种方法很难实现预失真器参数的自适应调整,当放大器特性发生变化时,系统性能会迅速下降。于是,在预失真实现过程中,采用另一种方法间接学习结构法,可以不建立放大器的模型,直接获得预失真器参数。

5.2.4.1.2 间接学习结构

间接学习结构如下图5所示;先设置一个自适应估计器,利用预失真器输出与反馈信号的误差来更新自适应估计器的参数值。自适应估计器和预失真器结构完全相同,用记忆功放的反模型结构来实现”估计器迭代直到自适应算法稳定后,将

估计器的参数值复制到预失真器。

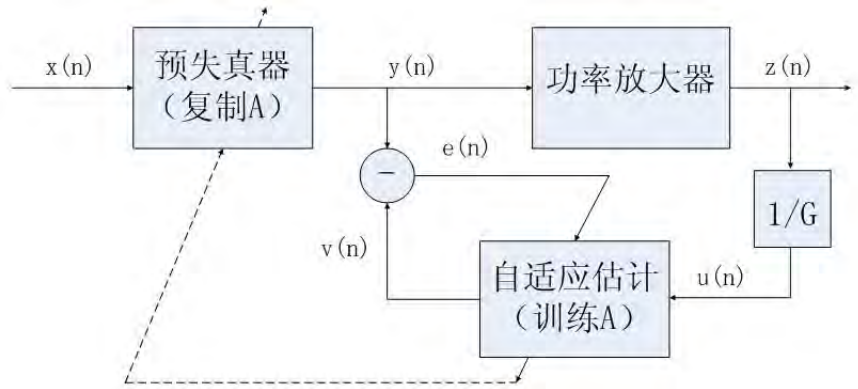


图5.2.7 间接学习结构

采用间接学习结构的好处是可以不需要先辨识出功率放大器的模型就可以直接辨识出预失真器参数,相对结构简单。预失真器和功放模型同直接学习结构一样,都采用记忆多项式模型,自适应估计器的输出为:

$$y(n) = \sum_{q=0}^Q \sum_{k=1}^K b_{k,q} |x(n-q)|^{k-1} x(n-q) \quad (5.2.5)$$

式中: K 为非线性的阶数, Q 为记忆效应长度, $a_{k,q}$ 为预失真器的系数。

5.2.4.2 预失真线性化求解

求解该问题, 我们使用间接求解模型, 用 LS 算法求解系数矩阵。在间接学习结构图中。将 $y(n)$ 与自适应估计器输出 $v(n)$ 进行比较, 得残差 $e(n) = y(n) - v(n)$, 用 $e(n)$ 调整自适应估计器参数。当自适应算法收敛后, 将自适应估计器参数复制到预失真器中, 这时认为功率放大器输出 $z(n)$ 是输入信号 $x(n)$ 的线性放大。

$$u(n) = z(n) / G \quad (5.2.6)$$

自适应估计器的输出为:

$$v(n) = \sum_{q=0}^Q \sum_{k=1}^K b_{k,q} |x(n-q)|^{k-1} x(n-q) = u(n)B \quad (5.2.7)$$

上式中: K 为非线性的阶数, Q 为记忆深度, $b_{k,q}$ 为系数。

$$u(n) = [u(n), u(n-1), \dots, u(n-Q), \dots, u(n) |u(n)|^{K-1}, \dots, u(n-Q) |u(n-Q)|^{K-1}] \quad (5.2.8)$$

$$B = [b_{1,0}, b_{1,1}, \dots, b_{1,Q}, \dots, b_{K,0}, b_{K,1}, \dots, b_{K,Q}]^T \quad (5.2.9)$$

自适应估计的误差为 $e(n)$:

$$e(n) = y(n) - v(n) = y(n) - u(n)\bar{B} \quad (5.2.10)$$

自适应估计器的参数 $b_{k,q}$, 最优估计 $\bar{b}_{k,q}$, 可以通过最小化均方误差 $J(n)$ 计算得到:

$$\begin{aligned} J(n) &= e^2(n) = (y(n) - v(n))^2 = (y(n) - u(n)\bar{B})^H (y(n) - u(n)\bar{B}) \\ &= y(n)^H y(n) - y(n)^H u(n)\bar{B} - \bar{B}^H u^H(n) y(n) + \bar{B}^H u^H(n) u(n) \bar{B} \\ &= y^2(n) - [\bar{B}^H u^H(n) y(n)] + [\bar{B}^H u^H(n) \bar{B}] \\ &= y^2(n) - 2\bar{B}^H R_{zy} + \bar{B} R_{zz} \bar{B} \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

上式中: R_{zy} 表示输入信号 $u(n)$ 的互相关矩阵 R_{zz} 表示输入信号 $u(n)$ 的自相关矩阵, $\bar{B}$ 为 B 的估计值。

目标函数 $J(n)$ 为参数矢量 $\bar{B}$ 的二次函数, 其图形一般为中间下凹的抛物面, 存在最小值点。目标函数最小时, $J(n)$ 的梯度为0, 即有

$$\nabla J(n) = \frac{\partial J(n)}{\partial (\bar{B})} = 0 \quad (5.2.12)$$

根据上式可得 $R_{zz} \bar{B} - R_{zy} = 0$, 那么可以得到 $\bar{B}$ 的计算因子为:

$$\bar{B} = R_{zz}^{-1} R_{zy} = (u(n)^H u(n))^{-1} u(n)^H y(n) \quad (5.2.13)$$

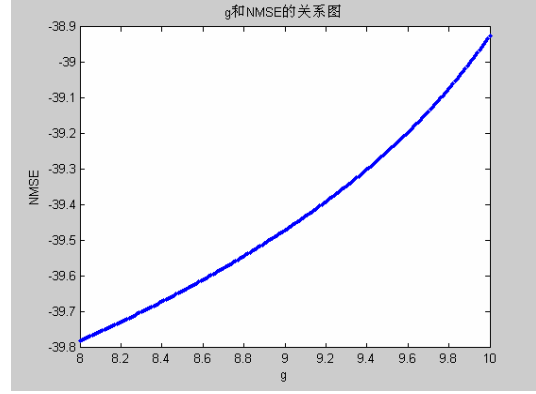
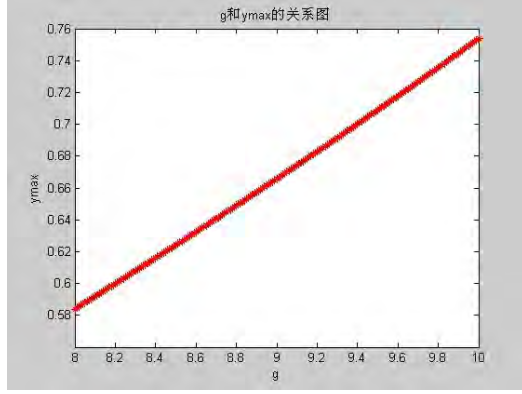
通过给定的输入与输出数据, 我们大致的估计出放大倍数 g 的取值范围, 在此我们估计 $g \in (8, 10)$, 为了求出自适应估计的系数矩阵, 我们选择 g 以 $\alpha = 0.001$ 为步长, 逐次增加 g 的大小。同求解问题一一样, 存在约束条件:

$$\max(|y(n)|) \leq \max(|x(m)|) \quad (5.2.14)$$

$$f = \max(|y(n)|) \quad (5.2.15)$$

$$\text{目标函数取最小: } NMSE = 10 \log_{10} \frac{\sum_{n=1}^N |z(n) - \hat{z}(n)|^2}{\sum_{n=1}^N |z(n)|^2} \quad (5.2.16)$$

经过迭代可得出 g 与预处理输出函数输出幅度关系图和均方误差 NMSE 与 g 的关系图。如下图所示:



(a) g和预失真处理输出幅度max关系图

(b) g 和 NMSE 关系图

图5.2.8 g与预失真输出幅度最大值和NMSE关系图

通过(a)图发现,放大倍数g与预失真处理输出幅度最大值成线性关系,随着g的增大,预失真输出成线性增加。通过(b)图,发现g与均方误差NMSE成指数关系,随着g的增大,均方误差成指数增加,但是均方误差的增加数量级很小,保持(-38.9,39.8),范围非常的小。

由于 $\max(|x(n)|) = 0.7079$, 所以 $\max(|y(n)|) \leq 0.7079$

这样限制了g的取值范围,因为g的增加对均方误差影响较小,为了使输出功率达到最大,此时我们取 $\max(|y(n)|) = 0.7079$, 可得 $g = 9.489$, 由此我们求出预失真处理函数系数矩阵:

$$b_{1,0} = 0.7262 + 0.5426i, b_{1,1} = 1.6098 - 1.1576i, b_{1,2} = -2.1191 + 1.3449i$$

$$b_{1,3} = 0.9313 - 0.5982i, b_{2,0} = -0.9236 + 0.8900i, b_{2,1} = -0.3527 + 0.1062i$$

$$b_{2,2} = 0.0510 + 0.0950i, b_{2,3} = 0.2522 - 0.0841i, b_{3,0} = 1.9414 - 2.1481i$$

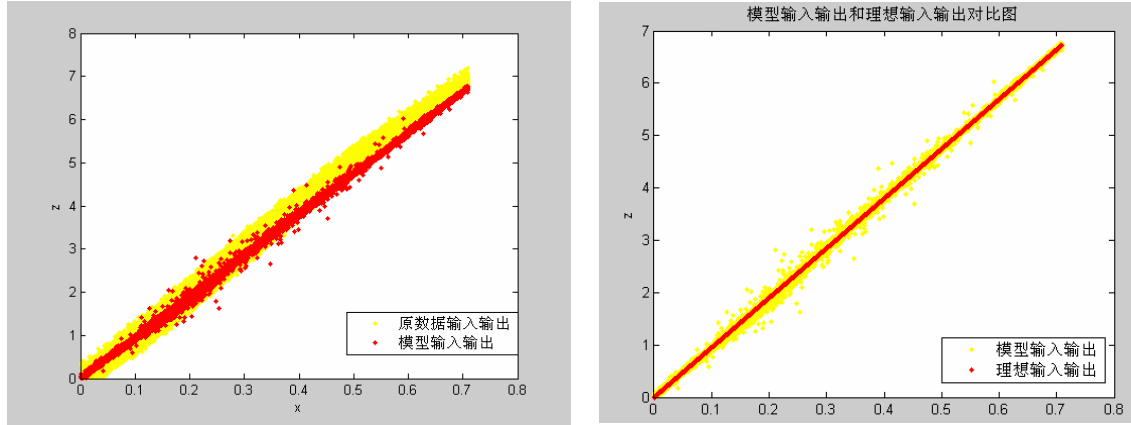
$$b_{3,1} = 0.3324 - 1.2952i, b_{3,2} = 0.6493 + 0.5844i, b_{3,3} = -1.1568 + 0.0356i$$

$$b_{4,0} = -1.0979 + 2.2230i, b_{4,1} = -1.5880 + 2.5349i, b_{4,2} = 0.2129 - 1.4368i$$

$$b_{4,3} = 1.0751 + 0.0974i, b_{5,0} = 0.0031 - 0.9684i, b_{5,1} = 1.9000 - 1.4538i$$

$$b_{5,2} = -1.4131 + 0.9116i, b_{5,3} = 0.0879 - 0.1073i$$

这样我们就可以由预失真处理中记忆多项式的系数,可求得预失真处理的输出数据,因为功放的模型我们已经求得,数据经过功放可得到模拟的输出数据。为了验证模型建立的准确度,我们画出模拟数据和理想数据的比较,如下图所示:



(a)实际数据与模型幅度输入/输出对比图 (b)模型与理想幅度输入/输出对比图

图5.2.9 模型AM/AM的对比图

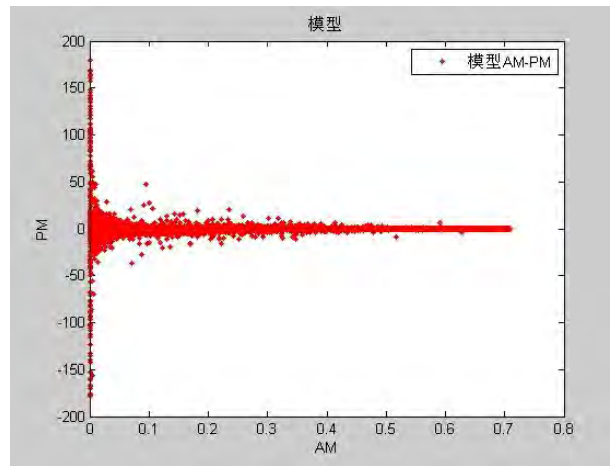


图5.2.10 模型的AM/PM图

通过上图可以发现建立的模型合理与原数据很好的复合。相位差基本保持一致，幅度成线性关系。为了评价模型的准确度，我们将数据代入均方误差公式中可得：

$$NMSE = -38.1759$$

求出误差矢量幅度EVM为： $EVM = 0.13\%$

通过以上的数据可以看出，在此时输出功率达到了最大，误差幅度精度很高，均方误差也非常的小。

综上所述：

求得预失真放大倍数为： $g = 9.489$

$$\text{预失真处理的数学模型为： } y(n) = \sum_{q=0}^Q \sum_{k=1}^K b_{k,q} |x(n-q)|^{k-1} x(n-q)$$

系数为：

$$b_{1,0}=0.7262 + 0.5426i, b_{1,1}=1.6098 - 1.1576i, b_{1,2}=-2.1191 + 1.3449i$$

$$b_{1,3}=0.9313 - 0.5982i, b_{2,0} = -0.9236 + 0.8900i, b_{2,1}=-0.3527 + 0.1062i$$

$$b_{2,2}=0.0510+0.0950i, b_{2,3}=0.2522-0.0841i, b_{3,0}=1.9414-2.1481i$$

$$b_{3,1}=0.3324-1.2952i, b_{3,2}=0.6493+0.5844i, b_{3,3}=-1.1568+0.0356i$$

$$b_{4,0}=-1.0979+2.2230i, b_{4,1}=-1.5880+2.5349i, b_{4,2}=0.2129-1.4368i$$

$$b_{4,3}=1.0751+0.0974i, b_{5,0}=0.0031-0.9684i, b_{5,1}=1.9000-1.4538i$$

$$b_{5,2}=-1.4131+0.9116i, b_{5,3}=0.0879-0.1073i$$

$$\text{功放的数学模型为: } z(n) = \sum_{q=0}^Q \sum_{k=1}^K a_{k,q} |y(n-q)|^{k-1} y(n-q)$$

系数为:

$$a_{1,0}=14.4611-3.3133i, a_{2,0}=7.4199+6.8854i, a_{3,0}=-4.3146-18.6977i$$

$$a_{4,0}=-19.1156+18.5343i, a_{5,0}=18.3385-6.0562i, a_{1,1}=-22.9116+6.1373i$$

$$a_{2,1}=2.4023+1.0762i, a_{3,1}=-18.3923-5.1083i, a_{4,1}=46.1544+13.2887i$$

$$a_{5,1}=-33.9901-11.0081i, a_{2,1}=28.3955-8.2316i, a_{2,2}=2.3699+1.8782i$$

$$a_{5,1}=-33.9901-11.0081i, a_{2,1}=28.3955-8.2316i, a_{2,2}=2.3699+1.8782i$$

$$a_{3,2}=-6.7854-5.4553i, a_{4,2}=-30.9010+2.5875i, a_{5,2}=26.7243+2.5303i$$

$$a_{1,3}=-12.0764+4.2646i, a_{2,3}=-1.7673-0.7521i, a_{3,3}=-0.6030+3.5126i$$

$$a_{4,3}=10.4842-3.8910i, a_{5,3}=-10.3563+0.5956i$$

5.3 问题 3 模型的建立与求解

5.3.1 建立模型画功率谱密度图:

1、周期图法

周期图法是直接将信号的采样数据 $x(t)$ 进行 Fourier 变换求取功率谱密度估计的方法。把序列 $x(t)$ 的观测数据视为一能量有限的序列，直接计算 $x(t)$ 的离散傅立叶变换，然后再取其幅值的平方，并除以 N ，作为序列 $x(n)$ 真实功率谱的估计^[4]。对于周期图的功率谱估计，当数据长度 N 太大时，谱曲线起伏加剧，若 N 太小，谱的分辨率又不好，因此需要改进。

$$\hat{S}_x(k) = \frac{1}{N} |FFT[x(t)]|^2, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.3.1)$$

2、最大熵法

$$\hat{S}_{Nx}(\omega) = \frac{P_M}{2B \left| 1 + \sum_{m=1}^M a_m e^{-jm\omega\Delta t} \right|^2} \quad (5.3.2)$$

式中 PM 为 M 阶预测误差滤波器的输出功率; B 为随机过程的带宽; $\Delta t = \frac{1}{2B}$

为采样周期。

最大熵法其原理是取一组时间序列,使其自相关函数与一组已知数据的自相关函数相同,同时使已知自相关函数以外的部分的随机性最强,以所取时间序列的谱作为已知数据的谱估值。它等效于根据使随机过程的熵为最大的原则,利用 N 个已知的自相关函数值来外推其他未知的自相关函数值所得到的功率谱。最大熵法功率谱估值是一种可获得高分辨率的非线性谱估值方法。

一个平稳的随机序列,可以用周期图法对其功率谱进行估值。这种估值方法隐含着假定未知数据是已知数据的周期性重复。现有的线性谱估计方法是假定未知数据的自相关函数值为零,这种人为假定带来的误差较大。最大熵法是利用已知的自相关函数值来外推未知的自相关函数值,去除了对未知数据的人为假定,从而使谱估计的结果更为合理。

最大熵功率谱估计法假定随机过程是平稳高斯过程,可以证明,随机信号的最大熵谱与 AR 自回归(全极点滤波器)模型谱是等价的。

通过 matlab 中的 `periodogram` 函数和 `pmem` 函数实现以上两种算法,画出输入信号、无预失真补偿的功率放大器输出信号、采用预失真补偿的功率放大器输出信号这三个信号的功率谱密度图,如下:

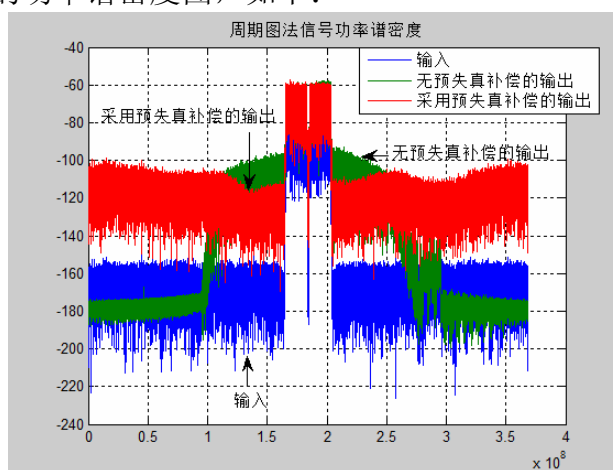


图 5.3.1 周期图法信号功率密度图

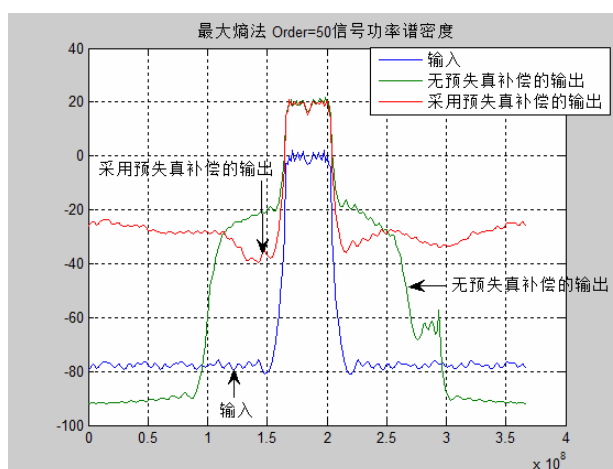


图 5.3.2 最大熵法信号功率密度图

从图中可以看出最大熵法比周期图法的分辨率稍微降低(主瓣较宽),但噪

声小，且功率谱密度曲线较平滑（编程时改变参数 Order 的值，即全极点滤波器阶次，可改善曲线平滑度）。

与直接利用 FFT 变换相比，由于直接基于 FFT 变换的周期图法对信号功率谱的估计是有偏的非一致的估计，信号的功率谱含有很多噪声。而最大熵模型法明显改善了功率谱估计的统计特性，功率谱曲线更加平滑且噪声低。由此说明，最大熵法在功率谱的计算上显示出了优越性。

综合考虑采用最大熵法画图。

5.3.2 计算 ACPR

相邻信道功率比（Adjacent Channel Power Ratio, ACPR）是表示信道的带外失真的参数，衡量由于非线性效应所产生的新频率分量对邻道信号的影响程度。其定义为

$$ACPR = 10 \log_{10} \frac{\int_{f_2}^{f_3} s(f) df}{\int_{f_1}^{f_2} s(f) df} \quad (5.3.3)$$

其中 $s(f)$ 为信号的功率谱密度函数， $[f_1, f_2]$ 为传输信道， $[f_2, f_3]$ 为相邻信道，通过图形取点可知：

$$f_1 = 184.3 \text{ MHz} \quad f_2 = 204.3 \text{ MHz} \quad f_3 = 224.3 \text{ MHz}$$

ACPR 的求取关键在于对 $s(f)$ 的积分，采用矩形模型计算 $s(f)$ 的积分：

利用矩形法可以求定积分，其原理是将被积分量 x 等分成 n 份长为 h ，每个区域中积分面积由红色矩形面积 $f(a+n \cdot h) \cdot h$ 替代（如图所示）份数 n 越大，则计算越精确。例如求函数 $f(x) = \sin(x)$ 在 (a, b) 区间的定积分公式为：

$$\begin{aligned} s &= f(a+h) \cdot h + f(a+2 \cdot h) \cdot h + \cdots + f(a+n \cdot h) \cdot h \\ &= h \cdot (f(a+h) + f(a+2h) + f(a+3h) + \cdots + f(a+nh)) \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

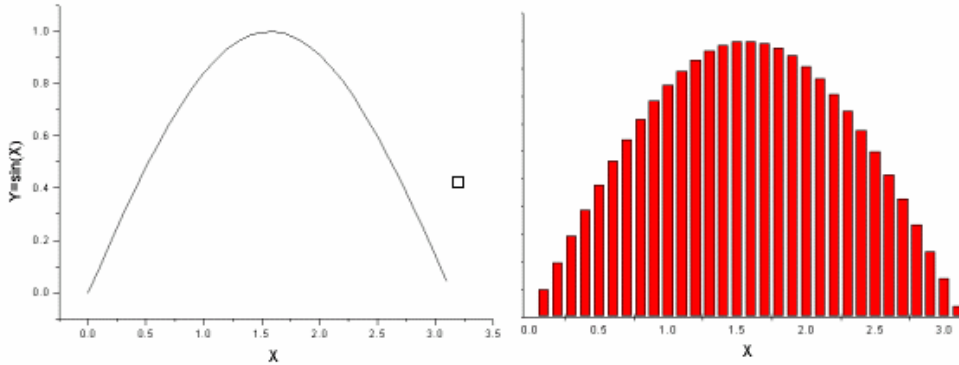


图 5.3.3 矩形法求定积分的模型原理图

题 2 所附的数据采样频率 $F_s = 30.72 \times 12 \text{ MHz}$ ，传输信道按照 20 MHz 来算，邻信道也是 20 MHz 。

采用矩形法对通过最大熵法求得的采用预失真补偿前后的输出信号功率谱密度进行积分，并计算 ACPR 分别为：

预失真补偿前：ACPR=-30.7666；

预失真补偿后：ACPR=-35.7587。

通过 ACPR 的减小可以判断，本文采用的预失真模型有效地减小了非线性效应所产生的新频率分量对邻道信号的影响。

六 模型的评价

模型的优点:

- (1) 幂级数模型拟合非记忆功放和预失真模型算法简单, 精度很高;
- (2) 记忆多项式模型是 *volterra* 模型的简化形式, 优点是形式简单, 直观, 可方便使用自适应 LS 算法辨识预失真模型参数, 描述其较强的非线性效应和记忆效应, 实用性较强, 广泛被应用于非线性功率放大器的建模和仿真中;
- (3) 问题 1 和 2 中所求评估指标 NMSE 和 EVM 均很小, 可见所采用的模型精度是很高;
- (4) 最大熵模型法明显改善了功率谱估计的统计特性, 功率谱曲线更加平滑且噪声低;
- (5) 本文采用的预失真模型有效地减小了非线性效应所产生的新频率分量对邻道信号的影响。

模型的缺点:

- (1) 若考虑阶次较高、长时记忆效应的记忆多项式模型的参数非常多, 而且不易于通过电路实现;
- (2) 记忆性功放在采用本文的预失真模型后, 通过功率谱密度图可看出高频和低频部分噪声被放大, 必须采取措施改善模型加以抑制;

参考文献

- [1] 韩国玺, 刘春生. 一种基于 QR-RLS 算法的多项式预失真方法[J]. 电子信息对抗技术, 2010, 5(3): 31-34.
- [2] 祝乐芳. 功率放大器的非线性预失真技术的研究[D]. 辽宁: 沈阳理工大学, 2012
- [3] 万亮. 数字预失真短波功率放大器线性化研究[D]. 江西: 南昌大学, 2010.
- [4] 王凤瑛, 张丽丽. 功率谱估计及其 MATLAB 仿真[J]. 仿真技术, 2006 (22), 11 (1): 287-289.