

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第十一届华为杯全国研究生数学建模竞赛

学 校 解放军电子工程学院

参赛队号 90019007

队员姓名	1. 王新宇
	2. 张璟琿
	3. 吕大千

参赛密码 _____
(由组委会填写)



第十一届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题目 乘用车物流运输计划问题研究

摘 要：

本文针对乘用车物流运输计划问题，应用运筹学方法展开研究。对单目的地物流运输计划，建立乘用车装载规划模型，给出明确的最优解和装载方案；对多目的地物流运输计划，运用推理与启发式算法，结合计算机计算机软件，得出较为优选的方案。

针对问题一、问题二和问题三，将物流运输计划问题抽象为多目标整数规划问题，分别构建出单目的地情况下 I II 车装载规划模型（见式 5-6），单目的地情况下 II III 车装载规划模型（见式 5-7）和单目的地情况下 I II III 车装载规划模型（见式 5-8）。模型根据“数量原则”和“成本原则”建立目标函数，根据“平稳原则”、“高度原则”、“比例原则”建立约束条件。。

在此基础上，根据“距离原则”穷举单辆轿运车的可行装载方案，运用 Matlab 第三方工具箱 yalmip，编写通用计算程序，并采用基于贯序算法的思想对模型进行求解。其中，问题一的最优解为 $x=16, y=2$ ，最优装载方案见图 2；问题二的最优解为 $x=12, y=1$ ，最优装载方案见图 4；问题三的最优解为 $x=25, y=5$ ，最优装载方案见图 6。依照题目要求，通用计算程序可从 excel 中格式化的输入运输任务，并将计算结果写入新的 excel 文件中去。

针对问题四，提出了两种可行的运输路线方案，在前三问的基础上，建立了改进型的装载规划模型（见式 5-9、5-10），编写了计算程序，通过软件计算，比较两可行方案的行驶里程数，选择出最优的运输路线方案（为第二条路线）和具体的轿运车装载方案（见表 15），得出最优解为 $x=21, y=4$ ，最短总里程是 6404。

针对问题五，首先对数据进行分析和预处理，根据长度、高度将 45 种乘用车划分为三类（见表 16），根据长度将轿运车分为多类；而后根据各目的地需求，利用软件求解各型轿运车的装载方案（见表 18）；最后，将方案中各种情况设为变量，求解模型五的规划问题（式 5-11）。经过编程计算，得出需要的车辆数为 113，各型轿运车使用数量见表 19。

本文由简到难，建立了一系列针对单目的地、多目的地情况下的乘用车装载规划模型，研究了复杂物流运输任务下的运输计划制定准则，解算了装载方案，旨在为物流公司制定运输计划提供便利。然而，现实中的整车物流业务比题目所给的要复杂的多、庞大的多，车型种类也更加繁杂，因此本文所做的工作更多的是作为工作人员的一种辅助决策工具，功能完善方便实用的乘用车物流规划软件还需要花费更多的人力物力精力来开发。

关键词：物流运输 装载方案 行车路线 轿运车 乘用车 贯序算法 模型

目 录

一、问题的重述.....	- 6 -
二、合理假设及符号系统.....	- 7 -
2.1 合理假设.....	- 7 -
2.2 符号系统.....	- 7 -
三、问题的分析.....	- 7 -
3.1 对问题一的分析.....	- 7 -
3.2 对问题二的分析.....	- 8 -
3.3 对问题三的分析.....	- 8 -
3.4 对问题四的分析.....	- 8 -
3.5 对问题五的分析.....	- 9 -
四、建模前的准备.....	- 9 -
4.1 明确装载条件.....	- 9 -
4.2 建立目标函数.....	- 10 -
五、模型的建立与求解.....	- 10 -
5.1 问题一：单目的地情况下 I II 车装载规划模型的建立与求解.....	- 10 -
5.1.1 单量轿运车装载方案的确定.....	- 10 -
5.1.2 轿运车需求总数边界的确定.....	- 12 -
5.1.3 单目的地情况下 I II 车装载规划模型的建立.....	- 12 -
5.1.4 模型的求解.....	- 13 -
5.1.5 模型的结果.....	- 14 -
5.2 问题二：单目的地情况下 II III 车装载规划模型的建立与求解.....	- 15 -
5.2.1 单辆轿运车装载方案的确定.....	- 15 -
5.2.2 单目的地情况下 II III 车装载规划模型的建立.....	- 16 -
5.2.3 模型的求解.....	- 16 -
5.2.4 模型的结果.....	- 17 -
5.3 问题三：单目的地情况下 I II III 车装载规划模型的建立与求解.....	- 17 -
5.3.1 单辆轿运车装载方案的确定.....	- 17 -
5.3.2 单目的地情况下 I II III 车装载规划模型的建立.....	- 21 -
5.3.3 模型的求解.....	- 21 -
5.3.4 模型的结果.....	- 22 -
5.4 问题四：多目的地情况下 I II 车装载规划模型的建立与求解.....	- 23 -
5.4.1 轿运车需求总数边界的确定.....	- 23 -
5.4.2 可行运输装载方案的分析.....	- 24 -
5.4.3 多目的地情况下 I II 车装载规划模型的建立与求解.....	- 25 -
5.4.4 结论.....	- 28 -

5.5 问题五：多目的地情况下多类型乘用车装载规划模型的建立与求解	- 29 -
5.5.1 数据处理与分析	- 29 -
5.5.2 多目的地情况下多类型乘用车装载规划模型的建立	- 29 -
5.5.3 模型的求解与结果分析	- 33 -
六、模型的评价与推广	- 34 -
6.1 模型的评价	- 34 -
6.2 模型的推广	- 34 -
参考文献	- 34 -
附录一	- 35 -

一、问题的重述

整车物流指的是按照客户订单对整车快速配送的全过程。随着我国汽车工业的高速发展，整车物流量，特别是乘用车的整车物流量迅速增长。乘用车生产厂家根据全国客户的购车订单，向物流公司下达运输乘用车到全国各地的任务，物流公司则根据下达的任务制定运输计划并配送这批乘用车。为此，物流公司首先要从他们当时可以调用的“轿运车”中选择出若干辆轿运车，进而给出其中每一辆轿运车上乘用车的装载方案和目的地，以保证运输任务的完成。

装载具体要求如下：每种轿运车上、下层装载区域均可等价看成长方形，各列乘用车均纵向摆放，相邻乘用车之间纵向及横向的安全车距均至少为 0.1 米，下层力争装满，上层两列力求对称，以保证轿运车行驶平稳。受层高限制，高度超过 1.7 米的乘用车只能装在 1-1、1-2 型下层。轿运车、乘用车规格如下所示：

表 1 乘用车规格

乘用车型号	长度(米)	宽度(米)	高度(米)
I	4.61	1.7	1.51
II	3.615	1.605	1.394
III	4.63	1.785	1.77

表 2 轿运车规格

轿运车类型	上下层长度(米)	上层宽度(米)	下层宽度(米)
1-1	19	2.7	2.7
1-2	24.3	3.5	2.7

请为物流公司安排以下五次运输，在满足具体装载要求的前提下，制定详细计划，含所需要各种类型轿运车的数量、每辆轿运车的乘用车装载方案、行车路线，并给出优化模型、计算程序。

1. 物流公司要运输 I 车型的乘用车 100 辆及 II 车型的乘用车 68 辆。
2. 物流公司要运输 II 车型的乘用车 72 辆及 III 车型的乘用车 52 辆。
3. 物流公司要运输 I 车型的乘用车 156 辆、II 车型的乘用车 102 辆及 III 车型的乘用车 39 辆。
4. 物流公司要运输 166 辆 I 车型的乘用车（其中目的地是 A、B、C、D 的分别为 42、50、33、41 辆）和 78 辆 II 车型的乘用车（其中目的地是 A、C 的，分别为 31、47 辆），各段长度：OD=160，DC=76，DA=200，DB=120，BE=104，AE=60。

5. 附件的表 1 给出了物流公司需要运输的乘用车类型（含序号）、尺寸大小、数量和目的地，附件的表 2 给出可以调用的轿运车类型（含序号）、数量和装载区域大小（表里数据是下层装载区域的长和宽，1-1 型及 1-2 型轿运车上、下层装载区域相同；1-2 型轿运车上、下层装载区域长度相同，但上层比下层宽 0.8 米。此外 1-2 型轿运车因为层高较低，上、下层均不能装载高度超过 1.7 米的乘用车）。

二、合理假设及符号系统

2.1 合理假设

1. 为降低计算复杂度，在列举单量轿运车可行装载方案时，将明显劣的方案剔除。
2. 当上层左右两列的乘用车数量相等时，就认为满足题目要求的“上层两列力求对称”。
3. 将问题四中运输路线看做有向图处理，即不考虑轿运车折返运输。

2.2 符号系统

符号	说明
x	一次运输规划中使用 1-1 型轿运车的数量
y	一次运输规划中使用 1-2 型轿运车的数量
z	一次运输规划中使用 2-2 型轿运车的数量
t	一次运输规划中使用的各型轿运车的总数，即 $t=x+y+z$
x_i	1-1 型轿运车装载乘用车可有多种方案，其中 i 表示第 i 个装载方案， x_i 表示采用第 i 种装载方案的 1-1 型轿运车数量
y_j	1-2 型轿运车装载乘用车可有多种方案，其中 j 表示第 j 个装载方案， y_j 表示采用第 j 种装载方案的 1-2 型轿运车数量
z_p	2-2 型轿运车装载乘用车可有多种方案，其中 p 表示第 p 个装载方案， z_p 表示采用第 p 种装载方案的 2-2 型轿运车数量

三、问题的分析

3.1 对问题一的分析

问题一要求采用 1-1、1-2 型轿运车运输 100 辆 I 型乘用车、68 辆 II 型乘用车，制定详细计划，给出所需各种类型轿运车的数量及每辆轿运车的装载方案。其主要要求包括建立模型，解算出最优方案并给出程序，难点主要包括：

1. 由题目约定的运输成本规则可知，目标函数将是一个多目标规划问题，同时车辆运输方案又是一个整数规划问题，如何借助计算机工具进行解算是一个难点；
2. 现实的装载方案需要考虑安全、成本、工具等限制，如何在模型中构建约束条件，客观反映实际情况，需要认真考虑；
3. 可行的装载方案将非常繁多，如何做到全局搜索，找到其中的最优方案。

通过分析上述问题可知，解决问题的关键：一是根据约束条件，穷举出所有的可行方案，设置预处理原则，剔除明显劣的方案，降低计算复杂度；二是深刻

理解限制条件，进行合理转化，建立客观可行的约束规则；三是研究能够解决多目标整数规划的算法，查找有效的计算机编程工具。

综上所述，本问题的求解思路为：首先对单辆 1-1、1-2 型轿运车的可行装载方案进行归纳总结。其次根据题目要求，从轿运车使用数量最少、1-1 型轿运车成本低于 1-2 两个方面入手，确定目标函数。然后根据可行装载方案找出两种轿运车运载车数的极限值。最后将每种装载方案数量设为变量，根据运输乘用车总数、所需轿运车极限值确定整数规划的约束条件，并利用工具软件求解问题。

3.2 对问题二的分析

问题二要求采用 1-1、1-2 型轿运车运输 72 辆 II 型乘用车、52 辆 III 型乘用车，制定详细计划，给出所需各种类型轿运车的数量、每辆轿运车的装载方案。问题二与问题一类似，区别在于，III 型乘用车由于高度超过 1.7m，只能装在轿运车的下层，因此该题的难点是：

研究 III 型乘用车高度限制带来的变化，从而建立新的规划模型。

通过上述分析可知，本问题的求解思路为：研究该运输任务下，可行的所有方案，借鉴问题一的求解思路进行建模和解算。

3.3 对问题三的分析

问题三要求采用 1-1、1-2 型轿运车运输 156 辆 I 型乘用车、102 辆 II 型乘用车和 39 辆 III 型乘用车，制定详细计划，给出所需各种类型轿运车的数量、每辆轿运车的装载方案，并给出一个通用程序。问题三实际上是问题一和问题二的综合，本质是相同的规划问题，但存在以下难点：

1. 乘用车增加到三种的情况下，如何穷举出所有可行方案是一件非常困难的事情；

2. 如何能依照题目要求，并站在软件用户的角度考虑，去编写一个可以通过读入 excel 初始数据进行求解运算，再将运算结果返回写入另一个 excel 文件中去的通用计算软件，时间紧，难度大。

通过上述分析可知，解决该问题的关键在于：运用排列组合的原理，认真仔细的穷举出所有的可行方案，同时按照一定规则进行预处理，剔除不必要的一些方案，降低运算复杂度。借鉴问题一和问题二的求解思路进行建模和解算。

3.4 对问题四的分析

问题四是问题一的扩展，引入了运输目的地这个新的需求。要求将一定数量的 I 型、II 型乘用车运送到不同距离的目的地，不同目的地对不同类型的乘用车需求量不同，使轿运车总数最少并且行车总里程数最小。该题主要存在以下难点：

1. 不仅要完成 166 辆 I 型乘用车和 78 辆 II 型乘用车的运输任务，还要满足不同目的地的不同乘用车需求，对装载方案的选择要求增大；

2. 各个目的地处在不同的方向，不同方向上的轿运车运输车队必须满足该方向所有目的地的需求，出发后存在运输路线选择的问题；

3. 到达各目的地的装载方案对轿运车的使用构成没有比例约束要求，但对总的轿运车的使用构成有比例约束要求。

针对以上难点，确定本题的研究思路为：首先根据总的乘用车运输需求，以及各目的地不同的乘用车运输需求，利用前三问的通用程序，确定轿运车需求总数的数量区间；其次，根据各目的地的方向，确定轿运车的运输路线方案；然后，改进前三问的通用模型和程序，求解出可行的具体装载方案；最后，在轿运车使用数量及型号均相同的情况下，比较各可行方案的行驶总里程数，选择行驶总里程数小的装载方案为最优方案。

3.5 对问题五的分析

问题五是问题四的扩展，且与实际联系更加紧密，要求将 45 种型号的乘用车根据运送目的地的需求数运送到各自的目的地，使轿运车总数最少并且行车总里程数最小。

该题主要存在以下难点：

1. 乘运车车型种类繁多，数据量巨大，很难找到满足题目要求的最优解，对编程要求难度较高。

2. 在求解过程中，乘运车与轿运车种类较之第四问均有明显的增多，这样一来，增加了模型复杂度，也延长了求解时间。

针对以上难点，确定本题的求解思路为：首先，对附表二中给出的 45 种车型进行研究，根据乘运车长度、高度将 45 种乘运车划分为三类；其次，对附表一中给出的多种轿运车车型进行研究，根据车长度将轿运车分为多类，并根据各目的地需求，利用软件求解各型轿运车的装载方案。然后，将方案中各种情况设为变量，再次求解该线性规划问题。

四、建模前的准备

4.1 明确装载条件

根据题目要求和实际情况，乘用车物流运输规划的装载方案面临很多限制，主要把握以下六条原则：

1. 数量原则：影响成本高低的首先是轿运车使用数量；
2. 成本原则：影响成本高低的首先是轿运车使用数量；其次，在轿运车使用数量相同情况下，1-1 型轿运车的使用成本较低，其次为 1-2 型，最高为 2-2 型。
3. 距离原则：相邻乘用车之间纵向及横向的安全车距均至少为 0.1 米；
4. 平稳原则：下层力争装满，上层两列保持车数对称；
5. 高度原则：受层高限制，高度超过 1.7 米的乘用车只能装在 1-1、1-2 型下层；
6. 比例原则：每次 1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%；

4.2 建立目标函数

由 4.1 节“成本原则”可知，装载规划应满足以下两点：

1. 1-1 型、1-2 型、2-2 型轿运车需要的数量之和 t 最小；
2. 当轿运车总数相等时，优先选择 1-1 型轿运车，其次是 1-2 型轿运车，最后是 2-2 型轿运车。

因此本装载规划是一个多目标规划问题，其目标函数应满足：

$$\min P_1(x+y+z)+P_2(z)+P_3(y) \quad (4-1)$$

式中， $P \gg_1 P_2 \gg P_3$ 表示第一个目标的重要性远远高于第二个目标，第二个目标的重要性远远高于第三个目标。

五、模型的建立与求解

5.1 问题一：单目的地情况下 I II 车装载规划模型的建立与求解

5.1.1 单量轿运车装载方案的确定

该问题是研究采用 1-1 型和 1-2 型两种轿运车运输 100 辆 I 型乘用车及 68 辆 II 型乘用车。

为列出装载的可行方案，将 1-1 型轿运车上下两层看作独立的两部分，将 1-2 型上层左右两列及下层看作独立的三部分。设每一部分可装载 I 型乘用车 a 量，II 型乘用车 b 辆，由 4.1 节“距离原则”和表 1、表 2 中轿运车、乘用车的规格知，

$$4.61a+3.615b+0.1 \times (a+b-1) < 19 \quad (5-1)$$

$$4.61a+3.615b+0.1 \times (a+b-1) < 24.3 \quad (5-2)$$

由式 (5-1) (5-2) 可分别求出 1-1 型轿运车和 1-2 型轿运车所有可行的装载方案。为简化运算，将明显劣的可行方案剔除：如 1-1 型轿运车上层可装 3 量 I 型乘用车和 1 量 II 型乘用车，也可以装 2 量 I 型乘用车和 1 量 II 型乘用车，第二个方案显然比第一个方案劣，因此直接剔除。下面表 3 给出经过预处理的装载方案

表 3 每层轿运车的可行装载方案

1-1 型 轿运车	上层	4 I	3 I 1 II	2 I 2 II	1 I 3 II	5 II	
	下层	4 I	3 I 1 II	2 I 2 II	1 I 3 II	5 II	
1-2 型 轿运车	上层左列	5 I	4 I 1 II	3 I 2 II	2 I 4 II	1 I 5 II	6 II
	上层右列	5 I	4 I 1 II	3 I 2 II	2 I 4 II	1 I 5 II	6 II
	下层	5 I	4 I 1 II	3 I 2 II	2 I 4 II	1 I 5 II	6 II

注：表 3 第一行中“3 I 1 II”表示 1-1 型轿运车上层可装载 3 量 I 型乘用车和 1 量 II 型乘用车，其他与此类似，不再赘述。

由表 3 知 1-1 型轿运车单层可装载车辆为：4 I、3 I 1 II、2 I 2 II、1 I 3 II、5 II，上下两层两两组合，1-1 型轿运车装载方案共有 5+4+3+2+1=15 种，见表 4。

表 4 1-1 型轿运车可行装载方案

方案号 x_i	各型乘运车数	方案号 x_i	各型乘运车数
1	4 I、4 I	9	5 II、3 I 1 II
2	4 I、5 II	10	1 I 3 II、1 I 3 II
3	4 I、1 I 3 II	11	1 I 3 II、2 I 2 II
4	4 I、2 I 2 II	12	1 I 3 II、3 I 1 II
5	4 I、3 I 1 II	13	2 I 2 II、2 I 2 II
6	5 II、5 II	14	2 I 2 II、3 I 1 II
7	5 II、1 I 3 II	15	3 I 1 II、3 I 1 II
8	5 II、2 I 2 II		

其中，方案 3 与 14、4 与 15 中各型乘用车装载数量相同，可以合并；方案 8 中 I 型乘用车数量与方案 10 相同，但 II 型乘用车数量比方案 10 多，方案 9 中 I 型乘用车数量与方案 11 相同，但 II 型乘用车数量比方案 11 多，方案 2 中 I 型乘用车数量与方案 12、13 相同，但 II 型乘用车数量比方案 2 多，前者可以删除。因此，经过以上两步预处理得到 1-1 型轿运车非劣的装载方案见表 5：

表 5 1-1 型轿运车非劣的装载方案

方案号 x_i	上层方案	下层方案	上层 I 型车数	上层 II 型车数	下层 I 型车数	下层 II 型车数
1	5 II	5 II	0	5	0	5
2	5 II	1 I 3 II	0	5	1	3
3	5 II	2 I 2 II	0	5	2	2
4	5 II	3 I 1 II	0	5	3	1
5	4 I	5 II	4	0	0	5
6	4 I	1 I 3 II	4	0	1	3
7	4 I	2 I 2 II	4	0	2	2
8	4 I	3 I 1 II	4	0	3	1
9	4 I	4 I	4	0	4	0

1-2 型轿运车装载方案的分析方法与上述方法类似，同时由于 1-2 型轿运车上层可以摆两排，因此还须考虑 4.1 节提出的“平稳原则”，即下层力争装满，上层两列保持车数对称。得到 1-2 型轿运车非劣的装载方案见表 6：

表 6 1-2 型轿运车非劣的装载方案

方案号 y_j	上层左列方案	上层右列方案	下层方案	上层 I 型车数	上层 II 型车数	下层 I 型车数	下层 II 型车数
1	6 II	6 II	6 II	0	12	0	6
2	6 II	6 II	1 I 5 II	0	12	1	5
3	6 II	6 II	2 I 4 II	0	12	2	4

4	6Ⅱ	1Ⅰ5Ⅱ	2Ⅰ4Ⅱ	1	11	2	4
5	2Ⅰ4Ⅱ	2Ⅰ4Ⅱ	6Ⅱ	4	8	0	6
6	2Ⅰ4Ⅱ	2Ⅰ4Ⅱ	1Ⅰ5Ⅱ	4	8	1	5
7	2Ⅰ4Ⅱ	2Ⅰ4Ⅱ	2Ⅰ4Ⅱ	4	8	2	4
8	6Ⅱ	2Ⅰ4Ⅱ	5Ⅰ	2	10	5	0
9	1Ⅰ5Ⅱ	2Ⅰ4Ⅱ	5Ⅰ	3	9	5	0
10	2Ⅰ4Ⅱ	2Ⅰ4Ⅱ	5Ⅰ	4	8	5	0
11	5Ⅰ	5Ⅰ	6Ⅱ	10	0	0	6
12	5Ⅰ	5Ⅰ	1Ⅰ5Ⅱ	10	0	1	5
13	5Ⅰ	5Ⅰ	2Ⅰ4Ⅱ	10	0	2	4
14	5Ⅰ	5Ⅰ	3Ⅰ2Ⅱ	10	0	3	2
15	5Ⅰ	5Ⅰ	4Ⅰ1Ⅱ	10	0	4	1
16	5Ⅰ	5Ⅰ	5Ⅰ	10	0	5	0

5.1.2 轿运车需求总数边界的确定

由表 5 可知，1-1 型轿运车最多可装 I 型乘用车 8 辆或 II 型车 10 辆。1-2 型轿运车最多可装 I 型车 15 辆或 II 型车 18 辆，可见在该问题中 1-2 型轿运车对 I、II 两型乘用车的装载能力均大于 1-1 型轿运车。

因此，当全用 1-1 型轿运车运输时，使用的轿运车数量最多，为

$$\left\lceil \frac{100}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{68}{10} \right\rceil = 13 + 7 = 20 \quad (5-3)$$

当不考虑 4.1 节“数量原则”而全采用 1-2 型轿运车时，使用的轿运车数量最少，为

$$\left\lceil \frac{100}{15} \right\rceil + \left\lceil \frac{68}{18} \right\rceil = 7 + 4 = 11 \quad (5-4)$$

式中， $\lceil \cdot \rceil$ 为向上取整符号。

综上，轿运车的需求总数 t 满足

$$11 < t < 20 \quad (5-5)$$

需要说明的是，该节内容不是求解规划模型的必须条件，但是经过对需求总数边界的确定后，带入规划模型的约束条件，可以大大提高求解效率。

5.1.3 单目的地情况下 I II 车装载规划模型的建立

该问题只有单一目的地，无需考虑路线规划。同时由 4.2 节分析可知，该问题是一个多目标规划问题，并且只考虑采用 1-1 型和 1-2 型两种轿运车运输 100 辆 I 型乘用车及 68 辆 II 型乘用车，因此目标函数在式 (4-1) 基础上去掉含有 z

的部分即可。结合轿运车需求边界，“数量原则”，运送任务建立起单目的地情况下的装载规划模型，见式（5-6）

$$\begin{aligned}
 & \min. P_1(x+y) + P_2(y) \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & 11 \leq x+y \leq 20 \\
 & 0.2x \geq y \\
 & (1x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 + 6x_7 + 7x_8 + 8x_9) + (y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 4y_5 + 5y_6 + \\
 & 6y_7 + 7y_8 + 8y_9 + 9y_{10} + 10y_{11} + 11y_{12} + 12y_{13} + 13y_{14} + 14y_{15} + 15y_{16}) \geq 100 \\
 & (10x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 5x_5 + 3x_6 + 2x_7 + x_8) + (18y_1 + 17y_2 + 16y_3 + 15y_4 + 14y_5 + \\
 & 13y_6 + 12y_7 + 10y_8 + 9y_9 + 8y_{10} + 6y_{11} + 5y_{12} + 4y_{13} + 2y_{14} + y_{15}) \geq 68 \\
 & \sum_{i=1}^9 x_i = x \\
 & \sum_{j=1}^{16} y_j = y \\
 & x_i \geq 0, y_j \geq 0, x_i, y_j \text{ 为整数}, i=1 \dots 9, j=1 \dots 16
 \end{aligned} \right. \quad (5-6)
 \end{aligned}$$

目标函数表示首先要求两种轿运车的需求数量总和最少，在总数相同的情况下，尽量使成本较高的 1-2 型轿运车最少，成本低的 1-1 型轿运车最多；

约束条件一表示该规划问题的最优解应该在 5.1.2 节求得的需求边界内；

约束条件二表示“数量原则”，即 1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%；

约束条件三表示两种轿运车装载的 I 型乘用车数量至少 100 辆；

约束条件四表示两种轿运车装载的 II 型乘用车数量至少 68 辆。

5.1.4 模型的求解

为及时对比验证模型求解的有效性与正确性，我们同时选用两种工具软件进行编程求解。

1. 用 Lingo 软件求解。对于整数规划问题的求解，Lingo 软件非常擅长，优点是代码简单，易读易懂，运行效率高。程序见附件，实现了模型解算。

2. 用 Matlab 软件求解。Matlab 软件是功能强大的计算软件，功能丰富，操作灵活，能满足该题调用 excel 并生成.exe 可执行文件的要求，但其本身不便于解算整数规划问题，需借助第三方工具箱（本文采用的是 yalmip 工具箱），并且运算效率较 Lingo 低得多。（程序见附件，实现了模型解算，excel 输入初始条件，输出最优方案，下文模型结果均为 Matlab 求得）

同时，该模型不仅是整数规划，还是一个多目标规划问题，因此论文提出基于贯序算法的求解方法，方法如下：

步骤一：约束条件与式（5-6）相同，求解以 $\min. x+y$ 为目标函数的整数规划问题，得出最优解 $x+y$ 的值；

步骤二：将步骤一求得的 $x+y$ 的值作为约束条件添加到式（5-6）中，求解以 $\min. y$ 为目标函数的整数规划问题，即可得出问题的最优解。

5.1.5 模型的结果

1. 输入初始条件

由于对前三个问题建立了通用程序，因此会出现第三种乘用车的输入信息，在本模型中输入第三种车的数量为 0 即可。

	A	B	C
1	乘用车序号	需要运输的乘用车数量	
2	1	100	
3	2	68	
4	3	0	
5			
6			

图 1 输入初始条件截图

2. 执行贯序算法步骤一后的结果

由于程序设置为连续执行完贯序算法后在 excel 中显示最终结果，因此，中间结果手动列出，用作分析讨论。

最优解 $t = x + y = 18$ ，其中 $x_4 = 7, x_7 = 1, x_9 = 7, y_7 = 3$ ，其余方案数为零。说明有 7 辆 1-1 型轿运车采用表 5 中方案 4 装载，1 辆采用方案 7，7 辆采用方案 9；有 3 量 1-2 型轿运车采用表 6 中方案 7 装载。转化为题目要求的输出格式，如表 7 所示：

表 7 模型一中间结果

轿运车类型	相同类型、相同装载方式的车辆数	装在上层序号为 1 乘用车数量	装在上层序号为 2 乘用车数量	装在上层序号为 3 乘用车数量	装在下层序号为 1 乘用车数量	装在下层序号为 2 乘用车数量	装在下层序号为 3 乘用车数量
1-1	7	0	5	0	3	1	0
1-1	1	4	0	0	2	2	0
1-1	7	4	0	0	4	0	0
1-2	3	4	8	0	2	4	0

3. 输出最优方案

程序将运算结果按照题目要求，生成名为“OutPut”的 excel 表格，并将结果按照要求的格式输入表中，如图 2 所示：

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	轿运车类型	相同类型、相同装载方式的车辆数	装在上层序号为1乘用车数量	装在上层序号为2乘用车数量	装在上层序号为3乘用车数量	装在下层序号为1乘用车数量	装在下层序号为2乘用车数量	装在下层序号为3乘用车数量
2	1_1	2	4	0	0	4	0	0
3	1_1	3	4	0	0	3	1	0
4	1_1	11	4	0	0	0	5	0
5	1_2	1	10	0	0	0	6	0
6	1_2	1	4	8	0	5	0	0

图 2 输出最优方案截图

由图 2 知，最优解 $t=2+3+11+1+1=18$ ，与步骤一的最优解相同，但是使用 1-1 型轿运车 16 辆、1-2 型轿运车 2 辆，较中间解使用的 1-2 型轿运车少 1 辆，因此花费的成本更低，解更优，体现了基于贯序算法的效果。

该模型的最终装载方案为：使用 2 辆 1-1 型轿运车在上层装载 4 辆 I 型乘用车、下层装载 4 辆 I 型乘用车；3 辆 1-1 型轿运车在上层装载 4 辆 I 型乘用车、下层装载 3 辆 I 型乘用车和 1 辆 II 型乘用车；11 辆 1-1 型轿运车在上层装载 4 辆 I 型乘用车、下层装载 5 辆 II 型乘用车；1 辆 1-2 型轿运车在上层装载 10 辆 I 型乘用车、下层装载 6 辆 II 型乘用车；1 辆 1-2 型轿运车在上层装载 4 辆 I 型乘用车和 8 辆 II 型乘用车、下层装载 5 辆 I 型乘用车；

需要说明的是，运行程序只给出了一组最优解和装载方案，而实际上满足该最优解的装载方案有多种，很容易求得。

5.2 问题二：单目的地情况下 II III 车装载规划模型的建立与求解

5.2.1 单辆轿运车装载方案的确定

由 4.1 节“高度原则”可知，III 型乘用车由于高度超过 1.7m，只能装在轿运车的下层，轿运车上层只能装载 II 型乘用车。在考虑“安全原则”和车长限制的前提下，1-1 型轿运车上层非劣的装载方案只有一个，即 5 II；下层可装载车辆的方案有五个，分别为：5 II、3 II 1 III、2 II 2 III、1 II 3 III、4 III。因此，得到 1-1 型轿运车装载方案如表 8 所示：

表 8 1-1 型轿运车装载方案

方案号 x_i	上层方案	下层方案	上层 II 型车数	上层 III 型车数	下层 II 型车数	下层 III 型车数
1	5 II	5 II	5	0	5	0
2	5 II	3 II 1 III	5	0	3	1
3	5 II	2 II 2 III	5	0	2	2
4	5 II	1 II 3 III	5	0	1	3
5	5 II	4 III	5	0	0	4

同理，1-2 型轿运车上层非劣的装载方案只有一个，即 6Ⅱ；下层可装载车辆的方案有六个，分别为：6Ⅱ、5Ⅱ1Ⅲ、4Ⅱ2Ⅲ、2Ⅱ3Ⅲ、1Ⅱ4Ⅲ、5Ⅲ。因此，得到 1-2 型轿运车装载方案如表 9 所示：

表 9 1-2 型轿运车装载方案

方案号 y_j	上层左列方案	上层右列方案	下层	上层Ⅱ型车数	上层Ⅲ型车数	下层Ⅱ型车数	下层Ⅲ型车数
1	6Ⅱ	6Ⅱ	6Ⅱ	12	0	6	0
2	6Ⅱ	6Ⅱ	5Ⅱ1Ⅲ	12	0	5	1
3	6Ⅱ	6Ⅱ	4Ⅱ2Ⅲ	12	0	4	2
4	6Ⅱ	6Ⅱ	2Ⅱ3Ⅲ	12	0	2	3
5	6Ⅱ	6Ⅱ	1Ⅱ4Ⅲ	12	0	1	4
6	6Ⅱ	6Ⅱ	5Ⅲ	12	0	0	5

5.2.2 单目的地情况下ⅡⅢ车装载规划模型的建立

与模型一的建立类似，该问题是一个多目标整数规划问题，并且只考虑采用 1-1 型和 1-2 型两种轿运车运输 72 辆Ⅱ型乘用车及 52 辆Ⅲ型乘用车，因此目标函数在式 (4-1) 基础上去掉含有 z 的部分即可。结合“数量原则”，运送任务建立起单目的地情况下的装载规划模型，如下式 (5-7) 所示。

$$\begin{aligned}
 & \min P_1(x+y) + P_2(y) \\
 & s.t. \begin{cases} 0.2x \geq y \\ (10x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 5x_5) + (18y_1 + 17y_2 + 16y_3 + 14y_4 + 13y_5 + 12y_6) \geq 72 \\ (x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5) + (y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 4y_5 + 5y_6) \geq 52 \\ \sum_{i=1}^9 x_i = x \\ \sum_{j=1}^{16} y_j = y \\ x_i \geq 0, y_j \geq 0, x_i, y_j \text{ 为整数}, i=1\dots 5, j=1\dots 6 \end{cases} \quad (5-7)
 \end{aligned}$$

目标函数表示首先要求两种轿运车的需求数量总和最少，在总数相同的情况下，尽量使成本较高的 1-2 型轿运车最少，成本低的 1-1 型轿运车最多；

约束条件一表示“数量原则”，即 1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%；

约束条件二表示两种轿运车装载的Ⅱ型乘用车数量至少 72 辆；

约束条件三表示两种轿运车装载的Ⅲ型乘用车数量至少 52 辆。

5.2.3 模型的求解

与模型一的求解类似，利用 Matlab 中的 yalmip 工具箱，采用基于贯序算法的思想，分两步求解出该多目标整数规划问题。（Matlab 程序见附件）

由于 Lingo 软件解该类问题的高效快捷性，本文也给出了 Lingo 程序，见附件。

5.2.4 模型的结果

1. 输入初始条件

采用编写的 Matlab 通用程序，在名为“InPut”的 excel 表中输入 II 车型的乘用车 72 辆、III 车型的乘用车 52 辆，I 车型的乘用车 0 辆，如图 3 所示。

	A	B	C
1	乘用车序号	需要运输的乘用车数量	
2	1	0	
3	2	72	
4	3	52	
5			

图 3 输入初始条件截图

2. 输出最优方案

经过基于贯序算法两步运算后，最终结果输出到名为“OutPut”的 excel 表格中，如图 4 所示：

	A	B	C	D	E	F	G	H
	轿运车类型	相同类型、相同装载方式的车辆数	装在上层序号为1的乘用车数量	装在上层序号为2的乘用车数量	装在上层序号为3的乘用车数量	装在下层序号为1的乘用车数量	装在下层序号为2的乘用车数量	装在下层序号为3的乘用车数量
1								
2	1_1	12	0	5	0	0	0	4
3	1_2	1	0	12	0	0	1	4
4								

图 4 输出最优方案截图

由图 4 知，最优解 $t=12+1=13$ ，其中使用 1-1 型轿运车 12 辆，每辆该型轿运车在上层装载 5 辆 II 型乘用车、下层装载 4 辆 III 型乘用车；使用 1-2 型轿运车 1 辆，每辆该型轿运车在上层装载 12 辆 II 型乘用车、下层装载 1 辆 II 型乘用车和 4 辆 III 型乘用车；。

5.3 问题三：单目的地情况下 I II III 车装载规划模型的建立与求解

5.3.1 单辆轿运车装载方案的确定

由 4.1 节“高度原则”可知，III 型乘用车由于高度超过 1.7m，只能装在轿运车的下层，轿运车上层可装载 I 型和 II 型乘用车，下层可装载 I 型、II 型和 III 型乘用车。因此，1-1 型轿运车装载方案较多，如表 10 所示：

表 10 1-1 型轿运车装载方案

方案号 x_i	上层方案	下层方案	上层 I 型车数	上层 II 型车数	上层 III 型车数	下层 I 型车数	下层 II 型车数	下层 III 型车数
1	4 I	1 I 2 II 1 III	4	0	0	1	2	1
2	4 I	2 I 1 II 1 III	4	0	0	2	1	1
3	4 I	3 II 1 III	4	0	0	0	3	1

4	5 II	1 I 2 II 1 III	0	5	0	1	2	1
5	5 II	2 I 1 II 1 III	0	5	0	2	1	1
6	5 II	3 II 1 III	0	5	0	3	0	1
7	4 I	1 I 1 II 2 III	4	0	0	1	1	2
8	4 I	2 II 2 III	4	0	0	0	2	2
9	5 II	1 I 1 II 2 III	0	5	0	1	1	2
10	5 II	2 I 2 III	0	5	0	2	0	2
11	1 I 3 II	2 I 2 III	1	3	0	2	0	2
12	4 I	1 II 3 III	4	0	0	0	1	3
13	5 II	1 I 3 III	0	5	0	1	0	3
14	2 I 2 II	1 II 3 III	1	3	0	1	0	3
15	2 I 2 II	1 II 3 III	2	2	0	1	0	3
16	1 I 3 II	4 III	1	3	0	0	0	4
17	2 I 2 II	4 III	2	2	0	0	0	4
18	3 I 1 II	4 III	3	1	0	0	0	4
19	4 I	4 I	4	0	0	4	0	0
20	5 II	5 II	0	5	0	0	5	0
21	4 I	3 I 1 II	4	0	0	3	1	0
22	4 I	2 I 2 II	4	0	0	2	2	0
23	4 I	1 I 3 II	4	0	0	1	3	0
24	4 I	5 II	4	0	0	0	5	0
25	5 II	3 I 1 II	0	5	0	3	1	0
26	2 I 2 II	5 II	2	2	0	0	5	0
27	1 I 3 II	5 II	1	3	0	0	5	0
28	4 I	3 I 1 III	4	0	0	3	0	1
29	4 I	2 I 2 III	4	0	0	2	0	2
30	4 I	1 I 3 III	4	0	0	1	0	3
31	4 I	4 III	4	0	0	0	0	4
32	5 II	3 II 1 III	0	5	0	0	3	1
33	5 II	2 II 2 III	0	5	0	0	2	2
34	5 II	1 II 3 III	0	5	0	0	1	3
35	5 II	4 III	0	5	0	0	0	4

同理， 1-2 型轿运车装载方案如表 11 所示：

表 11 1-2 型轿运车装载方案

方案号 y_j	上层左列方案	上层右列方案	下层方案	上层 I 型车数	上层 II 型车数	上层 III 型车数	下层 I 型车数	下层 II 型车数	下层 III 型车数
1	5 I	5 I	5 I	10	0	0	5	0	0

2	6II	6II	6II	0	12	0	0	6	0
3	5I	5I	4I1II	10	0	0	4	1	0
4	5I	5I	3I2II	10	0	0	3	2	0
5	5I	5I	2I4II	10	0	0	2	4	0
6	5I	5I	1I5II	10	0	0	1	5	0
7	5I	5I	6II	10	0	0	0	6	0
8	2I4II	2I4II	5I	4	8	0	5	0	0
9	1I5II	2I4II	5I	3	9	0	5	0	0
10	6II	2I4II	5I	2	10	0	5	0	0
11	2I4II	2I4II	2I4II	4	8	0	2	4	0
12	2I4II	2I4II	1I5II	4	8	0	1	5	0
13	2I4II	2I4II	6II	4	8	0	0	6	0
14	6II	1I5II	2I4II	1	11	0	2	4	0
15	6II	6II	2I4II	0	12	0	2	4	0
16	6II	6II	1I5II	0	12	0	1	5	0
17	5I	5I	4I1III	10	0	0	4	0	1
18	5I	5I	3I2III	10	0	0	3	0	2
19	5I	5I	2I3III	10	0	0	2	0	3
20	5I	5I	1I4III	10	0	0	1	0	4
21	5I	5I	5III	10	0	0	0	0	5
22	6II	6II	5II1III	0	12	0	0	5	1
23	6II	6II	4II2III	0	12	0	0	4	2
24	6II	6II	2II3III	0	12	0	0	2	3
25	6II	6II	1II4III	0	12	0	0	1	4
26	6II	6II	5III	0	12	0	0	0	5
27	5I	5I	5II1III	10	0	0	0	5	1
28	5I	5I	1I4II1III	10	0	0	1	4	1
29	5I	5I	2I2II1III	10	0	0	2	2	1
30	5I	5I	3I1II1III	10	0	0	3	1	1
31	2I4II	2I4II	4I1III	4	8	0	4	0	1
32	5I	3I2II	1I4II1III	8	2	0	1	4	1
33	6II	6II	1I4II1III	0	12	0	1	4	1
34	6II	1I5II	1I4II1III	1	11	0	1	4	1
35	1I5II	2I4II	5II1III	3	9	0	0	5	1
36	1I5II	2I4II	1I4II1III	3	9	0	1	4	1
37	2I4II	2I4II	1I4II1III	4	8	0	1	4	1
38	1I5II	2I4II	3I1II1III	3	9	0	3	1	1
39	1I5II	2I4II	4I1III	3	9	0	4	0	1

40	5 I	5 I	4 II 和 2 III	10	0	0	0	4	2
41	5 I	5 I	1 I 2 II 2 III	10	0	0	1	2	2
42	5 I	5 I	2 I 1 II 2 III	10	0	0	2	1	2
43	5 I	3 I 2 II	4 II 2 III	8	2	0	0	4	2
44	5 I	4 I 1 II	4 II 2 III	9	1	0	0	4	2
45	1 I 5 II	6 II	4 II 2 III	1	11	0	0	4	2
46	6 II	2 I 4 II	4 II 2 III	2	10	0	0	4	2
47	2 I 4 II	1 I 5 II	4 II 2 III	3	9	0	0	4	2
48	2 I 4 II	2 I 4 II	4 II 2 III	4	8	0	0	4	2
49	2 I 4 II	2 I 4 II	1 I 2 II 2 III	4	8	0	1	2	2
50	1 I 5 II	2 I 4 II	3 I 2 III	3	9	0	3	0	2
51	2 I 4 II	2 I 4 II	3 I 2 III	4	8	0	3	0	2
52	5 I	5 I	2 II 3 III	10	0	0	0	2	3
53	5 I	5 I	1 I 1 II 3 III	10	0	0	1	1	3
54	5 I	3 I 2 II	2 II 3 III	8	2	0	0	2	3
55	5 I	3 I 2 II	1 I 1 II 3 III	8	2	0	1	1	3
56	6 II	6 II	1 I 1 II 3 III	0	12	0	1	1	3
57	6 II	6 II	2 I 3 III	0	12	0	2	0	3
58	6 II	1 I 5 II	2 I 3 III	1	11	0	2	0	3
59	6 II	2 I 4 II	2 I 3 III	2	10	0	2	0	3
60	1 I 5 II	2 I 4 II	2 I 3 III	3	9	0	2	0	3
61	2 I 4 II	2 I 4 II	2 I 3 III	4	8	0	2	0	3
62	5 I	5 I	1 II 4 III	10	0	0	0	1	4
63	5 I	3 I 2 II	1 II 4 III	8	2	0	0	1	4
64	5 I	3 I 2 II	1 I 4 III	8	2	0	1	0	4
65	6 II	6 II	1 I 4 III	0	12	0	1	0	4
66	1 I 5 II	6 II	1 I 4 III	1	11	0	1	0	4
67	6 II	2 I 4 II	1 I 4 III	2	10	0	1	0	4
68	1 I 5 II	2 I 4 II	1 I 4 III	3	9	0	1	0	4
69	2 I 4 II	2 I 4 II	1 I 4 III	4	8	0	1	0	4
70	5 I	3 I 2 II	5 III	8	2	0	0	0	5
71	5 I	4 I 1 II	5 III	9	1	0	0	0	5
72	1 I 5 II	6 II	5 III	1	11	0	0	0	5
73	2 I 4 II	6 II	5 III	2	10	0	0	0	5
74	1 I 5 II	2 I 4 II	5 III	3	9	5	0	0	5
75	2 I 4 II	2 I 4 II	5 III	4	8	0	0	0	5

5.3.2 单目的地情况下 I II III 车装载规划模型的建立

与模型一、模型二的建立类似，该问题是一个多目标整数规划问题，结合“数量原则”，运送任务建立起单目的地情况下的装载规划模型，如下式 (5-8) 所示：

$$\begin{aligned} & \min. P_1(x+y) + P_2(y) \\ & \left\{ \begin{array}{l} x - 5y \geq 0 \\ A_1X + B_1Y \geq 156 \\ A_2X + B_2Y \geq 102 \\ A_3X + B_3Y \geq 39 \end{array} \right. \\ & s.t. \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{35} x_i = x \\ \sum_{j=1}^{75} y_j = y \\ x, y, x_i, y_j \geq 0, \text{为整数}, i = 1 \dots 35, j = 1 \dots 75 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (5-8)$$

式中， $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{35}]^T$ ， $Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{75}]^T$ ，

$$A_1 = [5 \ 6 \ 4 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 4 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2 \ 3 \ 8 \ 0 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$A_2 = [2 \ 1 \ 3 \ 7 \ 6 \ 5 \ 1 \ 2 \ 6 \ 5 \ 3 \ 1 \ 5 \ 3 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 8 \ 7 \ 6 \ 5]$$

$$A_3 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4]$$

$$B_1 = [15 \ 0 \ 14 \ 13 \ 12 \ 11 \ 10 \ 9 \ 8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 14 \ 13 \ 12 \ 11 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 8 \ 9 \ 1 \ 2 \ 3 \\ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 10 \ 11 \ 12 \ 8 \ 9 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 10 \ 11 \ 8 \ 9 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 10 \ 8 \ 9 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 8 \ 9 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4]$$

$$B_2 = [0 \ 18 \ 1 \ 2 \ 4 \ 5 \ 6 \ 8 \ 9 \ 10 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 17 \ 16 \ 14 \ 13 \ 12 \ 5 \ 4 \ 2 \ 1 \ 8 \ 6 \ 16 \ 15 \ 14 \ 13 \ 12 \\ 10 \ 9 \ 4 \ 2 \ 1 \ 6 \ 5 \ 15 \ 14 \ 13 \ 12 \ 10 \ 9 \ 8 \ 2 \ 1 \ 4 \ 3 \ 13 \ 12 \ 11 \ 10 \ 9 \ 8 \ 1 \ 3 \ 2 \ 12 \ 11 \ 10 \ 9 \ 8 \ 2 \ 1 \ 11 \ 10 \ 9 \ 8]$$

目标函数表示首先要求两种轿运车的需求数量总和最少，在总数相同的情况下，尽量使成本较高的 1-2 型轿运车最少，成本低的 1-1 型轿运车最多；

约束条件一表示“数量原则”，即 1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%；

约束条件二表示两种轿运车装载的 I 型乘用车数量至少 156 辆；

约束条件三表示两种轿运车装载的 II 型乘用车数量至少 102 辆；

约束条件四表示两种轿运车装载的 III 型乘用车数量至少 39 辆。

5.3.3 模型的求解

与模型一、模型二的求解类似，利用 Matlab 中的 yalmip 工具箱，采用基于贯序算法的思想，分两步求解出该多目标整数规划问题。（Matlab 程序见附件）

由于 Lingo 软件解该类问题的高效快捷性，本文也给出了 Lingo 程序，见附件。

5.3.4 模型的结果

1. 输入初始条件

采用编写的 Matlab 通用程序，在名为“Input”的 excel 表中输入 I 车型的乘用车 156 辆，II 车型的乘用车 102 辆、III 车型的乘用车 39 辆，如图 5 所示。

	A	B	C
1	乘用车序号	需要运输的乘用车数量	
2	1	156	
3	2	102	
4	3	39	
5			

图 5 输入初始条件截图

2. 输出最优方案

经过基于贯序算法两步运算后，最终结果输出到名为“OutPut”的 excel 表格中，如图 6 所示：

	A	B	C	D	E	F	G	H
	轿运车类型	相同类型、相同装载方式的车辆数	装在上层序号为1的乘用车数量	装在上层序号为2的乘用车数量	装在上层序号为3的乘用车数量	装在下层序号为1的乘用车数量	装在下层序号为2的乘用车数量	装在下层序号为3的乘用车数量
1								
2	1_1	2	0	5	0	3	0	1
3	1_1	2	4	0	0	1	1	2
4	1_1	1	0	5	0	2	0	2
5	1_1	1	0	5	0	1	0	3
6	1_1	2	4	0	0	4	0	0
7	1_1	5	4	0	0	3	1	0
8	1_1	2	4	0	0	0	5	0
9	1_1	3	4	0	0	3	0	1
10	1_1	3	4	0	0	2	0	2
11	1_1	2	4	0	0	1	0	3
12	1_1	1	4	0	0	0	0	4
13	1_1	1	0	5	0	0	0	4
14	1_2	5	4	8	0	1	4	1
15								

图 6 输出最优方案截图

由图 6 知，最优解 $t=30$ ，使用 1-1 型轿运车 25 辆，1-2 型轿运车 5 辆。

其中 2 辆 1-1 型轿运车在上层装载 5 辆 II 型乘用车、下层装载 3 辆 I 型乘用车和 1 辆 III 型乘用车；

2 辆 1-1 型轿运车在上层装载 4 辆 I 型乘用车、下层装载 1 辆 I 型乘用车、1 辆 II 型乘用车和 2 辆 III 型乘用车；

1 辆 1-1 型轿运车在上层装载 5 辆 II 型乘用车、下层装载 2 辆 I 型乘用车和 2 辆 III 型乘用车；

1 辆 1-1 型轿运车在上层装载 5 辆 II 型乘用车、下层装载 1 辆 I 型乘用车和 3 辆 III 型乘用车；

2 辆 1-1 型轿运车在上层装载 4 辆 I 型乘用车、下层装载 4 辆 I 型乘用车；

5 辆 1-1 型轿运车在上层装载 4 辆 I 型乘用车、下层装载 3 辆 I 型乘用车和 1 辆 II 型乘用车；

2 辆 1-1 型轿运车在上层装载 4 辆 I 型乘用车、下层装载 5 辆 II 型乘用车；

3 辆 1-1 型轿运车在上层装载 4 辆 I 型乘用车、下层装载 3 辆 I 型乘用车和 1 辆 III 型乘用车；

3 辆 1-1 型轿运车在上层装载 4 辆 I 型乘用车、下层装载 2 辆 I 型乘用车和 2 辆 III 型乘用车；

2 辆 1-1 型轿运车在上层装载 4 辆 I 型乘用车、下层装载 1 辆 I 型乘用车和 3 辆 III 型乘用车；

1 辆 1-1 型轿运车在上层装载 4 辆 I 型乘用车、下层装载 4 辆 III 型乘用车；

1 辆 1-1 型轿运车在上层装载 5 辆 II 型乘用车、下层装载 4 辆 III 型乘用车；

5 辆 1-2 型轿运车在上层装载 4 辆 I 型乘用车和 8 辆 II 型乘用车、下层装载 1 辆 I 型乘用车、4 辆 II 型乘用车和 1 辆 III 型乘用车。

5.4 问题四：多目的地情况下 I II 车装载规划模型的建立与求解

5.4.1 轿运车需求总数边界的确定

1. 边界确定原则：

为了确定轿运车需求总数最优解的边界范围，可考虑两种极限情况：

一是把全部运输任务合并为一个单目的地的装载规划问题，此时需求的轿运车数量最少；

二是把六个运输任务看作独立的六个单目的地的装载规划问题，此时需求的轿运车数量最多。

2. 边界值的求解

步骤一：将问题简化为从出发地运输到同一目的地，物流公司总共需要运输 166 辆 I 车型的乘用车和 78 辆 II 车型的乘用车。利用前 3 问构造的通用程序，可计算得到所需轿运车的总数为 25 辆，其中 1-1 型车数量为 21，1-2 型车数量为 4。该结论为满足所有运输约束条件的最小轿运车数量。

步骤二：将 4 个目的地对 I、II 车型乘用车的运输需求，视为 4 个独立的运输任务。目的地 A 处所需运输的 I 车型的乘用车和 II 车型的乘用车数量分别是 42 辆和 31 辆；目的地 B 处所需运输的 I 车型的乘用车和 II 车型的乘用车数量分别是 50 辆和 0 辆；目的地 C 处所需运输的 I 车型的乘用车和 II 车型的乘用车数量分别是 33 辆和 47 辆；目的地 D 处所需运输的 I 车型的乘用车和 II 车型的乘用车数量分别是 41 辆和 0 辆。利用通用程序分别可求得满足各地运输需求的轿运车数量为：A 处 8 辆，其中 1-1 型车数量为 7，1-2 型车数量为 1；B 处 6 辆，其中 1-1 型车数量为 5，1-2 型车数量为 1；C 处 8 辆，其中 1-1 型车数量为 7，1-2 型车数量为 1；D 处 6 辆，其中 1-1 型车数量为 5，1-2 型车数量为 1。则可

得满足所有运输要求的轿运车总数为 28 辆，其中 1-1 型车数量为 24，1-2 型车数量为 4。该方法忽略了一辆轿运车可同时装载运往多个目的地的乘用车的情况，所以得到的结论为满足所有运输约束条件的最大最小轿运车数量。

综上所述，轿运车需求总数的最优解 t 应该满足 $t \in [25, 28]$ 的条件。

5.4.2 可行运输装载方案的分析

运输任务路线图如图 7 所示。轿运车运输车队从 O 点出发，到达 D 点后，卸下所需的 I 车型的乘用车；而后，车队将分为两个方向继续前进。此时，装载了 D 点所需乘用车的轿运车，除去已经卸空了停在 D 处的，余下的部分，要么前往 C 的方向，要么前往 AB 的方向，而同一方向各个目的地的需求可用一个车队来负责。

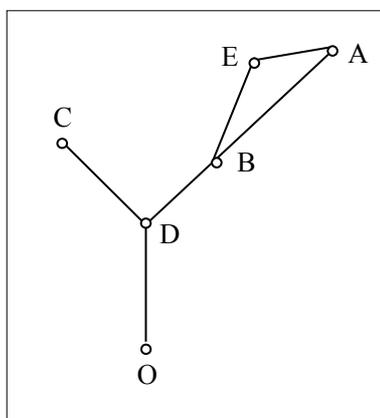


图 7 运输任务路线图

那么，可将运输路线的方案分为两种情况：

方案 1 前往 AB 方向的轿运车运输车队来负责 D 点运输需求，即 A 点、B 点和 D 点的需求由同一个车队来负责，前往 C 方向的车队仅仅是在 D 点停靠，并不存在卸货；

方案 2 前往 C 方向的轿运车运输车队负责 D 点运输需求，即 C 点和 D 点的需求由同一个车队来负责，前往 AB 方向的车队仅仅是在 D 点停靠，不存在卸货。

将路线图简化，将各节点所需 I、II 型乘用车数进行标注，得到图 8、图 9：

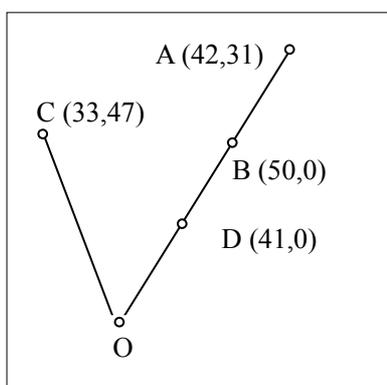


图 8 轿运车运行路线方案 1

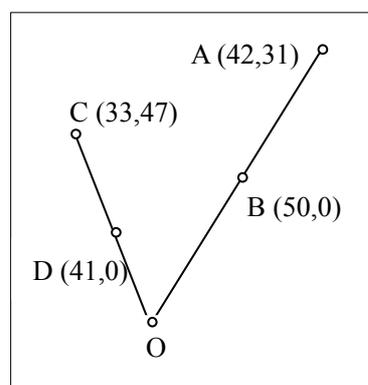


图 9 轿运车运行路线方案 2

5.4.3 多目的地情况下 I II 车装载规划模型的建立与求解

下面求解具体的运输方案。针对路线方案 1，如图 8 所示。

总体分为两个运输车队，前往 C 方向为车队 1，前往 ABD 方向为车队 2。车队 1 需满足 C 点 I 车型和 II 车型的乘用车数量需求为 33 辆和 47 辆。车队 2 需满足 ABD 三点 I 车型和 II 车型的乘用车总数需求为 133 辆和 31 辆。车队 2 到达 D 点后，卸下所需数量的乘用车，空车停在 D 处，剩余轿运车的装载方案需满足 AB 两点 I 车型和 II 车型的乘用车总数需求为 92 辆和 31 辆。利用改进型的通用程序（见附件），分析结论后可得具体的装载方案。

其中适用该方案的改进型通用程序的模型为：

$$\begin{aligned}
 & \min . P_1(x+y+q+p)+P_2(y+p) \\
 & \left. \begin{aligned}
 & 0.2(x+q) \geq y+p \\
 & (1x_2+2x_3+3x_4+4x_5+5x_6+6x_7+7x_8+8x_9)+(y_2+2y_3+3y_4+4y_5+5y_6+ \\
 & 6y_7+7y_8+8y_9+9y_{10}+10y_{11}+11y_{12}+12y_{13}+13y_{14}+14y_{15}+15y_{16}) \geq 33 \\
 & (10x_1+8x_2+7x_3+6x_4+5x_5+3x_6+2x_7+x_8)+(18y_1+17y_2+16y_3+15y_4+14y_5+ \\
 & 13y_6+12y_7+10y_8+9y_9+8y_{10}+6y_{11}+5y_{12}+4y_{13}+2y_{14}+y_{15}) \geq 47 \\
 & (1q_2+2q_3+3q_4+4q_5+5q_6+6q_7+7q_8+8q_9)+(p_2+2p_3+3p_4+4p_5+5p_6+ \\
 & 6p_7+7p_8+8p_9+9p_{10}+10p_{11}+11p_{12}+12p_{13}+13p_{14}+14p_{15}+15p_{16}) \geq 133 \\
 & (10q_1+8q_2+7q_3+6q_4+5q_5+3q_6+2q_7+q_8)+(18p_1+17p_2+16p_3+15p_4+14p_5+ \\
 & 13p_6+12p_7+10p_8+9p_9+8p_{10}+6p_{11}+5p_{12}+4p_{13}+2p_{14}+p_{15}) \geq 31
 \end{aligned} \right\} \quad (5-9) \\
 & \left. \begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^9 x_i = x \\
 & \sum_{i=1}^9 z_i = q \\
 & \sum_{j=1}^{16} y_j = y \\
 & \sum_{j=1}^{16} p_j = p \\
 & x_i \geq 0, y_j \geq 0, q_i \geq 0, p_j \geq 0, x_i, y_j, q_i, p_j \text{ 为整数}, i=1 \dots 9, j=1 \dots 16
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

式中 q_i 含义和 x_i 相同， p_j 含义和 y_j 相同。

具体步骤如下：

(1) 利用改进型通用程序，得到满足 C 点需求的装载方案，以及满足 ABD 三点总需求的装载方案；

(2) 根据 D 点运输需求，分析得到满足 D 点需求的装载方案；

(3) 根据 B 点运输需求，分析得到满足 B 点需求的装载方案；同时即可得到满足 A 点需求的装载方案。

具体过程和结论如下。

则可得路线方案 2 的具体装载方案为：

表 14 路线方案 2 的具体装载方案表

方案	A	B	C	D	轿运车总数 (1-1, 1-2)
2	$x_9 = 1, y_6 = 2$ $y_{12} = 1, y_{16} = 1$	$x_9 = 6$	$x_1 = 4, x_5 = 1,$ $x_8 = 2, x_9 = 2$	$x_9 = 5$	(21,4)

可得输出为：

表 15 该情况下的最优输出方案

轿运车 类型	相同类 型、相同 装载方 式的车 辆数	装在上 层序号 为 1 乘 用车数 量	装在上 层序号 为 2 乘 用车数 量	装在下 层序号 为 1 乘 用车数 量	装在下 层序号 为 2 乘 用车数 量	中间停 靠地	目的地
1-1	5	4	0	4	0		D
1-1	4	0	5	0	5	D	C
1-1	1	4	0	0	5	D	C
1-1	2	4	0	3	1	D	C
1-1	2	4	0	4	0	D	C
1-1	6	4	0	4	0	D	B
1-1	1	4	0	4	0	B、D	A
1-2	2	3	9	2	4	B、D	A
1-2	1	10	0	1	5	B、D	A
1-2	1	10	0	5	0	B、D	A

5.4.4 结论

比较表 12 和表 14 可知，两种路线方案下，所需的轿运车的数量及型号均相同，1-1 型车 21 辆，1-2 型车 4 辆，只是具体的装载方案不同。

针对路线方案 1，依据表 12 的具体装载方案，以及各目的地之间的距离，可得到路线方案 1 的行驶总里程数为：

$$6 \times (160 + 76) + 5 \times 160 + 7 \times (160 + 120) + 7 \times (160 + 200) = 6696$$

针对路线方案 2，依据表 14 的具体装载方案，以及各目的地之间的距离，可得到路线方案 2 的行驶总里程数为：

$$9 \times (160 + 76) + 5 \times 160 + 6 \times (160 + 120) + 5 \times (160 + 200) = 6404$$

可知，路线方案 2 的行驶总里程数小于路线方案 1 的行驶总里程数，即路线方案 2 及相应的装载方案优于路线方案 1 及相应的装载方案。

因此针对本题，采取路线方案 2 及表 15 中的装载运输方案，在满足所有运输需求的条件下，还可取得较好的经济效益。

5.5 问题五：多目的地情况下多类型乘用车装载规划模型的建立与求解

5.5.1 数据处理与分析

由于乘用车与轿运车类型数据较为繁杂，首先对数据进行分析处理。

第一步，根据乘用车的长高数据，将乘用车整体分为3类，I型、II型和III型。将所有长度低于4.1m的乘用车划为I型车，并取它们长度数据的期望值作为I型车的通用长度数据；将所有长度超过4.1m的乘用车划为II型车，并取它们长度数据的期望值作为II型车的通用长度数据；将所有高度超过1.7m的乘用车划为III型车，只能装载在1-2和2-2型轿运车的下层。

第二步，由于1-2和2-2型轿运车存在装载两列乘用车的情况，那么这两类轿运车的宽度数据对所装载的乘用车的宽度就会有约束要求。分析所有乘用车的宽度数据，以及轿运车的宽度数据，可知划分为I型车的乘用车均能满足装载两列的宽度约束；而II型车需要再细分为II(1)型和II(2)型。其中II(1)型为宽度超过1.7m的乘用车，取它们宽度数据的期望值作为通用宽度数据；II(2)型为宽度低于1.7m的乘用车，取它们宽度数据的期望值作为通用宽度数据。III型车只能装载在1-2和2-2型轿运车的下层，并且是单列装载，不存在宽度约束。

乘用车具体规格划分如下：

表 16 乘用车规格划分表

乘用车		长	宽	高	数量
I		3.874	<1.7	<1.7	176
II	(1)	4.638	1.790	<1.7	643
	(2)		1.689		232
III		4.598	无限制	>1.7	168

第三步，在讨论各个目的地的乘用车需求时，可暂且先不考虑具体的车型编号，明确好具体的装载方案后，再依据上文的乘用车规格划分表确定所装载的乘用车的具体型号。结合上文的乘用车规格划分表，可得到各个目的地的乘用车需求如下：

表 17 各目的地的乘用车需求表

乘用车		A	B	C	D	E
I		18	21	59	44	34
II	(1)	198	135	102	106	102
	(2)	52	33	48	50	49
III		24	22	43	35	32

5.5.2 多目的地情况下多类型乘用车装载规划模型的建立

首先，给出各型轿运车的乘用车装载方案。建立模型，使用LINGO程序软件得到各型轿运车对乘用车的所有装载方案，其中，序号2和序号6的1-1型轿运车，序号4、序号7和序号8的1-1型轿运车，序号5和序号10的1-2型轿运车由于长度相近做统一处理，得到具体的装载方案为：

表 18 各型轿运车的装载方案总结表

1-1 型轿运车 (1)	1-1 型轿运车 (2、6)	1-1 型轿运 车	1-1 型轿运车 (4、7、8)	1-2 型轿运车 (5、10)	2-2 型轿运车 (9)
-----------------	-------------------	--------------	---------------------	--------------------	-----------------

		(3)			
8 I	8 I	12 I	10 I	18 I	16 I
8 II	6 II、1 I	10 II	8 II	5 II、10 II(2)	8 II、8 II(2)
7 I、1 II	5 II、2 I	11 I、1 II	9 I、1 II	16 I、1 II	8 I、8 II(2)
6 I、2 II	4 II、3 I	10 I、2 II	8 I、2 II	15 I、2 II	9 I、7 II(2)
5 I、3 II	3 II、4 I	9 I、3 II	7 I、3 II	14 I、3 II	10 I、6 II(2)
4 I、4 II	2 II、5 I	8 I、4 II	6 I、4 II	13 I、4 II	11 I、5 II(2)
3 I、5 II	1 II、6 I	7 I、5 II	5 I、5 II	12 I、5 II	12 I、4 II(2)
2 I、6 II	3 I、4 III	6 I、5 II	4 I、6 II	10 I、5 II(1)、 II(2)	13 I、3 II(2)
1 I、7 II	4 I、3 III	5 I、6 II	3 I、7 II	9 I、5 II(1)、 2 II(2)	14 I、2 II(2)
4 II、4 III	5 I、2 III	3 I、7 II	9 I、1 III	8 I、5 II(1)、 3 II(2)	15 I、1 II(2)
5 II、3 III	6 I、1 III	2 I、8 II	8 I、2 III	7 I、5 II(1)、 4 II(2)	1 I、7 II(2)、 8 II(1)
6 II、2 III	3 II、4 III	1 I、9 II	7 I、3 III	6 I、5 II(1)、 5 II(2)	2 I、6 II(2)、 8 II(1)
7 II、1 III	4 II、3 III	11 I、1 III	6 I、4 III	4 I、5 II(1)、 6 II(2)	3 I、5 II(2)、 8 II(1)
4 I、4 III	5 II、2 III	10 I、2 III	7 II、1 III	3 I、5 II(1)、 7 II(2)	4 I、4 II(2)、 8 II(1)
5 I、3 III	6 II、1 III	9 I、3 III	6 II、2 III	2 I、5 II(1)、 8 II(2)	5 I、3 II(2)、 8 II(1)
6 I、2 III	1 II、2 I、4 III	8 I、4 III	5 II、3 III	1 I、5 II(1)、 9 II(2)	6 I、2 II(2)、 8 II(1)
7 I、1 III	1 II、3 I、3 III	7 I、5 III	4 II、4 III	10 II(2)、5 III	7 I、1 II(2)、 8 II(1)
1 I、3 II、4 III	1 II、4 I、2 III	6 I、5 III	1 I、3 II、4 III	10 II(2)、II、 4 III	1 I、7 II(1)、 8 II(2)
1 I、4 II、3 III	1 II、5 I、1 III	9 II、1 III	1 I、4 II、3 III	10 II(2)、2 II、 3 III	2 I、7 II(1)、 7 II(2)
1 I、5 II、2 III	2 II、1 I、4 III	8 II、2 III	1 I、5 II、2 III	10 II(2)、3 II、 2 III	3 I、6 II(1)、 7 II(2)
1 I、6 II、1 III	2 II、2 I、3 III	7 II、3 III	2 I、2 II、4 III	10 II(2)、4 II、 1 III	3 I、7 II(1)、 6 II(2)
2 I、2 II、4 III	2 II、3 I、2 III	6 II、4 III	2 I、3 II、3 III	6 I、5 II(2)、 5 III	4 I、5 II(1)、 7 II(2)
2 I、3 II、3 III	2 II、4 I、1 III	5 II、5 III	2 I、4 II、2 III	5 I、6 II(2)、 5 III	4 I、7 II(1)、 5 II(2)
2 I、4 II、2 III	3 II、2 I、3 III	1 I、4 II、 5 III	2 I、5 II、1 III	4 I、7 II(2)、 5 III	5 I、4 II(1)、 7 II(2)
2 I、5 II、1 III	3 II、3 I、2 III	1 I、5 II、	3 I、1 II、4 III	3 I、8 II(2)、	5 I、7 II(1)、

		4III		5III	4 II (2)
3 I、1 II、4 III	3 II、4 I、1 III	1 I、6 II、3 III	3 I、2 II、3 III	2 I、9 II (2)、5 III	6 I、3 II (1)、7 II (2)
3 I、2 II、3 III	4 II、1 I、2 III	1 I、7 II、2 III	3 I、3 II、2 III	1 I、10 II (2)、5 III	6 I、7 II (1)、3 II (2)
3 I、3 II、2 III	4 II、2 I、1 III	1 I、8 II、1 III	3 I、4 II、1 III	7 I、4 II (2)、5 III	7 I、2 II (1)、7 II (2)
3 I、4 II、1 III	5 II、1 I、1 III	2 I、3 II、5 III	4 I、1 II、4 III	8 I、3 II (2)、5 III	7 I、7 II (1)、2 II (2)
4 I、1 II、3 III		2 I、4 II、4 III	4 I、2 II、3 III	9 I、2 II (2)、5 III	8 I、1 II (1)、7 II (2)
4 I、2 II、2 III		2 I、5 II、3 III	4 I、3 II、2 III	10 I、1 II (2)、5 III	8 I、7 II (1)、1 II (2)
4 I、3 II、1 III		2 I、6 II、2 III	4 I、4 II、1 III	6 I、5 II (2)、1 II、4 III	
5 I、1 II、2 III		2 I、7 II、1 III	5 I、1 II、3 III	6 I、6 II (2)、2 II、3 III	
5 I、2 II、1 III		3 I、2 II、5 III	5 I、2 II、2 III	6 I、7 II (2)、3 II、2 III	
6 I、1 II、1 III		3 I、3 II、4 III	5 I、3 II、1 III	6 I、8 II (2)、4 II、1 III	
		3 I、4 II、3 III	6 I、1 II、3 III	7 I、5 II (2)、4 III	
		3 I、5 II、2 III	6 I、2 II、2 III	7 I、6 II (2)、1 II、3 III	
		3 I、6 II、1 III	6 I、3 II、1 III	7 I、7 II (2)、2 II、2 III	
		4 I、1 II、5 III	7 I、1 II、2 III	7 I、8 II (2)、3 II、1 III	
		4 I、2 II、4 III	7 I、2 II、1 III	8 I、6 II (2)、3 III	
		4 I、3 II、3 III	8 I、1 II、1 III	8 I、6 II (2)、1 II、2 III	
		4 I、4 II、2 III		8 I、6 II (2)、2 II、1 III	
		4 I、5 II、1 III		9 I、7 II (2)、2 III	
		5 I、1 II、4 III		9 I、7 II (2)、1 II、1 III	
		5 I、2 II、3 III		10 I、8 II (2)、1 III	
		5 I、3 II、2 III			

		5 I、4 II、 1 III			
		6 I、1 II、 3 III			
		6 I、2 II、 2 III			
		6 I、3 II、 1 III			
		7 I、1 II、 2 III			
		7 I、2 II、 1 III			
		8 I、1 II、1 III			

表中每一列表示的是该型轿运车的所有装载方案，例如：7 I、8 II(2)、3 II、1 III表示的是单辆 1-1 型轿运车可以装载 7 辆 I 型乘用车、8 辆 II(2)型乘运车、3 辆任意 II 型乘用车、1 辆 III 型乘运车。共有

其中，序号 1 的轿运车共有 35 种装载方案，序号 2、6 轿运车共有 29 种装载方案，序号 3 轿运车共有 53 种装载方案，序号 4、7、8 轿运车共有 41 种装载方案，序号 5、10 轿运车共有 45 种装载方案，序号 9 轿运车共有 31 种装载方案。

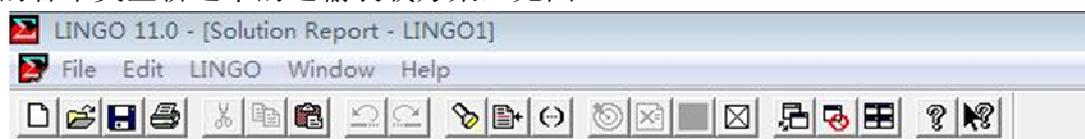
然后，改进前三问的通用模型，增加各种轿运车的可用数量约束条件，可得满足总体运输需求的轿运车数量的计算模型：

$$\begin{aligned}
 & \min . P_1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y + z) + P_2(y) \\
 & \left. \begin{aligned}
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 5y \geq 0 \\
 & A_{11}X_1 + A_{21}X_2 + A_{31}X_3 + A_{41}X_4 + BY + CZ \geq 176 \\
 & A_{12}X_1 + A_{22}X_2 + A_{32}X_3 + A_{42}X_4 + BY + CZ \geq 875 \\
 & A_{13}X_1 + A_{23}X_2 + A_{33}X_3 + A_{43}X_4 + BY + CZ \geq 168 \\
 & \sum_{i=1}^{35} x_{1i} = x_1, x_1 \leq 21, \quad \sum_{j=1}^{29} x_{2j} = x_2, x_2 \leq 43 \\
 & \sum_{p=1}^{53} x_{3p} = x_3, x_3 \leq 22, \quad \sum_{i=1}^{41} x_{4q} = x_4, x_4 \leq 35 \\
 & \sum_{m=1}^{45} y_m = y, y \leq 25, \quad \sum_{l=1}^{31} z_l = z, z \leq 5 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, y, z_1, z_2, x_{1i}, x_{2j}, x_{3p}, x_{4q}, y_m, z_l \geq 0, \text{为整数,} \\
 & i=1 \dots 35, j=1 \dots 29, p=1 \dots 53, q=1 \dots 41, m=1 \dots 45, l=1 \dots 31
 \end{aligned} \right\} \text{s.t.} \quad (5-11)
 \end{aligned}$$

其中，由于 1-1 型车分成了 4 种类型，所以分为了 4 个变量，由于方案数太多，系数不便于直接书写在建立的模型中，具体的系数可参照方案表中数据，或参见文末附录一中的 Lingo 代码。

5.5.3 模型的求解与结果分析

根据建立的模型（5-11），使用 LINGO 软件，求解出了满足总体运输需求的各个类型轿运车的运输装载方案，见图 12。



	Variable	Value	Reduced Cost
X、Y、Z、M、N、P 为使用的各型轿运车 总数	X	21.00000	1.000000
	Y	12.00000	1.000000
	Z	22.00000	1.000000
	M	35.00000	1.000000
	N	18.00000	1.000000
	P	5.000000	1.000000
其余结果为：相同 型号、相同装载方 案的轿运车辆数。 图中只显示了一部 分。	X1	0.000000	0.000000
	X3	0.000000	0.000000
	X4	0.000000	0.000000
	X5	0.000000	0.000000
	X6	0.000000	0.000000
	X7	0.000000	0.000000
	X8	0.000000	0.000000
	X9	0.000000	0.000000
	X14	0.000000	0.000000
	X15	0.000000	0.000000
	X16	0.000000	0.000000
	X17	0.000000	0.000000
	X18	0.000000	0.000000
	X19	0.000000	0.000000
	X20	0.000000	0.000000
	X21	0.000000	0.000000
	X22	0.000000	0.000000
	X23	0.000000	0.000000
	X24	0.000000	0.000000
	X25	0.000000	0.000000
	X26	0.000000	0.000000
	X27	0.000000	0.000000
	X28	0.000000	0.000000
	X29	0.000000	0.000000
	X30	0.000000	0.000000
	X31	0.000000	0.000000
	X32	0.000000	0.000000
	X33	0.000000	0.000000
	X34	0.000000	0.000000
	X35	0.000000	0.000000
	Y1	0.000000	0.000000
	Y2	0.000000	0.000000
	Y3	0.000000	0.000000

图 12 模型运算结果

使用轿运车的总数为 113 辆，具体各个类型轿运车的分配见下表 19。

表 19 各型轿运车需求数目

轿运车车型 数量	1-2 型 (序号 1)	1-1 型 (序号 2、6)	1-1 型 (序号 3)	1-1 型 (序号 4、7、8)	1-2 型 (序号 5、 10)	2-2 型 (序号 9)
使用车数	21	12	22	35	18	5

问题五中建立的轿运车总量模型，通过 Lingo 软件编程实现后，可得到满足所有运输需求的轿运车总数，以及相同类型、相同装载方式的车辆数。根据这些结论，参照对比表 18，即可进一步得到每一类型轿运车的具体装载方案，即装载的 I 型、II（1）型、II（2）型和 III 型乘用车的具体数量。

六、模型的评价与推广

6.1 模型的评价

1. 针对前三个问题建立的模型，本质上是同一个规划问题，在此统一分析，其优缺点包括：1) 模型穷举了在问题一至问题三条件下的所有可装载方案，在该种运输任务和运载工具条件下，具有很好的通用性；2) 模型附带的程序能够通过 excel 输入运输任务，并将最优装载方案输出到 excel 文件，易于被物流公司日常使用，快捷方便。3) 模型给出的通用程序除能解决问题一至问题三情况外，也可解决只运输一种乘用车的运输任务规划；缺点在于当轿运车和乘用车种类和数量较多时，可行方案急剧增加，导致程序耗时较多。

2. 针对问题四建立的模型，区分不同的目的地方向，提出了两种合理的运输路线方案；建立了改进型的模型和程序，结合提出的运输路线方案，可计算分析得到较优的可行装载方案，通过比较可行方案的行驶里程数，即可选择出最优的运输路线方案和具体的轿运车装载方案。缺点在于建立的改进型模型专门针对此类问题，通用性较差，还需改进；提出的方法需人工分析与程序实现相结合，还未满足纯算法实现的要求。

6.2 模型的推广

本文建立的乘用车装载规划模型，能够解决适度规模的物流运输计划问题，具有一定的通用性，然而，现实中的整车物流业务比题目所给的要复杂的多、庞大的多，车型种类也更加繁杂，因此本文所做的工作更多的是作为工作人员的一种辅助决策工具，要想开发出功能完善方便实用的乘用车物流规划软件还需要花费更多的人力物力精力。

参考文献

- [1]. 王波, 基于遗传算法的汽车物流配送问题的研究, 西北大学硕士论文, 2011。
- [2]. 黎明, 集装箱装船顺序的多目标整数规划优化模型, 计算机应用研究, 29(10): 3636-3639, 2012。
- [3]. 李钊彦, 轿运车动态配载过程仿真关键技术研究, 机械设计与制造, 12: 84-86, 2005。
- [4]. 胡运权, 运筹学教程, 北京: 清华大学出版社, 2007。
- [5]. 刘正君, MATLAB 科学计算与可视化仿真, 北京: 电子工业出版社, 2009。

附录一

问题五：求解模型五的 Lingo 代码

min x+y+z+m+n+p

st

$8x_1+7x_3+6x_4+5x_5+4x_6+3x_7+2x_8+x_9+4x_{14}+5x_{15}+6x_{16}+7x_{17}+x_{18}+x_{19}+x_{20}+x_{21}+2x_{22}+2x_{23}+2x_{24}+2x_{25}+3x_{26}+3x_{27}+3x_{28}+3x_{29}+4x_{30}+4x_{31}+4x_{32}+5x_{33}+5x_{34}+6x_{35}+8y_1+y_2+2y_3+3y_4+4y_5+5y_6+6y_7+3y_8+4y_9+5y_{10}+6y_{11}+2y_{16}+3y_{17}+4y_{18}+5y_{19}+y_{20}+2y_{21}+3y_{22}+4y_{23}+2y_{24}+3y_{25}+4y_{26}+y_{27}+2y_{28}+y_{29}+1z_1+1z_3+10z_4+9z_5+8z_6+7z_7+6z_8+5z_9+3z_{10}+2z_{11}+z_{12}+1z_{13}+10z_{14}+9z_{15}+8z_{16}+7z_{17}+6z_{18}+z_{24}+z_{25}+z_{26}+z_{27}+z_{28}+2z_{29}+2z_{30}+2z_{31}+2z_{32}+2z_{33}+3z_{34}+3z_{35}+3z_{36}+3z_{37}+3z_{38}+4z_{39}+4z_{40}+4z_{41}+4z_{42}+4z_{43}+5z_{44}+5z_{45}+5z_{46}+5z_{47}+6z_{48}+6z_{49}+6z_{50}+7z_{51}+7z_{52}+8z_{53}+10m_1+9m_3+8m_4+7m_5+6m_6+5m_7+4m_8+3m_9+9m_{10}+8m_{11}+7m_{12}+6m_{13}+m_{18}+m_{19}+m_{20}+2m_{21}+2m_{22}+2m_{23}+2m_{24}+3m_{25}+3m_{26}+3m_{27}+3m_{28}+4m_{29}+4m_{30}+4m_{31}+4m_{32}+5m_{33}+5m_{34}+5m_{35}+6m_{36}+6m_{37}+6m_{38}+7m_{39}+7m_{40}+8m_{41}+18n_1+16n_3+15n_4+14n_5+13n_6+12n_7+10n_8+9n_9+8n_{10}+7n_{11}+6n_{12}+4n_{13}+3n_{14}+2n_{15}+n_{16}+6n_{22}+5n_{23}+4n_{24}+3n_{25}+2n_{26}+n_{27}+7n_{28}+8n_{29}+9n_{30}+10n_{31}+6n_{32}+6n_{33}+6n_{34}+6n_{35}+7n_{36}+7n_{37}+7n_{38}+7n_{39}+8n_{40}+8n_{41}+8n_{42}+9n_{43}+9n_{44}+10n_{45}+16p_1+8p_3+9p_4+10p_5+11p_6+12p_7+13p_8+14p_9+15p_{10}+p_{11}+2p_{12}+3p_{13}+4p_{14}+5p_{15}+6p_{16}+7p_{17}+p_{18}+2p_{19}+3p_{20}+3p_{21}+4p_{22}+4p_{23}+5p_{24}+5p_{25}+6p_{26}+6p_{27}+7p_{28}+7p_{29}+8p_{30}+8p_{31}>176$

$8x_2+x_3+2x_4+3x_5+4x_6+5x_7+6x_8+7x_9+4x_{10}+5x_{11}+6x_{12}+7x_{13}+3x_{18}+4x_{19}+5x_{20}+6x_{21}+2x_{22}+3x_{23}+4x_{24}+5x_{25}+x_{26}+2x_{27}+3x_{28}+4x_{29}+x_{30}+2x_{31}+3x_{32}+x_{33}+2x_{34}+x_{35}+6y_2+5y_3+4y_4+3y_5+2y_6+y_7+3y_{12}+4y_{13}+5y_{14}+6y_{15}+y_{16}+y_{17}+y_{18}+y_{19}+2y_{20}+2y_{21}+2y_{22}+2y_{23}+3y_{24}+3y_{25}+3y_{26}+4y_{27}+4y_{28}+5y_{29}+10z_2+z_3+2z_4+3z_5+4z_6+5z_7+5z_8+6z_9+7z_{10}+8z_{11}+9z_{12}+9z_{19}+8z_{20}+7z_{21}+6z_{22}+5z_{23}+4z_{24}+5z_{25}+6z_{26}+7z_{27}+8z_{28}+3z_{29}+4z_{30}+5z_{31}+6z_{32}+7z_{33}+2z_{34}+3z_{35}+4z_{36}+5z_{37}+6z_{38}+z_{39}+2z_{40}+3z_{41}+4z_{42}+5z_{43}+z_{44}+2z_{45}+3z_{46}+4z_{47}+z_{48}+2z_{49}+3z_{50}+z_{51}+2z_{52}+z_{53}+8m_2+m_3+2m_4+3m_5+4m_6+5m_7+6m_8+7m_9+7m_{14}+6m_{15}+5m_{16}+4m_{17}+3m_{18}+4m_{19}+5m_{20}+2m_{21}+3m_{22}+4m_{23}+5m_{24}+m_{25}+2m_{26}+3m_{27}+4m_{28}+m_{29}+2m_{30}+3m_{31}+4m_{32}+m_{33}+2m_{34}+3m_{35}+m_{36}+2m_{37}+3m_{38}+m_{39}+2m_{40}+m_{41}+15n_2+n_3+2n_4+3n_5+4n_6+5n_7+6n_8+7n_9+8n_{10}+9n_{11}+10n_{12}+11n_{13}+12n_{14}+13n_{15}+14n_{16}+10n_{17}+11n_{18}+12n_{19}+13n_{20}+14n_{21}+5n_{22}+6n_{23}+7n_{24}+8n_{25}+9n_{26}+10n_{27}+4n_{28}+3n_{29}+2n_{30}+n_{31}+6n_{32}+8n_{33}+10n_{34}+12n_{35}+5n_{36}+7n_{37}+9n_{38}+11n_{39}+6n_{40}+7n_{41}+8n_{42}+7n_{43}+8n_{44}+8n_{45}+16p_2+8p_3+7p_4+6p_5+5p_6+4p_7+3p_8+2p_9+p_{10}+15p_{11}+14p_{12}+13p_{13}+12p_{14}+11p_{15}+10p_{16}+9p_{17}+15p_{18}+14p_{19}+13p_{20}+13p_{21}+12p_{22}+12p_{23}+11p_{24}+11p_{25}+10p_{26}+10p_{27}+9p_{28}+9p_{29}+8p_{30}+8p_{31}>875$

$4x_{10}+3x_{11}+2x_{12}+x_{13}+4x_{14}+3x_{15}+2x_{16}+x_{17}+4x_{18}+3x_{19}+2x_{20}+x_{21}+4x_{22}+3x_{23}+2x_{24}+x_{25}+4x_{26}+3x_{27}+2x_{28}+x_{29}+3x_{30}+2x_{31}+x_{32}+2x_{33}+x_{34}+x_{35}+4y_8+3y_9+2y_{10}+y_{11}+4y_{12}+3y_{13}+2y_{14}+y_{15}+4y_{16}+3y_{17}+2y_{18}+y_{19}+4y_{20}+3y_{21}+2y_{22}+y_{23}+3y_{24}+2y_{25}+y_{26}+2y_{27}+y_{28}+y_{29}+z_{13}+2z_{14}+3z_{15}+4z_{16}+5z_{17}+5z_{18}+z_{19}+2z_{20}+3z_{21}+4z_2$

$$2+5z_{23}+5z_{24}+4z_{25}+3z_{26}+2z_{27}+z_{28}+5z_{29}+4z_{30}+3z_{31}+2z_{32}+z_{33}+5z_{34}+4z_{35}+3z_{36}+2z_{37}+z_{38}+5z_{39}+4z_{40}+3z_{41}+2z_{42}+z_{43}+4z_{44}+3z_{45}+2z_{46}+z_{47}+3z_{48}+2z_{49}+z_{50}+2z_{51}+z_{52}+z_{53}+m_{10}+2m_{11}+3m_{12}+4m_{13}+m_{14}+2m_{15}+3m_{16}+4m_{17}+4m_{18}+3m_{19}+2m_{20}+4m_{21}+3m_{22}+2m_{23}+m_{24}+4m_{25}+3m_{26}+2m_{27}+m_{28}+4m_{29}+3m_{30}+2m_{31}+m_{32}+3m_{33}+2m_{34}+m_{35}+3m_{36}+2m_{37}+m_{38}+2m_{39}+m_{40}+m_{41}+5n_{17}+4n_{18}+3n_{19}+2n_{20}+n_{21}+5n_{22}+5n_{23}+5n_{24}+5n_{25}+5n_{26}+5n_{27}+5n_{28}+5n_{29}+5n_{30}+5n_{31}+4n_{32}+3n_{33}+2n_{34}+n_{35}+4n_{36}+3n_{37}+2n_{38}+n_{39}+3n_{40}+2n_{41}+n_{42}+2n_{43}+n_{44}+n_{45}>=168$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18}+x_{19}+x_{20}+x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27}+x_{28}+x_{29}+x_{30}+x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}-x=0$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18}+x_{19}+x_{20}+x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27}+x_{28}+x_{29}+x_{30}+x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}<21$$

$$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9+y_{10}+y_{11}+y_{12}+y_{13}+y_{14}+y_{15}+y_{16}+y_{17}+y_{18}+y_{19}+y_{20}+y_{21}+y_{22}+y_{23}+y_{24}+y_{25}+y_{26}+y_{27}+y_{28}+y_{29}-y=0$$

$$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9+y_{10}+y_{11}+y_{12}+y_{13}+y_{14}+y_{15}+y_{16}+y_{17}+y_{18}+y_{19}+y_{20}+y_{21}+y_{22}+y_{23}+y_{24}+y_{25}+y_{26}+y_{27}+y_{28}+y_{29}<43$$

$$z_1+z_2+z_3+z_4+z_5+z_6+z_7+z_8+z_9+z_{10}+z_{11}+z_{12}+z_{13}+z_{14}+z_{15}+z_{16}+z_{17}+z_{18}+z_{19}+z_{20}+z_{21}+z_{22}+z_{23}+z_{24}+z_{25}+z_{26}+z_{27}+z_{28}+z_{29}+z_{30}+z_{31}+z_{32}+z_{33}+z_{34}+z_{35}+z_{36}+z_{37}+z_{38}+z_{39}+z_{40}+z_{41}+z_{42}+z_{43}+z_{44}+z_{45}+z_{46}+z_{47}+z_{48}+z_{49}+z_{50}+z_{51}+z_{52}+z_{53}-z=0$$

$$z_1+z_2+z_3+z_4+z_5+z_6+z_7+z_8+z_9+z_{10}+z_{11}+z_{12}+z_{13}+z_{14}+z_{15}+z_{16}+z_{17}+z_{18}+z_{19}+z_{20}+z_{21}+z_{22}+z_{23}+z_{24}+z_{25}+z_{26}+z_{27}+z_{28}+z_{29}+z_{30}+z_{31}+z_{32}+z_{33}+z_{34}+z_{35}+z_{36}+z_{37}+z_{38}+z_{39}+z_{40}+z_{41}+z_{42}+z_{43}+z_{44}+z_{45}+z_{46}+z_{47}+z_{48}+z_{49}+z_{50}+z_{51}+z_{52}+z_{53}<22$$

$$m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6+m_7+m_8+m_9+m_{10}+m_{11}+m_{12}+m_{13}+m_{14}+m_{15}+m_{16}+m_{17}+m_{18}+m_{19}+m_{20}+m_{21}+m_{22}+m_{23}+m_{24}+m_{25}+m_{26}+m_{27}+m_{28}+m_{29}+m_{30}+m_{31}+m_{32}+m_{33}+m_{34}+m_{35}+m_{36}+m_{37}+m_{38}+m_{39}+m_{40}+m_{41}-m=0$$

$$m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6+m_7+m_8+m_9+m_{10}+m_{11}+m_{12}+m_{13}+m_{14}+m_{15}+m_{16}+m_{17}+m_{18}+m_{19}+m_{20}+m_{21}+m_{22}+m_{23}+m_{24}+m_{25}+m_{26}+m_{27}+m_{28}+m_{29}+m_{30}+m_{31}+m_{32}+m_{33}+m_{34}+m_{35}+m_{36}+m_{37}+m_{38}+m_{39}+m_{40}+m_{41}<35$$

$$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7+n_8+n_9+n_{10}+n_{11}+n_{12}+n_{13}+n_{14}+n_{15}+n_{16}+n_{17}+n_{18}+n_{19}+n_{20}+n_{21}+n_{22}+n_{23}+n_{24}+n_{25}+n_{26}+n_{27}+n_{28}+n_{29}+n_{30}+n_{31}+n_{32}+n_{33}+n_{34}+n_{35}+n_{36}+n_{37}+n_{38}+n_{39}+n_{40}+n_{41}+n_{42}+n_{43}+n_{44}+n_{45}+n_{46}-n=0$$

$$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7+n_8+n_9+n_{10}+n_{11}+n_{12}+n_{13}+n_{14}+n_{15}+n_{16}+n_{17}+n_{18}+n_{19}+n_{20}+n_{21}+n_{22}+n_{23}+n_{24}+n_{25}+n_{26}+n_{27}+n_{28}+n_{29}+n_{30}+n_{31}+n_{32}+n_{33}+n_{34}+n_{35}+n_{36}+n_{37}+n_{38}+n_{39}+n_{40}+n_{41}+n_{42}+n_{43}+n_{44}+n_{45}+n_{46}<25$$

$$p1+p2+p3+p4+p5+p6+p7+p8+p9+p10+p11+p12+p13+p14+p15+p16+p17+p18+p19+p20+p21+p22+p23+p24+p25+p26+p27+p28+p29+p30+p31-p=0$$

$$p1+p2+p3+p4+p5+p6+p7+p8+p9+p10+p11+p12+p13+p14+p15+p16+p17+p18+p19+p20+p21+p22+p23+p24+p25+p26+p27+p28+p29+p30+p31 < 5$$

$$x+y+z+m-5n > 0$$

end

GIN 240

模型求得的运输装载方案

Variable	Value	Reduced Cost
X	21.00000	1.000000
Y	12.00000	1.000000
Z	22.00000	1.000000
M	35.00000	1.000000
N	18.00000	1.000000
P	5.000000	1.000000