

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

## 第十二届“中关村青联杯”全国研究生 数学建模竞赛

学 校 南京航空航天大学

---

参赛队号 10287026

---

1.徐威远

---

队员姓名 2.严新宇

---

3.叶星炜

---

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)



## 第十二届“中关村青联杯”全国研究生 数学建模竞赛

题 目      面向节能的单/多列车优化决策问题

### 摘要：

本文针对面向节能及延误调整的单/多列车优化决策问题，基于列车的动力学方程，构建出列车运行规划模型，通过模拟退火等算法，给出了列车运行工况规划及延误调整的方案。主要完成的工作如下：

问题一中为了解决列车在站点间运行的能耗最小问题，本文根据庞特里亚金的极大值原理，利用哈密尔顿函数结合列车动力学方程，构建能耗模型，将能耗最优转化为求哈密尔顿函数最大值。本文还提出一种新的预处理方法，将列车距前方停车点或限速点的距离通过“逆推”式的预处理折算为当前状态，大幅简化列车运动状态的求解并提高精度，从而设计出约束时间内能耗最优控制算法，制定出最节能的“牵引-巡航-惰行-制动”策略，再依据惰行点控制原理，控制进入及退出惰行工况的状态参数，使运行时间和距离符合要求。

第1问中通过对A6到A7过程应用并求解能耗模型，解决了两站间列车运行能耗最优问题，得出结果为：列车在最大牵引力模式下达到的最大速度66.65km/h，最大制动模式的初始速度34.7km/h，能耗 $3.726 \times 10^7$ J。

第2问中分配A6到A7以及A7到A8两段路径的运行时间，依据第1问模型求出各单个子区间在给定时间下的最优能耗。在不同的分配方案中选择总体最优方案，使得总能耗最低。最终此过程中能耗为 $6.774 \times 10^7$ J，A6至A7分配的时间为111.5s，A7至A8分配的时间为108.6s，到站距离完全吻合，总时间与规定时间220s相比，有0.045%的误差，可忽略不计。

问题二：本文在单列车能耗模型基础上，考虑多列列车运行时再生能源重复利用问题，建立节能运行优化控制模型，将移动闭塞状态下的速度约束转换为出

站时间约束，并通过时域离散化，将问题转化为非线性整数规划问题，优化目标为再生能源利用量最多。

第1问使用模拟退火算法求解出各列车发车时间间隔并确定运行方案。计算出100列列车能耗为 $7.0648 \times 10^{10}$ J，再生能利用总量 $4.2578 \times 10^9$ J。

第2问在第1问基础上，在高峰期和其余时间考虑不同的约束条件，安排新的运行方案，计算出240列列车能耗为 $1.4396 \times 10^{11}$ J，再生能利用总量 $3.5808 \times 10^{10}$ J。

问题三：以列车恢复正点运行时间最小为目标函数，建立列车延误调整模型。通过对移动闭塞条件下各站点发车间隔的约束，得出单列列车最大调整时间，从而以列车为单位考虑延误调整，显著降低了问题的复杂度，从而解出平均最优发车间隔。对延误恢复时间按概率密度求期望后，对非高峰期与高峰期分别讨论。非高峰情况下得出了可迅速恢复正点发车的结论。高峰期情况下，在统计意义下求出最小恢复时间与发车间距，将问题二中平均发车间隔由120s调节到129s，延误后恢复时间期望为52.71s。

**关键词：**列车规划，延误调整，整数规划，模拟退火，哈密尔顿函数

## 目录

1	问题重述 . . . . .	5
1.1	问题背景 . . . . .	5
1.2	本文所需解决的问题 . . . . .	5
2	问题假设 . . . . .	5
3	符号说明 . . . . .	6
4	问题一分析 . . . . .	7
4.1	列车动力学模型 . . . . .	7
4.2	约束时间内从 $A_6$ 至 $A_7$ 的能耗最优模型 . . . . .	8
4.2.1	能耗模型描述 . . . . .	9
4.2.2	能耗模型最优控制算法 . . . . .	9
4.2.3	惰行点控制 . . . . .	10
4.2.4	模型求解 . . . . .	11
4.3	$A_6$ 站至 $A_8$ 站能耗控制最优模型 . . . . .	13
4.3.1	运行时间与运行能耗的关系 . . . . .	14
4.3.2	能耗模型最优控制算法 . . . . .	14
4.3.3	模型求解 . . . . .	14
5	问题二分析 . . . . .	16
5.1	再生能源利用原理 . . . . .	16
5.2	100 列列车节能运行优化控制模型 . . . . .	17
5.2.1	多列列车能耗模型描述 . . . . .	17
5.2.2	追踪列车限制速度 $v_{\text{limit}}$ 转化为时间间隔限制 . . . . .	18
5.2.3	列车再生能利用优化算法及求解 . . . . .	19
5.3	240 列列车节能运行优化控制模型 . . . . .	22
5.3.1	模型描述 . . . . .	22
5.3.2	模型求解 . . . . .	23
6	问题三分析 . . . . .	25
6.1	列车延误模型 . . . . .	25
6.1.1	目标函数的确立 . . . . .	25
6.1.2	约束条件的确立 . . . . .	26
6.2	列车延误 10s 后运行优化控制 . . . . .	27
6.3	列车延时不確定运行优化控制 . . . . .	27
7	模型总结分析 . . . . .	29
8	参考文献 . . . . .	31
9	附录：问题一 Excel 表格内容 . . . . .	31

## 1 问题重述

### 1.1 问题背景

轨道交通系统的能耗是指列车牵引、通风空调、电梯、照明、给排水、弱电等设备产生的能耗。根据统计数据，列车牵引能耗占轨道交通系统总能耗 40%以上。在低碳环保、节能减排日益受到关注的情况下，针对减少列车牵引能耗的列车运行优化控制近年来成为轨道交通领域的重要研究方向。

### 1.2 本文所需解决的问题

问题 1：单列车节能运行优化控制问题

- 1) 请建立计算速度距离曲线的数学模型，计算寻找一条列车从 A<sub>6</sub> 站出发到达 A<sub>7</sub> 站的最节能运行的速度距离曲线，其中两车站间的运行时间为 110 秒。
- 2) 请建立新的计算速度距离曲线的数学模型，计算寻找一条列车从 A<sub>6</sub> 站出发到达 A<sub>8</sub> 站的最节能运行的速度距离曲线，其中要求列车在 A<sub>7</sub> 车站停站 45 秒，A<sub>6</sub> 站和 A<sub>8</sub> 站间总运行时间规定为 220 秒（不包括停站时间）。

问题 2：多列车节能运行优化控制问题

当 100 列列车以间隔  $H = \{h_1, \dots, h_{99}\}$  从 A<sub>1</sub> 站出发，追踪运行，依次经过 A<sub>2</sub>，A<sub>3</sub>，……到达 A<sub>14</sub> 站。中间在各个车站停站最少  $D_{\min}$  秒，最多  $D_{\max}$  秒。间隔 H 各分量的变化范围是  $H_{\min}$  秒至  $H_{\max}$  秒。请建立优化模型并寻找使所有列车运行总能耗最低的间隔 H。要求第一列列车发车时间和最后一列列车的发车时间之间间隔为 T<sub>0</sub>=63900 秒，且从 A<sub>1</sub> 站到 A<sub>14</sub> 站的总运行时间不变，均为 2086s(包括停站时间)。

- 1) 接上问，如果高峰时间（早高峰 7200 秒至 12600 秒，晚高峰 43200 至 50400 秒）发车间隔不大于 2.5 分钟且不小于 2 分钟，其余时间发车间隔不小于 5 分钟，每天 240 列。请重新为它们制定运行图和相应的速度距离曲线。

问题 3：列车延误后运行优化控制问题

- 1) 接上问，若列车  $i$  在车站 A<sub>j</sub> 延误  $DT_j^i$  (10 秒) 发车，请建立控制模型，找出在确保安全的前提下，首先使所有后续列车尽快恢复正常运行，其次恢复期间耗能最少的列车运行曲线。
- 2) 假设  $DT_j^i$  为随机变量，普通延误 ( $0 < DT_j^i < 10s$ ) 概率为 20%，严重延误 ( $DT_j^i > 10s$ ) 概率为 10% (超过 120s，接近下一班，不考虑调整)，无延误 ( $DT_j^i = 0$ ) 概率为 70%。若允许列车在各站到、发时间与原时间相比提前不超过 10 秒，根据上述统计数据，如何对第二问的控制方案进行调整？

## 2 问题假设

根据题意，可以进行如下假设：

- 1) 列车为单质点，列车运动符合牛顿运动学定律。
- 2) 附加阻力主要为坡道附加阻力和曲线附加阻力。当坡道附加阻力，曲线附加阻力同时出现时，将列车通过曲线时所产生的附加阻力折算为坡道阻力。
- 3) 多列车规划情况下，各列车运行状态近似平行。
- 4) 列车延误时间在各分段内是均匀分布的。

### 3 符号说明

$F_{\max}$	牵引力最大值
$v$	列车速度
$\mu_1$	实际输出的牵引加速度与最大加速的的百分比
$w_0$	单位基本阻力
$w_i$	单位坡道阻力系数
$i$	线路坡度
$w_c$	单位曲线阻力系数
$W$	线路阻力
$B_{\max}$	制动力最大值
$\mu_2$	实际输出的制动加速度与最大加速的的百分比
$T$	题中给定的运行时间
$X$	车站间的距离
$x$	位移
$E$	列车能耗
$L$	拉格朗日乘子
$H(x, \mu_1, v)$	哈密尔顿函数
$v_k$	$k$ 时刻的速度
$a_k$	$k$ 时刻的加速度
$x_k$	$k$ 的位移
$T_j$	子区间 $j$ 分配的时间
$X_j$	子区间 $j$ 的距离
$E_j$	子区间 $j$ 的最优耗能
$E_{reg}$	再生能
$E_{used}$	再生能利用量
$t_{overlap}$	重叠时间
$t_{brake}$	制动时间
$H = \{h_1, \dots, h_{99}\}$	100 列列车发车时间间隔
$D_{nm}$	第 $n$ 列列车在 $A_m$ 站的停靠时间
$E_{used}^n$	第 $n$ 列列车的再生能源利用量
$T_{nm}$	第 $n$ 列列车在 $A_m$ 站到 $A_{m+1}$ 站的行驶时间
$E_{used}^{total}$	总的再生能源利用量

## 4 问题一分析

### 4.1 列车动力学模型

列车在运行过程中，实际受力状态非常复杂。采用单质点模型是一种常见的简化方法。单质点模型将列车视为单质点，列车运动符合牛顿运动学定律。其受力可分为四类：重力  $G$  在轨道垂直方向上的分力与受到轨道的托力抵消，列车牵引力  $F$ ，列车制动力  $B$  和列车运行总阻力  $W$ ，如图 4.1 所示。

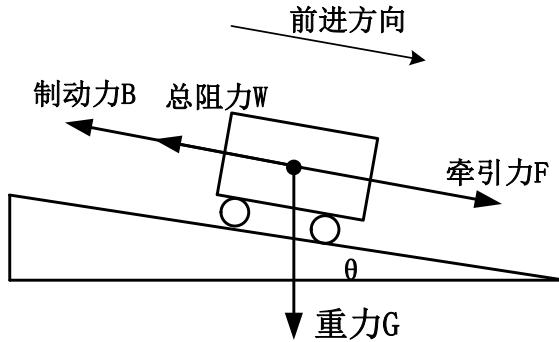


图 4.1 单质点列车受力分析示意图

#### (1) 列车牵引力

列车牵引力  $F$  是由动力传动装置产生的、与列车运行方向相同、驱动列车运行并可由司机根据需要调节的外力。牵引力  $F$  在不同速度下存在不同的最大值  $F_{\max} = f_F(v)$ 。 $F_{\max}$  可表示为：

$$F_{\max} = \begin{cases} 203 & 0 \leq v \leq 51.5 \text{ km/h} \\ -0.002032v^3 + 0.4928v^2 - 42.13v + 1343 & 51.5 < v < 80 \text{ km/h} \end{cases} \quad (4.1.1)$$

其中， $v$  为列车速度 (km/h)。

列车实际输出牵引力 (kN) 则可基于以下公式进行计算：

$$F = \mu_l F_{\max} \quad (4.1.2)$$

其中， $\mu_l$  为实际输出的牵引加速度与最大加速的百分比， $F_{\max}$  为牵引力最大值。

#### (2) 列车运行总阻力

列车总阻力是指列车与外界相互作用引起与列车运行方向相反、一般是阻碍列车运行的、不能被司机控制的外力。按其形成原因可分为基本阻力和附加阻力。

1) 基本阻力：列车的基本阻力是列车在空旷地段沿平、直轨道运行时所受到的阻力。该阻力是由于机械摩擦，空气摩擦等因素作用而产生的固有阻力。基本阻力与许多因素有关，它主要取决于机车、车辆结构和技术状态、轴重、以及列车运行速度等，同时又受线路情况、气候条件影响。由于这些因素极为复杂，而且相互影响，实际应用中很难用理论公式进行准确计算，通常采用以下经验公式进行计算：

$$w_0 = A + Bv + Cv^2 \quad (4.1.3)$$

其中  $w_0$  为单位基本阻力 (N/kN), A、B、C 为阻力多项式系数, 通常 A 取 2.031, B 取 0.0622, C 取 0.001807。

2) 附加阻力: 列车由于在附加条件下 (通过坡道、曲线、隧道) 运行所增加的阻力叫做附加阻力。附加阻力主要考虑坡道附加阻力和曲线附加阻力。

$$w_1 = w_i + w_c \quad (4.1.4)$$

列车的坡道附加阻力是列车上下坡时重力在列车运行方向上的一个分力。通常采用如下公式计算:

$$w_i = i \quad (4.1.5)$$

其中  $w_i$  为单位坡道阻力系数 (N/kN),  $i$  为线路坡度 (%)。为正表示上坡,  $i$  为负表示下坡。

列车的曲线阻力主要源自取决于轨道线路的曲率半径, 列车在曲线上运行时, 轮轨间纵向和横向的滑动摩擦力增加, 转向架等各部分摩擦力也有所增加。通常采用如下公式计算:

$$w_c = c / R \quad (4.1.6)$$

其中  $w_c$  为单位曲线阻力系数 (N/kN),  $R$  为曲率半径 (m);  $c$  为综合反映影响曲线阻力许多因素的经验常数, 我国轨道交通一般取 600。

综上, 列车运行总阻力可按照如下公式计算:

$$W = (w_0 + w_1) \times g \times M / 1000 \quad (4.1.7)$$

其中,  $W$  为线路阻力 (N),  $w_0$  为单位基本阻力系数 (N/kN),  $w_1$  为单位附加阻力系数 (N/kN),  $M$  为列车质量 (kg),  $g$  为重力加速度常数。

3) 列车制动力: 制动力  $B$  是由制动装置引起的、与列车运行方向相反的、司机可根据需要控制其大小的外力。制动力  $B$  存在与制动时列车速度有关的最大值, 制动力最大值  $B_{\max}$  可表示为:

$$B_{\max} = \begin{cases} 166 & 0 < v < 77 \text{ km/h} \\ 0.1343v^2 - 25.07v + 1300 & 77 < v < 80 \text{ km/h} \end{cases} \quad (4.1.8)$$

列车实际输出制动力 (kN) 基于以下公式进行计算:

$$B = \mu_2 B_{\max} \quad (4.1.9)$$

其中,  $\mu_2$  为实际输出的制动加速度与最大加速度的百分比,  $B_{\max}$  为制动力最大值(kN)。

## 4.2 约束时间内从 $A_6$ 至 $A_7$ 的能耗最优模型

第一题第 1 问问题描述如下: 列车从起始车站以初速度  $v_0 = 0$  出发, 按照给定运行时间  $T = 110s$  从  $A_6$  到达终点站  $A_7$ , 运行距离  $X = 1354m$ , 求控制序列, 使这一运行过程能耗最小, 并绘制出速度距离曲线。

### 4.2.1 能耗模型描述

目标函数为能耗  $E$  (列车牵引力做功):

$$\min E = \int_0^T \mu_1 F_{\max} v dt \quad (4.2.1)$$

约束条件为:

$$\mu_1 \in [0, 1], \mu_2 \in [0, 1] \quad (4.2.2)$$

$$v < V(x) \quad (4.2.3)$$

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, v(0) = v_0 \\ x(T) &= x_T, v(T) = v_{T_0} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= \mu_1 F_{\max} - \mu_2 B_{\max} - w_0 - w_1 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

其中,  $x(t)$  为距离与时间的函数。一般取初始条件为:  $x(0) = x_0 = 0$ ,  $v(0) = v_0 = 0$ ,  $x(T) = x_T = 1354$ ,  $v(T) = v_{T_0} = 0$ 。

### 4.2.2 能耗模型最优控制算法

最优控制算法, 是从列车最优控制角度出发, 应用最优控制理论, 对列车运行过程进行建模并求解的。

根据式 (4.2.5), 得:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\mu_1 F_{\max} - \mu_2 B_{\max} - w_0 - w_1}{v} \quad (4.2.6)$$

根据 (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3) 和 (4.2.4), 上述问题转换为:

$$\min(J) = \min(E + LT) = \min\left(\int_0^T (\mu_1 F_{\max} + L/v) dx\right) \quad (4.2.7)$$

$L$  为拉格朗日乘子 ( $L > 0$ ), 其约束条件为 (4.2.2), (4.2.3) 和 (4.2.4)。

根据庞特里亚金的极大值原理, 构造哈密尔顿函数  $H(x, \mu_1, v)$ , 共轭函数  $P(x)$ , 以及互补松弛函数  $M(x)$ :

$$H = -\mu_1 F_{\max} - \frac{L}{v} + \frac{P}{v} (\mu_1 F_{\max} - \mu_2 B_{\max} - w_0 - w_1) \quad (4.2.8)$$

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial v} + \frac{dM}{dx} \quad (4.2.9)$$

$$(v - V) \frac{dM}{dx} \quad (4.2.10)$$

假设  $p = P/v$ , 则 (4.2.8) 变为:

$$H = (p-1)\mu_1 F_{\max} - p\mu_2 B_{\max} - p(r+g) - L/v \quad (4.2.11)$$

因为牵引力与制动力不能同时采用, 可将上式分为以下两种情况:

$$\begin{cases} H = (p-1)\mu_1 F_{\max} - p(r+g) - L/v & (\mu_1 \geq 0) \\ H = -p\mu_2 B_{\max} - p(r+g) - L/v & (\mu_2 \geq 0) \end{cases} \quad (4.2.12)$$

为使能耗最低, 则汉密尔顿函数取最大值, 综合情况为<sup>[1]</sup>:

- (1)  $p_1 > 1$  时,  $F = F_{\max}, B_{\max} = 0$ , 为最大牵引力模式;
- (2)  $p_1 = 1$  时,  $F$  可变,  $B_{\max} = 0$ , 为部分牵引力模式;

- (3)  $0 < p_1 < 1$  时,  $F = 0, B_{\max} = 0$ , 为惰行模式;
- (4)  $p_1 = 0$  时,  $F = 0$ ,  $B$  可变, 为部分制动模式;
- (5)  $p_1 < 0$  时,  $F = 0, B = B_{\max}$ , 为最大制动模式。

下面简要讨论上述控制模式应用条件。

由 (4.2.11) 得:

$$\frac{\partial H}{\partial v} = (p-1)\mu_1 F'_{\max} - p\mu_2 B'_{\max} - pr' + L/v^2 \quad (4.2.13)$$

代入 (4.2.9) 得:

$$\begin{aligned} \frac{vdp}{dx} &= -\frac{\partial H}{\partial v} + \frac{dM}{dx} \\ \frac{dp}{dx} &= \frac{1}{v} \left( (1-p)\mu_1 F'_{\max} + p(\mu_2 B'_{\max} + r') \right) \frac{L}{v^2} + \frac{dM}{dx} \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

(1) 对于部分制动,  $p = 0, \mu_1 = 0$ , 所以  $dp/dx = 0$ , 即:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \left( -\frac{L}{v^2} + \frac{dM}{dx} \right) &= 0 \Rightarrow \frac{L}{v^2} = \frac{dM}{dx} > 0 \\ \because (v-V) \frac{dM}{dx} &= 0 \\ \therefore v &= V \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

因此, 部分制动模式存在条件是  $v$  等于限制速度  $V$ 。

(2) 对部分牵引,  $p = 1, \mu_2 = 0$ , 所以  $dp/dx = 0$ , 得:

$$\frac{1}{v} \left( pr' - \frac{L}{v^2} + \frac{dM}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} = L/v^2 - pr' \quad (4.2.16)$$

根据 (4.2.10), 若  $v < V, dM/dx = 0$ , 则

$$v = v_q = \sqrt{L/(pr')} \quad (4.2.17)$$

若  $v = V$ ,  $\frac{dM}{dx} \geq 0 \Rightarrow v \leq v_q$ 。

所以, 部分牵引模式存在时, 列车应维持在某一特定速度  $v_q$  或限制速度  $V$  上, 满足  $v = \min\{v_c, V\}$ 。

### 4.2.3 惰行点控制

根据 4.2.2 节, 为了保证耗能最少, 较优的操作原则是: 加速阶段以最大牵引力加速; 中间阶段采用匀速运行和尽可能的惰行, 进站阶段以最大制动力制动。若区间运行时间比较充裕, 速度越低, 列车能耗越小<sup>[2]</sup>。

因此为了保证时间在规定时间内且不超过给定限速, 在上文操作规则下引入惰行点控制, 使列车能精确到达站点  $A_7$ 。

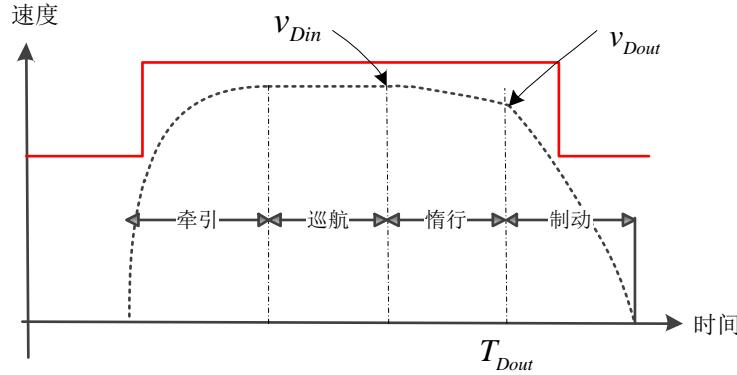


图 4.2 列车运行示意图

上图中,  $v_{Din}$  为惰行阶段的初始速度,  $v_{Dout}$  为惰行阶段的结束速度。 $T_{Dout}$  为惰行结束的时刻。

由上可知在制动阶段采用最大制动, 则加速度  $a_0$  恒定, 则实际运行时间可求出为:

$$T_{total} = T_{Dout} + \frac{v_{Dout}}{a_0} \quad (4.2.18)$$

为了保证能耗最低, 若时间  $T_{total} > T$  ( $T$  为规定时间), 则必须增加巡航阶段, 才能定时到站。若  $T_{total} < T$ , 则必须降低最大速度  $v_{Din}$ , 保证定时到站。

另外, 运行速度的波动越小, 能耗越小。因此, 可以这样设计最节能的牵引策略, 即在给定的运行时间内, 采用最大牵引力加速至某一速度(不超过限度)时, 尽可能使用惰行, 最后采用最大制动使得到站时速度为 0。若实际时间超过规定运行时间, 可适当增加巡航阶段, 使运行时间符合要求。

#### 4.2.4 模型求解

本文给出一种约束时间内从  $A_6$  至  $A_7$  的能耗最优控制算法, 对运行距离  $X$  进行离散, 分成  $N$  等份。则距离步长, 速度, 加速度和位移可表示为:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{X}{N} \\ v_{k+1} &= \sqrt{v_k^2 + 2a_k \Delta x} \\ x_{k+1} &= x_k + \Delta x \\ a_{k+1} &= \max(\min(\frac{v_{k+1}^2 - v_k^2}{2\Delta x}, a_{\max}), a_{\min}) \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{1}{v_k} \cdot \Delta x$$

其中,  $v_k$  为  $k$  时刻的速度,  $a_k$  为  $k$  时刻的加速度,  $x_k$  为  $k$  的位移。 $\Delta x$  为距离步长, 则通过迭代循环过程, 得出速度距离曲线。

图 4.3 为计算流程图:

步骤 1: 限速曲线预处理, 对限速点进行预判。

步骤 2: 根据 4.2.2 小节给出的最优驾驶策略, 分析线路情况, 选取操作工况:

最大牵引、巡航、惰行和最大制动。

步骤 3：仿真计算，记录相关数据。

步骤 4：检查是否运行完全程，如果完成进入步骤 5，否则，重复步骤 2。

步骤 5：检查仿真运行时间是否在给定的时间范围内。如果是，则进入步骤 7；否则，根据 4.2.3 节，进行惰行控制，进入步骤 6。

步骤 6：准备重新计算，进入步骤 2。

步骤 7：结束。

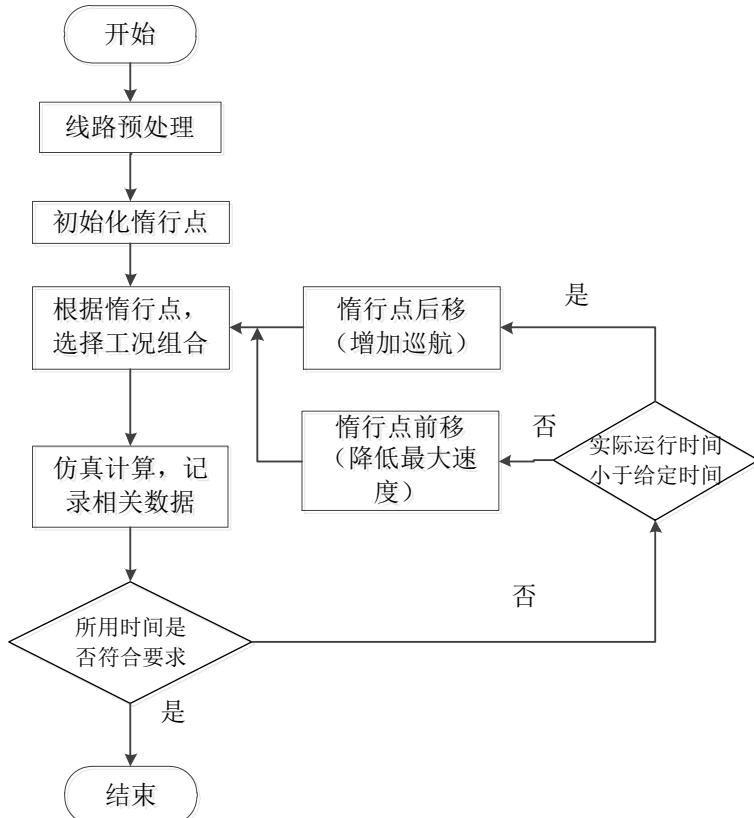


图 4.3 计算流程图

### (1) 限速曲线预处理：

列车在  $A_6$  至  $A_7$  站之间有两个限制速度， $55\text{km/h}$  与  $80\text{km/h}$ 。为了对到站进行预判，使列车在规定的距离内到站，可由以下公式递推得出优化后的速度限制图。

$$v_x = 0, v_k \leq v_{\text{limit}} \quad (4.2.20)$$

$$v_k^2 = \sqrt{v_{k+1}^2 - 2a\Delta s}, \quad k = 1, \dots, \frac{X}{\Delta s} \quad (4.2.21)$$

由题意可知，到站速度  $v_x = 0$ 。根据式 (4.2.19) 和到站速度  $v_x = 0$ ，可递推求出各个距离上的速度  $v_k$  ( $k = 1, \dots, \frac{X}{\Delta s}$ )，当  $v_k$  等于限制速度  $v_{\text{limit}}$ ，递推停止。则可求出到站阶段的速度限制曲线图。这样，可保证给定距离内到达站点  $A_7$ 。速度限制图如下所示：

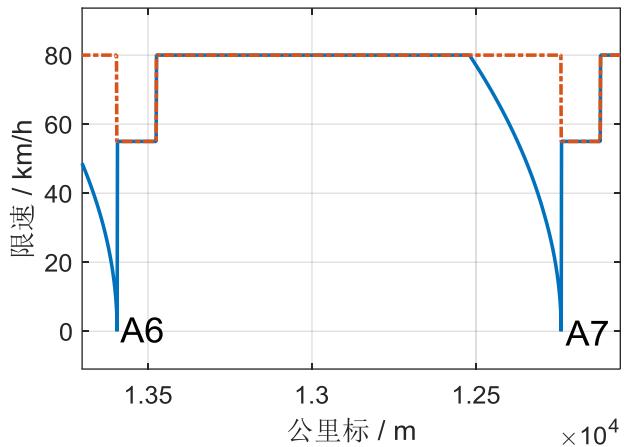


图 4.4 实际限速和到站优化后的限速示意图  
红色线为实际限速曲线，蓝色线为到站优化后的限速曲线。

### (2) 能耗最优的仿真示意图：

列车按优化后的限速图，根据 4.2.2 节的算法求解，得出以下的速度距离曲线图：

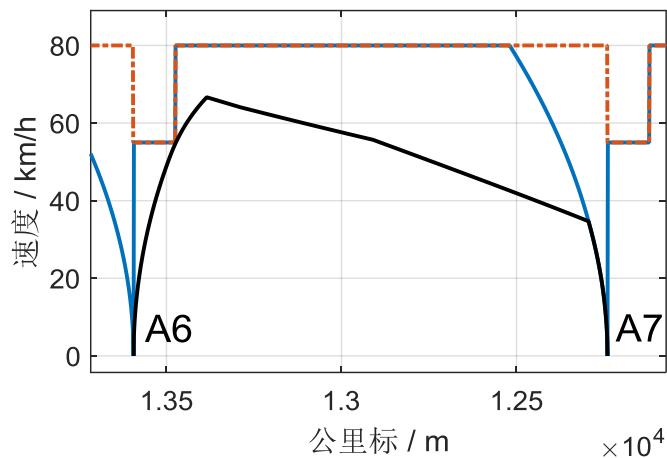


图 4.5 速度距离曲线示意图

如图 4.5 所示，黑色曲线为列车速度距离曲线。为了在规定时间内，到达 A<sub>7</sub> 站，所以列车发动阶段，采用最大牵引力模式达到规定时间内速度的最大值，然后以惰行模式运行，最终根据优化后的限速曲线，在拐点处，以最大制动力模式运行，最终到达终点站 A<sub>7</sub>。

### (3) 得出数据：

在此过程中，列车在最大牵引力模式下达到的最大速度  $v_{\max} = 66.65 \text{ km/h}$ 。而最大制动模式的初始速度即拐点 B 的速度  $v_B = 34.7 \text{ km/h}$ 。

由 4.2.1 和 4.2.2 节的模型可知，这种运行模式下，能耗最低。能耗  $E = 3.726 \times 10^7 \text{ J}$ 。

### 4.3 A<sub>6</sub> 站至 A<sub>8</sub> 站能耗控制最优模型

第一题第二问问题描述：计算寻找一条列车从 A<sub>6</sub> 站出发到达 A<sub>8</sub> 站的最节能运行的速度距离曲线，其中要求列车在 A<sub>7</sub> 车站停站  $D = 45$  秒，A<sub>6</sub> 站和 A<sub>8</sub> 站间总运行时间规定为  $T = 220$  秒（不包括停站时间）。

### 4.3.1 运行时间与运行能耗的关系

按照到站速度  $v=0$  的约束, 可将  $A_6$  至  $A_8$  站, 分为两个子区间:  $A_6$  至  $A_7$  和  $A_7$  至  $A_8$  站。按照优化的操纵序列仿真寻优, 即要确定 4.2.2 节所述的 5 种工况的运行距离。在其他条件相同的情况下, 对于在合理范围内给定的运行时间  $T$ , 优化操纵序列下运行的列车在该子区间的耗能  $E$ , 随给定运行时间  $T$  增加而减小, 呈现下图所示的单调下降关系。

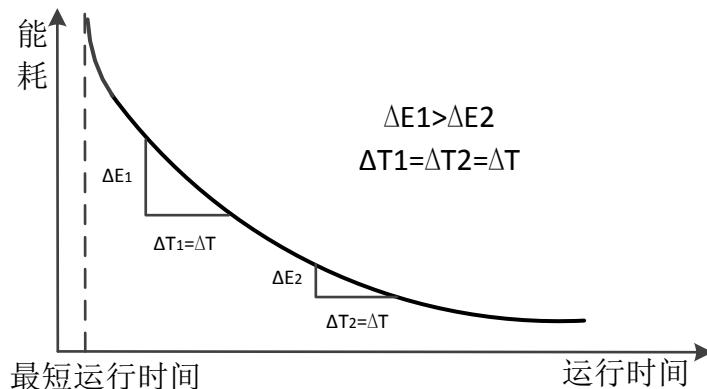


图 4.6 运行时间与运行能耗的关系

### 4.3.2 能耗模型最优控制算法

由 4.3.1 节运行时间与能耗的关系可知, 通过对各个子区间(本题只有 2 个)分配不同的时间, 然后根据分配的最优时间, 由 4.1 章给出的子区间( $A_j$  至  $A_{j+1}$  站)能耗最优控制算法求出该子区间的最小耗能, 叠加后即可得到最优的总耗能。

则本问的节能优化问题可描述为以下表达式:

$$\begin{aligned} \min E &= \sum_{j=1}^{N_A} E_j \\ E_j &= f_j(T_j, X_j), \quad i=1, \dots, N \\ \sum_{j=1}^{N_A} T_j &= T \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

其中,  $N_A$  为子空间个数,  $E_j$  为子区间的最优耗能, 可根据 4.1 章的模型算法求出。 $T_j$  为该子区间分配的时间,  $X_j$  为该子区间的距离。

### 4.3.3 模型求解

由上文所知, 优化操纵的方式下运行时间的增加可降低列车运行能耗, 但在不同的子区间, 增加(或减少)相同的运行时间  $\Delta T$  所带来的运行能耗的下降(或增加)  $\Delta E$  一般情况下是不同的。因而, 由式 (4.3.1) 给出的全局寻优策略则表现为: 将给定的总的运行时间  $T$ , 优化地分配给各子区间, 从而使列车在整个运行区间的总能耗最少<sup>[3][4][5]</sup>。

则算法流程图如下所示:

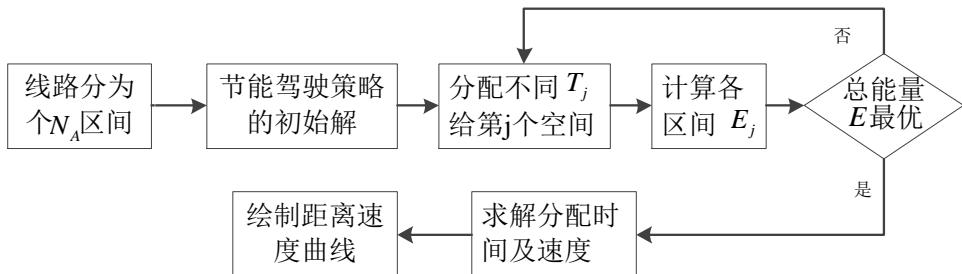


图 4.7 A6 至 A8 的算法流程图

### (1) 能耗最优的仿真示意图:

从 A6 至 A8 站, 由题中所给数据, 可知  $N_A = 2$ ,  $T_6 + T_7 = 220s$ , 根据 4.1 章的子区间局部能量最优模型结合分配的时间, 可得速度距离曲线为:

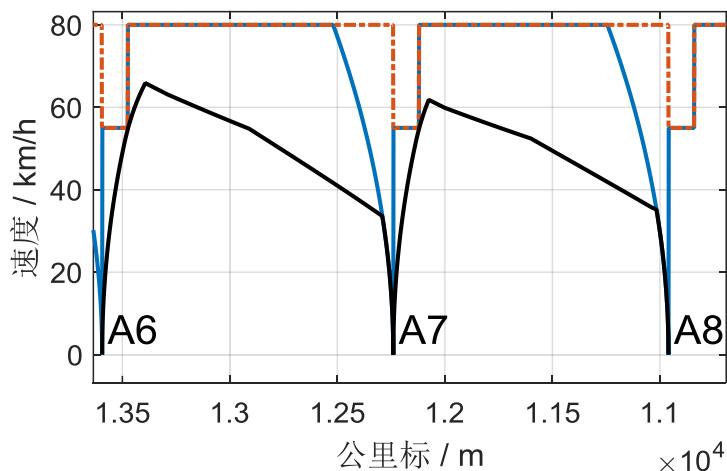


图 4.8 A6 至 A8 的速度距离曲线图

如图所示, 黑色曲线为列车的速度距离曲线, 红色线是实际限速, 蓝色线为优化后限速。通过以固定步长分配两个子区间的时间, 可求出两区间在不同分配时间下的总能耗, 可得出 A6 至 A7 的耗时在 220s 中的百分比与 A6 至 A8 站的总能耗曲线示意图:

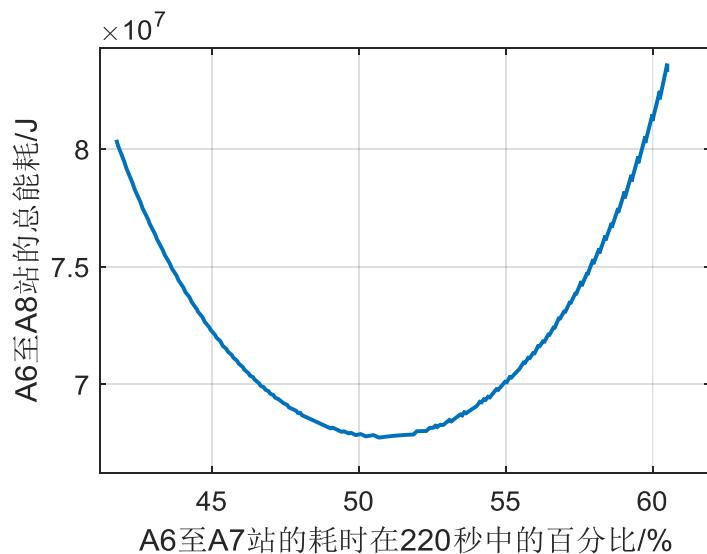


图 4.9 时间百分比与总能耗曲线示意图

列车在给定区间上按给定时间  $T$  运行，其节能操纵的优化计算分成两步。第一步称为局部优化，根据 4.2.2 节求出单个子区间的最优能耗。第二步全局优化则表现为对运行时间  $T$  的优化分配。对于操纵优化的实时系统，全局优化注重时效性，寻求满意解。

## (2) 得出结果：

表 4-1 为两区间的给出了两个子区间及总区间的最大速度，运行时间，最优能耗。

表 4-1

	最大速度(km/h)	运行时间(s)	最优能耗(J)
A6 至 A7	65.87	111.5	$3.627 \times 10^7$
A7 至 A8	61.82	108.6	$3.147 \times 10^7$
A6 至 A8(总)	65.87	220.1	$6.774 \times 10^7$

由表格看个 A6 至 A8 站的总运行时间为 220.1s，而规定时间为 220s，误差 0.045%，但由于本文计算模型采用是离散的方法，可认为这样的误差在可接受的范围内。

## 5 问题二分析

### 5.1 再生能源利用原理

随着制动技术的进步，目前城市轨道交通普遍采用再生制动。再生制动时，牵引电动机转变为发电机工况，将列车运行的动能转换为电能，发电机产生的制动力使列车减速，此时列车向接触网反馈电能，此部分能量即为再生制动能。如图 5.1 所示，列车  $i+1$  在制动时会产生能量，如果相邻列车  $i$  处于加速状态，其可以利用  $E_{reg}$ ，从而减少从变电站获得的能量，达到节能的目的。如果列车  $i+1$  制动时，其所处供电区段内没有其他列车加速，其产生的再生能量除用于本列车空调、照明等设备外，通常被吸收电阻转化为热能消耗掉<sup>[6][7]</sup>。

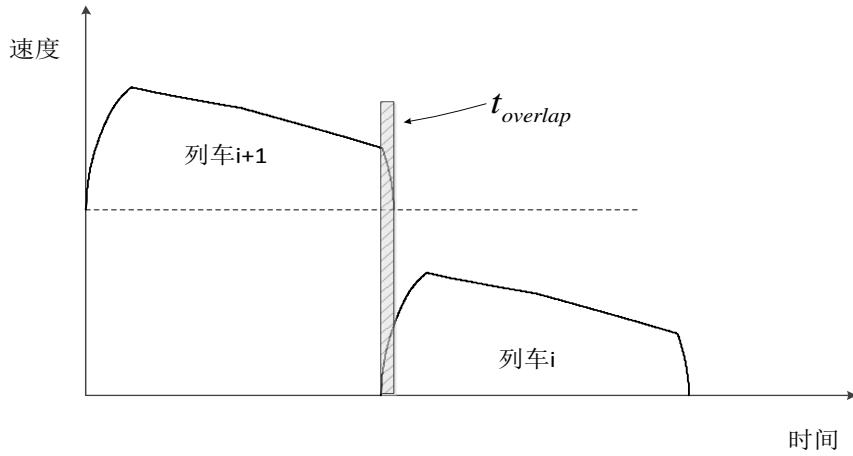


图 5.1 再生能量利用示意图

假设：

产生的再生能量：

$$E_{reg} = (E_{mech} - E_f) \cdot 95\% \quad (5.1.1)$$

其中  $E_{\text{mech}}$  是制动过程中列车机械能的变化量， $E_f$  是制动过程中为克服基本阻力和附加阻力所做功。

$$E_{\text{used}} = E_{\text{reg}} \cdot t_{\text{overlap}} / t_{\text{brake}} \quad (5.1.2)$$

如图 5.1 所示，其中  $t_{\text{overlap}}$  是列车  $i+1$  制动的时间与列车  $i$  加速时间的重叠时间， $t_{\text{brake}}$  是列车  $i+1$  的制动时间。即制动时所产生的再生能量与制动时间成正比。

## 5.2 100 列列车节能运行优化控制模型

第二题第一问问题描述如下：当 100 列列车以间隔  $H = \{h_1, \dots, h_{99}\}$  从  $A_1$  站出发，追踪运行，依次经过  $A_2, A_3, \dots, A_{14}$  站，中间在各个车站停站最少  $D_{\min} = 30s$ ，最多  $D_{\max} = 45s$ 。间隔  $H$  各分量的变化范围是  $H_{\min} = 120s$  至  $H_{\max} = 660s$ 。请建立优化模型并寻找使所有列车运行总能耗最低的间隔  $H$ 。

### 5.2.1 多列列车能耗模型描述

#### (1) 目标函数：

为了达到列车总耗能最小，则再生能源的利用率最高<sup>[8]</sup>，即总的再生能源利用量  $E_{\text{used}}^{\text{total}}$  最大，即：

$$E_{\text{used}}^{\text{total}} = \max\left(\sum_{n=1}^{N_l} E_{\text{used}}^n\right) \quad (5.2.1)$$

其中， $E_{\text{used}}^n$  为第  $n$  列列车的再生能源利用量， $N_l$  为列车数量。

#### (2) 约束条件：

1) 停站时间约束：

$$D_{\min} \leq D_{nm} \leq D_{\max} \quad (5.2.2)$$

其中， $D_{nm}$  为第  $n$  列列车在  $A_m$  站的停靠时间。

2) 发车时间间隔约束：

$$H_{\min} \leq h_n \leq H_{\max} \quad (5.2.3)$$

其中， $h_n$  为第  $n+1$  列列车与前车的发车时间间隔。

3) 从  $A_1$  站到  $A_{14}$  站的总运行时间  $T$  不变的约束：

$$T = \sum_{m=2}^{N_A-1} D_{nm} + \sum_{m=1}^{N_A-1} T_{nm} \quad (5.2.4)$$

其中， $T_{nm}$  为第  $n$  列列车在  $A_m$  站到  $A_{m+1}$  站的行驶时间， $N_A$  为车站数目。

4) 第一列列车发车时间和最后一列列车的发车时间间隔为  $T_0$  的约束：

$$T_0 = \sum_{n=1}^{N_l-1} h_n \quad (5.2.5)$$

#### (3) 模型总结：

综上所述，模型总结如下：

$$E_{used}^{total} = \max\left(\sum_{n=1}^{N_f} E_{used}^n\right)$$

$$s.t \begin{cases} D_{min} \leq D_{nm} \leq D_{max} \\ H_{min} \leq h_n \leq H_{max} \\ T = \sum_{m=2}^{N_A-1} D_{nm} + \sum_{m=1}^{N_A-1} T_{nm} \\ T_0 = \sum_{n=1}^{N_f-1} h_n \end{cases} \quad (5.2.6)$$

### 5.2.2 追踪列车限制速度 $v_{limit}$ 转化为时间间隔限制

在移动闭塞条件下，前后两列车的最小安全间隔指的是：前行列车刚刚出清车站，且驶过安全保护段  $L_s$  后续列车则以区间最大允许速度  $V_{max}$  行驶了，并位于距车站入口的距离正好等于列车制动距离加上制动反应时间内列车驶过的距离。

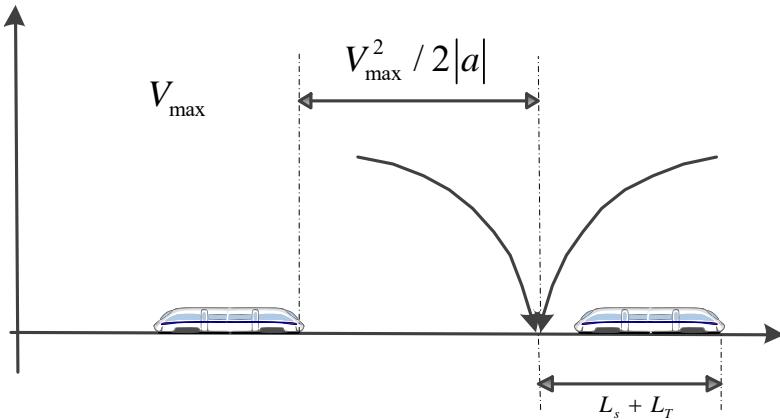


图 5.2 列车追踪间隔示意图

所以，可将列车追踪间隔时间  $T_z$  分成四部分，分别如下：

- (1)  $T_1$ ：先行列车出清车站并驶过安全防护区段  $L_s$ 。
- (2)  $T_B$ ：后续列车以  $V_{max}$  开始制动到停稳时间，值为  $\frac{V_{max}}{b}$ 。
- (3)  $D$ ：后续列车的停站时间。

$$T_z = \frac{V_{max}}{b} + D + T_1 \quad (5.2.7)$$

其中， $T_z$  为列车追踪间隔时间； $V_{max}$  为后续列车最大速度； $b$  后续列车制动减速度； $D$  为停站时间； $L_s$  为安全限速距离。

从附件查出  $L_s = 120m$ ， $L_T = 115m$ ，由于到站阶段处于最大制动  $|b| = 1m/s^2$ ，  
 $V_{max} = 80km/h = 22.22m/s$ 。

根据计算可知， $V_{max} > \sqrt{2a(L_s + L_T)}$ ，则

$$T_1 = \sqrt{\frac{2(L_T + L_s)}{a}} \quad (5.2.8)$$

其中， $a$  为牵引加速度。

$$\text{则 } T_z = \frac{V_{\max}}{b} + D + \sqrt{\frac{2(L_T + L_s)}{a}}.$$

列车处于牵引模式，则  $a = 1m/s^2$ ，且  $D$  取  $D_{\max}$ ，求出  $\max(T_z) = 88.90s$ 。

而文中  $H_{\min} = 120s$ ,  $H_{\min} > \max(T_z)$ ，则速度  $v_{\text{limit}}$  约束已经包含在时间间隔约束

$$H_{\min} \leq H \leq H_{\max}.$$

### 5.2.3 列车再生能利用优化算法及求解

由于 100 列列车要在相同的给定时间内运行完全程，则假定 100 列列车在全程 A1 至 A17 中的运行状态近似相等，停站时间  $D_{nm}$  ( $1 \leq n \leq 100, 2 \leq m \leq 13$ ) 取相同值，则待优化的变量可减少为只有发车时间时间间隔  $H = \{h_1, \dots, h_{99}\}$ 。

则可对上述模型进行离散化，将其简化为离散模型。

(1) 对再生能  $E_{reg}$  进行分类：

最大制动模式：  $E_{reg} > 0$

最大牵引模式：  $E_{reg} < 0$

其他模式：  $E_{reg} = 0$

(2) 对于一组  $H = \{h_1, \dots, h_{99}\}$ ，求出 100 列列车在离散时间  $t_k$  至  $t_{k+1}$  ( $k = 0, \dots, 63899$ ) 所消耗的再生能为  $E_{used}^k$ ，图 5.3 为每列列车的在各时间点处一秒内牵引力或制动力所做的功，纵坐标为车号，横坐标为时间，图中不同的颜色对应不同的能量大小。

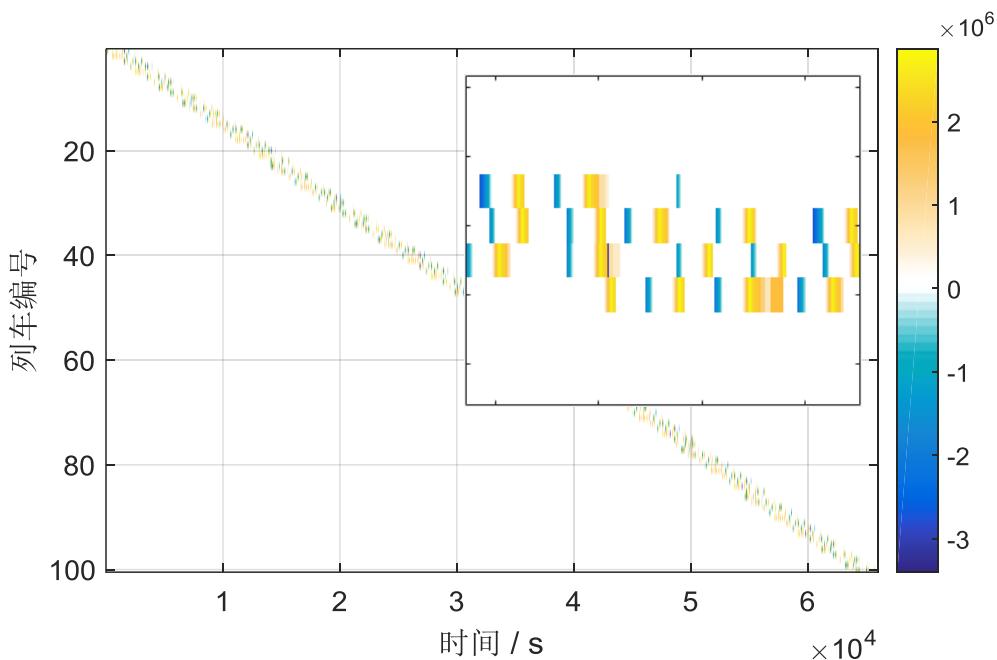


图 5.3 每列列车的吸收释放能量图

以车号 1 为例，在其对应的运行时间 2086s 内，其中黄色方块表示牵引所需的能量，蓝色方块表示制动对应的再生能。

则如图 5.3 所示，在 1s 的时间间隔内 100 列列车所能利用的再生能为  $E_{used}^k$  为：

$$E_{used}^k = 0.5 \left( \sum_{j=1}^{N_l} |E_{kj}^{reg}(H)| - \left| \sum_{j=1}^{N_l} (E_{kj}^{reg}(H)) \right| \right) \quad (5.2.9)$$

(3) 对目标函数式 (5.2.6) 离散化得:

$$E_{used}^{total} = \max \left( \sum_{k=0}^{T_0/\Delta T} E_{used}^k \right) = \max \left( \sum_{k=0}^{T_0/\Delta T} \left( \sum_{j=1}^{N_l} |E_{kj}^{reg}(H)| - \left| \sum_{j=1}^{N_l} (E_{kj}^{reg}(H)) \right| \right) \right) \quad (5.2.10)$$

其中,  $\Delta T$  为时间步长 (本题  $\Delta T=1$ ),  $T_0$  第一列列车发车时间和最后一列列车的发车时间之间间隔,  $N_l$  为车的列数。

(4) 使用模拟退火求出最优解:

本题将时间离散化, 则可将问题转化为带有约束条件的非线性整数规划问题。使用模拟退火求解答案。

模拟退火是一种试图模拟退火的物理过程的方法。算法先以搜寻空间内一个任意点作起始:每一步先选择一个“邻居”,然后再计算从现有位置到达“邻居”的概率。由于只舍弃部分坏点,因此模拟退火得到的是全局最优解。

表 5-1 模拟退火算法的符号表示

符号表示	意义描述
$X = H = \{h_1, \dots, h_{99}\}$	当前解
$X'$	由当前解生成的新解
$f(X)$	解 $X$ 的目标函数值
$\Delta f = f(X') - f(X)$	新解和当前解的目标函数之差
$T$	当前温度
$L$	马尔科夫链长度
$X_b$	最优解

### (1) 新解的产生步骤

给当前解  $X$  加一个随机数得到新解  $X'$ , 接着检查新解是不是在解空间中, 详细步骤如下:

步骤 1: 得到当前解  $X$ 。

步骤 2: 给当前解  $X$  加一个随机数, 得到新解  $X'$ 。

步骤 3: 检查新解是不是在解空间中, 如果是, 得到解空间, 否则转步骤 2。

### (2) 新解接收规则

新解的接受规则是确定是否从当前解移动到新解。其他的算法产生一个新解之后,如果新解的目标函数值优于当前解的目标函数值, 那么就接受新解, 否则舍弃新解。在模拟退火算法中, 当新解的目标函数值不优于当前解的时, 以一定的概率接受新解, 这是模拟退火算法的精髓。在这里, 采用著名的 Metropolis 准则。详细步骤如下:

步骤 1: 产生新解  $X'$ 。

步骤 2: 计算  $\Delta f = f(X') - f(X)$ 。 $\Delta f < 0$ ,  $X' = X$ , 停止。否则, 转步骤 3。

步骤 3: 如果  $e^{-(\Delta f/T)} > \text{random}(0,1)$ ,  $X' = X$ , 停止。否则, 转向步骤 1。

### (3) 冷却方式

模拟退火从初始解朝着包含更优解的空间搜索, 忽略一部分不好的解, 接受

一些不好的解。当温度降低到一个较低的值，算法可能会只接受更优的解，来找到目标函数的局部最小值。和金属退火类似，在这个过程中，每一个步骤中温度都是降低的。有各种不同的温度降低的计算方法，但这是一个对结果影响不大的细节。因此，这里使用了线性冷却方式 $T = \beta T$ ，其中指 $\beta$ 每一步的冷却率。

#### (4) 模拟退火算法步骤总结

模拟退火流程图如下：

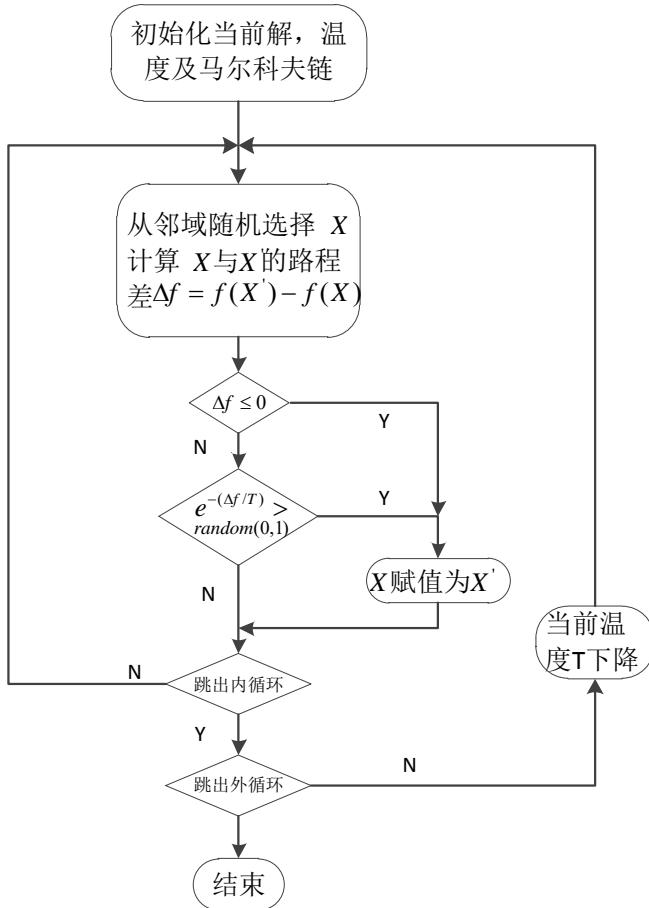


图 5.4 模拟退火流程图

根据以上算法，可得出模拟退化算法优化曲线如图 5.5 所示，其中蓝色曲线为当前值，红色曲线表示当前迭代次数下的最优值：

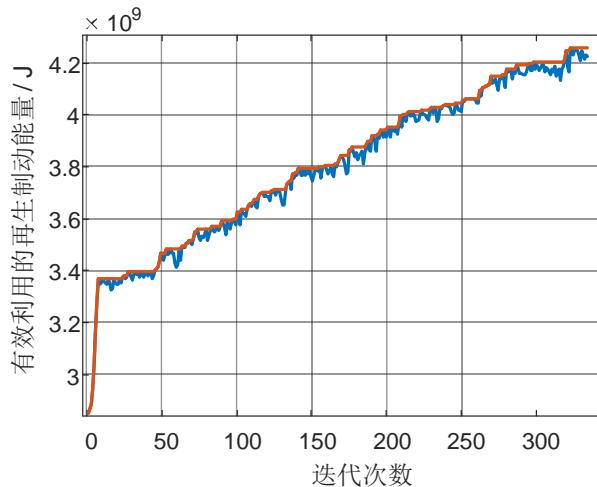


图 5.5 模拟退火算法优化过程示意图

1) 则根据以上算法和模型, 可得出每列列车的速度距离图, 因为本题假设每列列车的运行状态相似, 则速度距离图相同。每列列车的速度距离图如下, 黑色曲线为列车的速度距离曲线, 红色线是实际限速, 蓝色线为优化后限速:

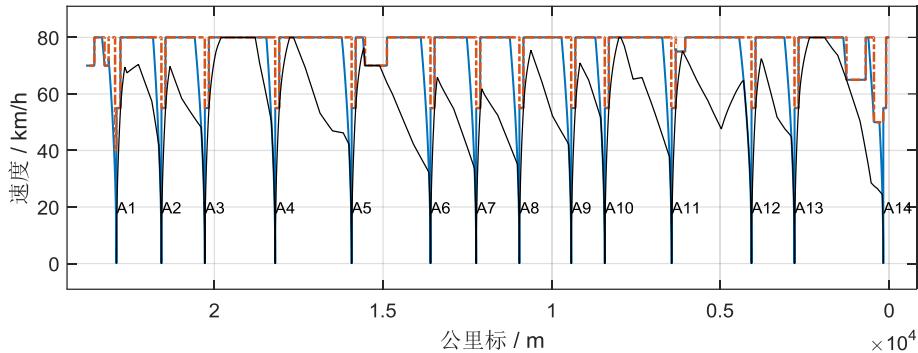


图 5.6 每列列车的速度距离图

5) 得出的  $H = \{h_1, \dots, h_{99}\} =$

$\{639, 660, 659, 614, 652, 659, 634, 645, 660, 630, 650, 649, 633, 657, 660, 637, 628, 639, 642, 660, 648, 652, 649, 628, 628, 660, 660, 631, 657, 653, 620, 659, 656, 636, 657, 647, 627, 651, 635, 643, 657, 652, 648, 638, 625, 660, 659, 656, 628, 628, 644, 660, 660, 637, 639, 631, 660, 658, 651, 630, 627, 655, 648, 656, 658, 613, 660, 659, 637, 637, 659, 640, 622, 659, 660, 648, 634, 648, 658, 657, 635, 632, 655, 622, 658, 658, 624, 656, 656, 636, 636, 650, 658, 634, 633, 660, 658, 647, 632\}$

给出运行图如下 (横坐标代表时间, 纵坐标代表距离)。

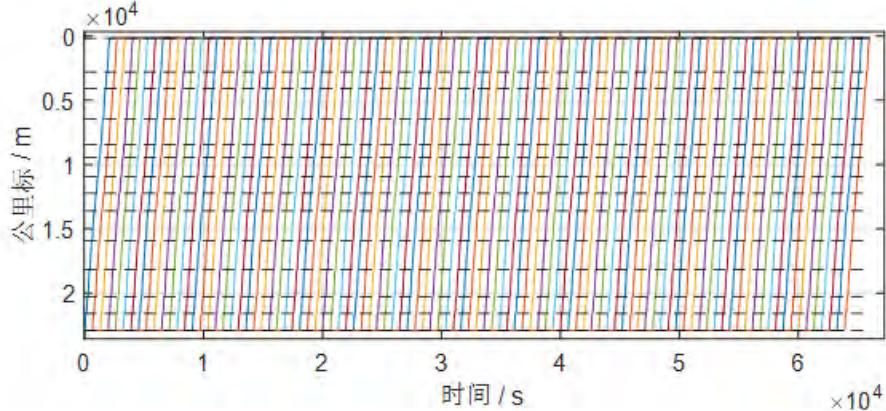


图 5.7 100 列列车的运行图

如图所示, 最下方的虚线所代表的站点为 A1, 以此类推, 最上一条代表 A14。计算得出 100 列列车的总能耗为牵引力做功减去再生能利用总量为  $7.0648 \times 10^{10} \text{ J}$ , 再生能利用总量  $4.2578 \times 10^9 \text{ J}$ 。

### 5.3 240 列列车节能运行优化控制模型

第二题第二问问题描述如下: 如果高峰时间 (早高峰 7200 秒至 12600 秒, 晚高峰 43200 至 50400 秒) 发车间隔不大于 2.5 分钟且不小于 2 分钟, 其余时间发车间隔不小于 5 分钟, 每天 240 列。重新为它们制定运行图和相应的速度距离曲线。

#### 5.3.1 模型描述

该问算法和模型同上节 5.2。只需改变约束条件:

(1) 高峰时间约束:

$$\sum_{i=1}^{n-1} h_i \in [7200, 12600] \cup [43200, 50400] \quad (5.3.1)$$

其中， $n$  为第  $n$  列列车， $\sum_{i=1}^{n-1} h_i$  为发车时间。

(2) 发车时间间隔约束：

$$H_{\min}'' \leq h_n \leq H_{\max} \quad (5.3.2)$$

其中， $H_{\min}'' = 300s$ 。

(3) 其他条件约束不变

(4) 模型总结：

$$\begin{aligned} E_{used}^{N_l} &= \max(\sum_{n=1}^{N_l} E_{used}^n) \\ s.t. \left\{ \begin{array}{l} D_{\min} \leq D_{nm} \leq D_{\max} \\ H_{\min}'' \leq h_n \leq H_{\max} \\ T = \sum_{m=2}^{N_A-1} D_{nm} + \sum_{m=1}^{N_A-1} T_{nm} \\ \sum_{i=1}^{n-1} h_i \in [7200, 12600] \cup [43200, 50400] \\ T_0 = \sum_{n=1}^{N_l-1} h_n \end{array} \right. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

### 5.3.2 模型求解

1) 模拟退火算法迭代优化示意图如下，其中蓝色曲线为当前值，红色曲线表示当前迭代次数下的最优值：

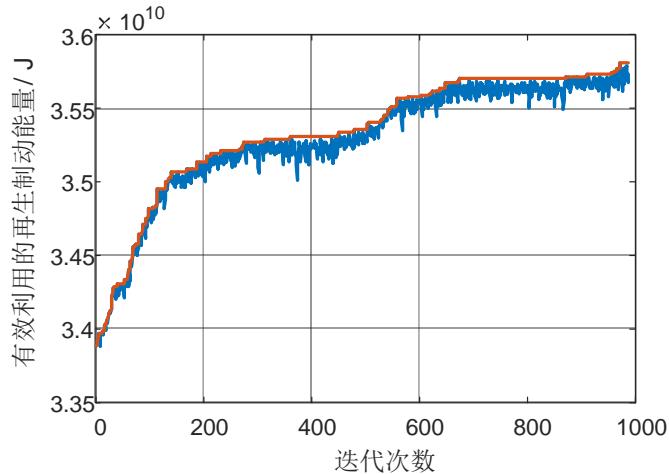


图 5.8 模拟退火算法优化示意图

2) 则根据以上算法和模型，可得出每列列车的速度距离图，因为本题假设每列列车的运行状态相似，则速度距离图相同。每列列车的速度距离图如下，黑色曲

线为列车的速度距离曲线，红色线是实际限速，蓝色线为优化后限速：

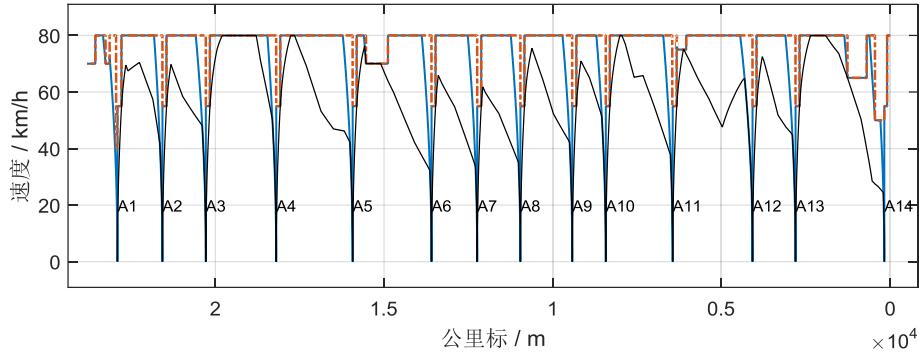


图 5.9 每列列车的速度距离图

3) 得出的  $H = \{h_1, \dots, h_{239}\} =$

$\{348, 334, 340, 353, 348, 358, 342, 317, 364, 339, 343, 358, 356, 340, 333, 368, 314, 343, 344, 3, 67, 337, 144, 147, 142, 146, 145, 127, 140, 142, 148, 137, 146, 150, 140, 125, 138, 149, 141, 150, 144, 132, 145, 149, 149, 138, 123, 146, 146, 140, 144, 150, 143, 149, 145, 127, 145, 133, 138, 36, 9, 322, 372, 344, 320, 353, 326, 346, 343, 371, 342, 327, 328, 375, 324, 348, 353, 330, 348, 330, 3, 52, 351, 359, 344, 338, 356, 324, 349, 357, 327, 338, 338, 353, 332, 370, 343, 342, 329, 342, 352, 355, 331, 338, 341, 373, 340, 325, 360, 333, 336, 369, 326, 366, 341, 329, 344, 340, 345, 341, 34, 7, 361, 315, 344, 350, 342, 370, 339, 325, 367, 333, 343, 344, 335, 341, 352, 340, 376, 317, 350, 3, 45, 342, 339, 342, 333, 344, 344, 343, 366, 331, 139, 142, 142, 145, 136, 146, 131, 148, 130, 146, 148, 126, 143, 148, 135, 150, 125, 140, 141, 148, 139, 133, 141, 142, 144, 138, 138, 135, 141, 14, 7, 144, 131, 136, 143, 143, 145, 138, 148, 133, 138, 141, 140, 141, 132, 144, 141, 135, 149, 134, 1, 32, 143, 139, 353, 336, 327, 334, 336, 348, 343, 329, 330, 341, 342, 345, 318, 350, 334, 335, 339, 335, 347, 335, 340, 323, 341, 352, 316, 356, 313, 353, 345, 320, 339, 333, 346, 336, 328, 339, 34, 1, 344, 343, 349\}$

给出运行图如下（横坐标代表时间，纵坐标代表距离）：

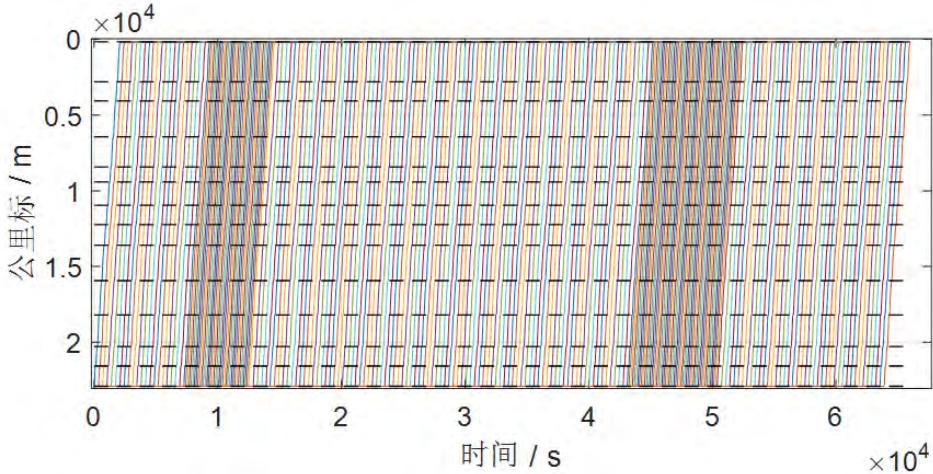


图 5.10 240 列列车的运行图

如图所示，最下方的虚线所代表的站点为 A1，以此类推，最上方一条代表 A14。计算出 240 列列车能耗为  $1.4396 \times 10^{11} \text{ J}$ ，再生能利用总量  $3.5808 \times 10^{10} \text{ J}$ 。

## 6 问题三分析

### 6.1 列车延误模型

#### 6.1.1 目标函数的确立

##### (1) 目标函数的初步优化

为了保证后续列车恢复正常运行，则必须改变  $f_{n,k}''$  ( $f_{n,k}''$  第  $n$  辆车实际在  $k$  站的发车时刻)，则必须改变运行时间  $T_{i,n}$ ，停站时间  $D_{i,n}$  与发车时间间隔  $h_n$ ，则下面讨论如何改变这些时间，以减少函数的自变量，使计算复杂度下降，能量最优。

###### 1) 运行时间讨论

运行时间与能耗的关系为：

$$E = f(T_{i,n}) \quad (6.1.1)$$

上式， $E$  为能耗，函数  $f$  为单调递减函数。

若以减少运行时间  $T_{i,n}$  来弥补上列列车的时间延误，由于  $f$  为单调递减函数，则会增加能量损耗，因此本题假定运行时间  $T_{i,n}$  确定，保持不变。

###### 2) 停站时间与发车时间间隔讨论：

因为停站时间  $D_{i,n}$  与发车时间间隔  $h_n$  的增加或减少不能直观的确定对能耗的影响，则本题以停站时间  $D_{i,n}$  与发车时间间隔  $h_n$  为自变量，求出最优的后车恢复正常运行所需的时间。

则恢复时间  $T_{recover}$  函数可写为：

$$T_{recover} = f_{recover}(D_{i,n}, H, DT_j^i) \quad (6.1.2)$$

其中， $DT_j^i$  为列车  $i$  在车站  $A_j$  延误时间。

对于一组给定的  $H = \{h_1, \dots, h_{239}\}$ ，通过微调  $D_{i,n}$  求出给定  $H = \{h_1, \dots, h_{239}\}$  下的最优解，则目标函数可写为：

$$\min(F(DT_j^i, H)) = \min(\min(T_{recover})) = \min(\min(f_{recover}(D_{i,n}, H, DT_j^i))) \quad (6.1.3)$$

##### (2) 描述目标函数 $\min(F(DT_j^i, H))$

###### 1) 非高峰时间：

当列车在非高峰时间运行时，由于发车时间间隔不小于 5 分钟，即：

$$h_n \geq 300 \quad (6.1.4)$$

因为发车时间间隔 300s 减去安全时间  $\max(T_z) = 88.90s$  大于最大延误时间 120s，可在对后续列车安全性没有影响的情况下，恢复正常发车。可认为此段时间发车密度小，列车发车时间的可调容限大。

###### 2) 高峰时间：

当列车在高峰时间运行时，由于发车间隔小，发车密度大，为了简化模型，对于在此时间内运行的列车，本题假设在高峰时间内每辆车的发车时间间隔相同。

假设  $DT_j^i$  为随机变量，设  $DT_j^i$  的概率密度函数为  $f_{DT}(DT_j^i)$ ：

则

$$\min(F_E(H)) = \min\left(\int_0^{120} F(H, DT_j^i) dDT_j^i\right) \quad (6.1.5)$$

因为本题假设在高峰时间内每辆车的发车时间间隔相同。则可认为通过一定数量的列车后，可恢复正点运行。 $F(H, DT_j^i)$  可表示为恢复正点运行所需列车数量与运行间隔的乘积。具体运算过程如下：

在高峰期假定发车时间间隔一定，即：

$$h_1 = \dots = h_{239} = h \quad (6.1.6)$$

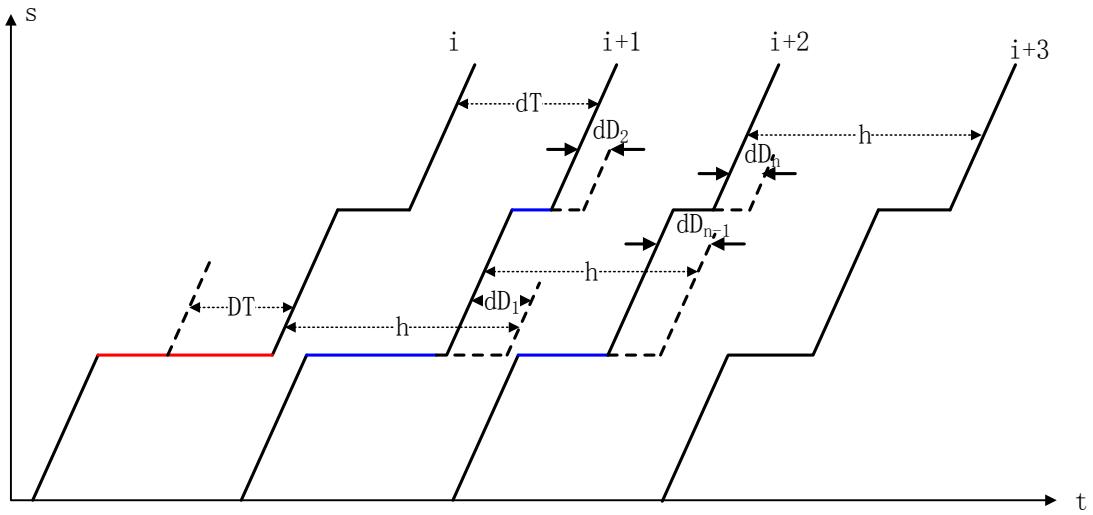


图 6.1 列车延误调整示意图

上图表示第  $i$  列车延误  $DT$  时间时，后续列车进行调整的过程，其中，第  $i+1$  列车第一次在站点调节了  $dD_1$  时间，第二次调节了  $dD_2$  时间，直到后续列车第  $n$  次调节  $dD_n$  时间，期间为保证安全，需保证与前车的运行间隔  $DT$  符合移动闭塞条件下的约束。

$$\sum_{j=1}^n dD_j = DT \quad (6.1.7)$$

$$dT \geq \max(T_z)$$

$$F(H, DT_j^i) = F(h, DT_j^i) = \left( \left\lfloor \frac{DT_j^i}{h - \max(T_z)} \right\rfloor + 1 \right) h \quad (6.1.8)$$

### 6.1.2 约束条件的确立

#### (1) 到站时间约束

由上文给出的在能耗最小情况下，以第二题第 2 问的最优发车时间间隔  $H = \{h_1, \dots, h_{239}\}$  求出一组为了列车到站时刻表，求解表达式如下：

$$f_{n,k} = \sum_{n=1}^{n-1} h_n + \sum_{i=1}^{k-1} D_{i,n} + \sum_{i=1}^{k-1} T_{i,n} \quad (6.1.9)$$

其中,  $f_{n,k}$  第  $n$  辆车计划在  $k$  站的发车时刻,  $D_{i,n}$  为第  $n$  辆车在  $i$  站的停站时间,  $T_{i,n}$  为第  $n$  辆车在  $i$  站的运行时间。

为了弥补上列列车延误的时间, 则列车实际到站时间必须提前, 才能在指定发车时间发车, 保证能耗最优。假定提前时间不超过  $\tau$ 。

$$f_{n,k} - f_{n,k}'' \leq \tau \quad (6.1.10)$$

## (2) 列车安全条件约束

为了保证列车的安全, 由 5.2.2 节可知, 列车的发车时间间隔必须大于  $\max(T_z) = 88.90s$ , 即:

$$h_n \leq \max(T_z) \quad (6.1.11)$$

## 6.2 列车延误 10s 后运行优化控制

第三题第一问问题描述如下: 建立控制模型, 找出在确保安全的前提下, 首先使所有后续列车尽快恢复正常运行, 其次恢复期间耗能最少的列车运行曲线。利用 6.1 章的模型, 因为延时时间已经确定即  $DT_j^i = 10$ , 若将其视为随机变量则  $DT_j^i$  的概率密度函数

$$f_{DT}(DT_j^i) = \delta(DT_j^i) \quad (6.2.1)$$

由上述模型可知, 当列车  $i$  在车站  $A_j$  延误 10s 发车, 则非高峰期和高峰期, 则只需 1 辆车在某一站点提前发车 10s 或某几个站点累积提前 10s 发车, 即可恢复正常运行。且认为一辆列车总提前 10s 对整体的耗能影响较小。

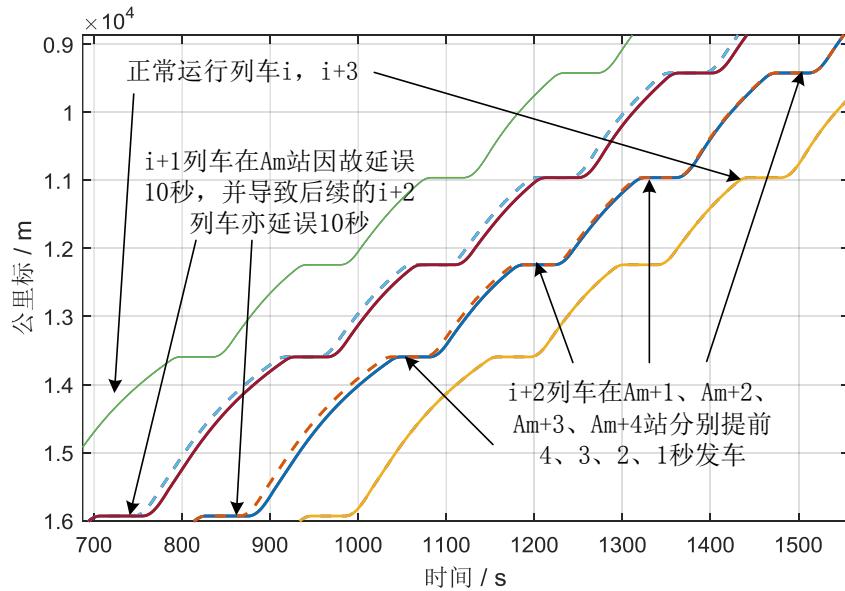


图 6.2 延误列车及其相邻列车的运行图

以其中延误列车的前后 4 列为例 (其他保持正点发车, 不予考虑), 绘制运行图。如图 6.2 所示。图中的虚线代表预计的运行图, 实线代表实际的运行图

## 6.3 列车延时不确定运行优化控制

普通延误 ( $0 < DT_j^i < 10s$ ) 概率为 20%, 严重延误 ( $DT_j^i > 10s$ ) 概率为 10% (超过 120s, 接近下一班, 不考虑调整), 无延误 ( $DT_j^i = 0$ ) 概率为 70%。则  $DT_j^i$  的概率密度函数为:

$$f_{DT}(DT_j^i) = \begin{cases} 0.7\delta(DT_j^i) & DT_j^i = 0 \\ 0 & DT_j^i > 120 \\ \frac{0.2}{10} & DT_j^i \leq 10 \\ \frac{0.1}{110} & 10 < DT_j^i \leq 120 \end{cases} \quad (6.3.1)$$

(1) 在非高峰期 ( $0 < DT_j^i \leq 120$ ):

所需列车的列数为  $\left\lfloor \frac{DT_j^i}{h - \max(T_z)} \right\rfloor + 1 = 1$ , 调整时间为 h。

(2) 高峰期 ( $0 < DT_j^i \leq 120$ ):

所需列数为  $\left\lfloor \frac{DT_j^i}{h - \max(T_z)} \right\rfloor + 1$ 。

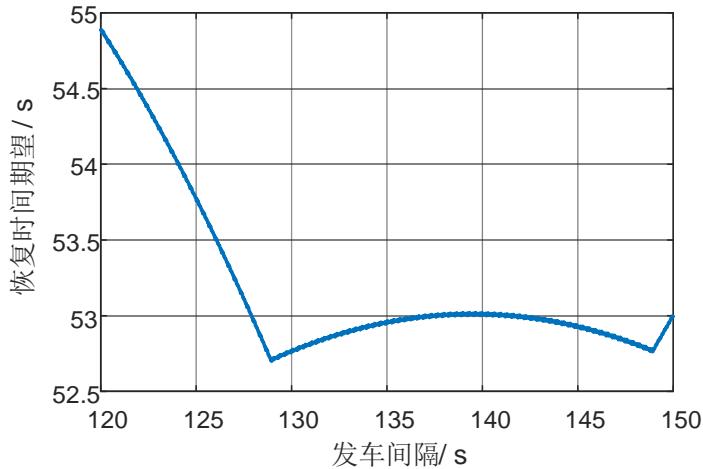


图 6.3 恢复时间期望与发车间距曲线图

根据式 6.1.8 及 6.1.10, 通过仿真计算可得出恢复时间期望  $F_E$  于平均发车间距  $h$  的函数图像, 如图 6.3 所示, 在高峰期阶段发车间隔为 129s 及 149s 时, 恢复时间期望最小。考虑图 6.4 中再生能利用情况, 发车间隔为 129s 时, 再生能利用更高, 即在考虑恢复时间最短的情况下, 能耗更低。故选择发车间隔为 129s, 最小恢复时间期望 52.71s。相对于第二问中的控制方案, 优化目标由能耗最低改为延误后恢复准点所需时间最短。如图 6.4 所示, 发车平均间隔为 120s 左右时, 能耗最低。因此, 考虑延误调整的情况下, 发车平均间隔由 120s 左右向 129s 左右调整。

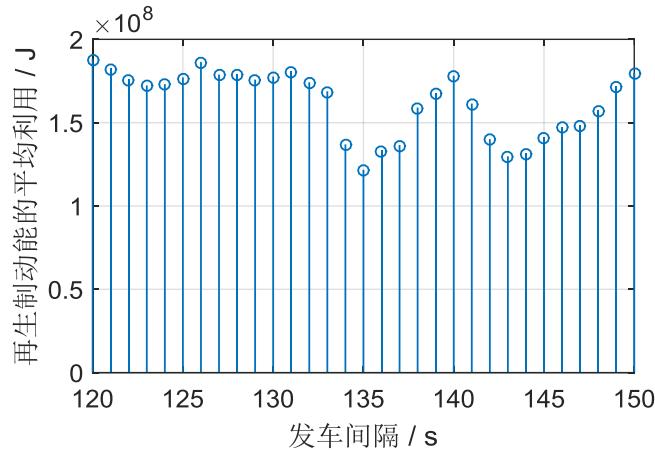


图 6.4 再生能平均利用量与发车间隔关系

## 7 模型总结分析

本文针对面向节能及延误调整的单/多列车优化决策问题，进行了相应的研究与分析。主要完成的工作如下：

针对问题一：根据庞特里亚金的极大值原理，构造哈密尔顿函数，将列车在站点间运行的能耗最小问题转化为求哈密尔顿函数最大值。由此，设计出最节能的牵引策略，即在给定的运行时间内，采用最大牵引力加速至某一速度后，尽可能使用惰行，最后采用最大制动使得到站时速度为 0。再依据惰行点控制原理，增加巡航阶段或降低最大速度，使运行时间符合要求。第 2 问的其节能操纵的优化计算分成两步。第一步为局部优化，依据第 1 问模型求出各单个子区间的最优能耗。第二步全局优化为对运行时间 T 的优化分配。

针对问题二：建立多列列车的节能运行优化控制模型，并通过时间离散化，将问题转化为非线性整数规划问题，优化目标为再生能源利用量最多，使用模拟退火算法求解出各列车发车时间间隔并确定运行方案。

针对问题三：以列车恢复正点运行时间最小为目标函数，建立列车延误调整模型，对非高峰期与高峰期分别讨论，得到最优的发车时间间隔。

问题一：单列列车规划模型利用庞特里亚金的极大值原理，引入惰行点控制，并利用递推法求解到站限速曲线对最大制动的拐点进行预判，可得出最优的速度距离关系图，使列车在不超过限速的情况下，能耗最小。本题采用自主提出的预处理方法，避免了按既定参数计算后与约束条件不合后进行的回溯调整操作，提高了运行效率和计算精度。

问题二：本文为了简化模型，结合实际情况，假定各列车的运行状态近似平行，则可忽略停站时间，运行时间等因素，将目标函数简化为只关于发车时间间隔的函数，同时进一步进行时域离散，将连续规划问题转换为整数规划问题，降低了算法复杂度，使计算量大大降低。以牺牲部分精确度为代价，使得上百辆车规划的大规模问题易于实现，提高了模型和算法的实用性。

问题三：根据高峰期，发车密度大，发车间隔短，以列车恢复正点运行时间最小为目标函数，建立列车延误调整模型。通过对移动闭塞条件下各站点发车间隔的约束，得出单列列车最大调整时间，从而以列车为单位考虑延误调整，

显著降低了问题的复杂度，从而直观地获得了延误调整时间与平均发车间距的函数关系。

## 8 参考文献

- [1] Liu R, Golovitcher I M. Energy-efficient operation of rail vehicles[J]. Transportation Research Part A Policy & Practice, 2003, 37(10):917-932As the access to this document is restricted, you may want to look for a different version under "Related research" (further below) or for a different version of it.
- [2] Hill R J, Yates T K. MODELLING RAILWAY BLOCK SIGNALLING SYSTEMS USING DISCRETE-EVENT SIMULATION.[C]// PROCEEDINGS OF THE... ASME/IEEE JOINT RAILROAD CONFERENCE1992:1 - 9.
- [3] 金炜东, 王自力. 列车节能操纵优化方法研究[J]. 铁道学报, 1997, 19(6): 58-62.
- [4] 丁勇, 毛保华, 刘海东, 张鑫, 王铁城, 列车节能运行模拟系统的研究, 北京交通大学学报, 第 28 卷第 2 期, 第 76-81 页.
- [5] 金炜东, 靳蕃, 李崇维, 胡飞, 苟先太, 列车优化操纵速度模式曲线生成的智能计算研究, 铁道学报, 第 20 卷, 第 5 期, 第 47-52 页.
- [6] Rongfang (Rachel) Liu, Lakov M. Golovitcher, Energy-efficient operation of rail vehicles, Transportation Research Part A: Policy and Practice, Volume 37, Issue 10, pp. 917-932.
- [7] Su S, Tang T, Li X, et al. Optimization of multitrain operations in a subway system[J]. Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on, 2014, 15(2): 673-684.
- [8] Albrecht T, Oettich S. A new integrated approach to dynamic schedule synchronization and energy-saving train control[J]. Publication of: WIT Press, 2002.

## 9 附录：问题一 Excel 表格内容

A6-A7 运行时间 110 秒

时刻 (hh:mm:ss)	实际速度 (cm/s)	实际速 度 (km/h)	计算加速度 (m/s <sup>2</sup> )	计算距离 (m)	计算公里 标(m)	当前 坡度 (‰)	计算牵引力 (N)	计算牵 引功率 (kW)
0:00:00	0	0	1	0	13594	0	198162.2	0
0:00:01	100	3.6	1	0.7	13593.3	0	198162.2	198.16
0:00:02	200	7.2	1	2	13592	0	198854.4	397.71
0:00:03	300	10.8	1	4.5	13589.5	0	199603	598.81
0:00:04	400	14.4	1	8	13586	0	200381.8	801.53
0:00:05	500	18	1	12.5	13581.5	0	201233	1006.16
0:00:06	600	21.6	1	18	13576	0	202164.4	1212.99
0:00:07	700	25.2	0.996	24.5	13569.5	0	203000	1420.96
0:00:08	799.6	28.78	0.99	32	13562	0	203000	1623.13
0:00:09	898.6	32.35	0.984	40.5	13553.5	0	203000	1824.11
0:00:10	997	35.89	0.977	50	13544	0	203000	2023.83
0:00:11	1094.7	39.41	0.97	60.4	13533.6	0	203000	2222.19
0:00:12	1191.7	42.9	0.963	71.9	13522.1	0	203000	2419.12

0:00:13	1288	46.37	0.955	84.3	13509.7	0	203000	2614.55
0:00:14	1383.4	49.8	0.932	97.6	13496.4	0	203000	2808.4
0:00:15	1476.7	53.16	0.827	111.9	13482.1	0	192264.2	2839.12
0:00:16	1559.4	56.14	0.732	127.1	13466.9	0	172543.5	2690.63
0:00:17	1632.6	58.77	0.657	143.1	13450.9	0	157433.9	2570.23
0:00:18	1698.2	61.14	0.596	159.7	13434.3	0	145534.8	2471.54
0:00:19	1757.8	63.28	0.545	177	13417	0	135942.1	2389.64
0:00:20	1812.4	65.25	0.359	194.9	13399.1	0	128052.9	2320.81
0:00:21	1848.3	66.54	-0.138	213.2	13380.8	0	0	0
0:00:22	1834.5	66.04	-0.137	231.7	13362.3	0	0	0
0:00:23	1820.8	65.55	-0.135	249.9	13344.1	0	0	0
0:00:24	1807.3	65.06	-0.134	268.1	13325.9	0	0	0
0:00:25	1793.9	64.58	-0.132	286.1	13307.9	0	0	0
0:00:26	1780.7	64.1	-0.114	303.9	13290.1	0	0	0
0:00:27	1769.3	63.69	-0.112	321.7	13272.3	-1.8	0	0
0:00:28	1758.1	63.29	-0.111	339.3	13254.7	-1.8	0	0
0:00:29	1746.9	62.89	-0.11	356.9	13237.1	-1.8	0	0
0:00:30	1735.9	62.49	-0.109	374.3	13219.7	-1.8	0	0
0:00:31	1725	62.1	-0.108	391.6	13202.4	-1.8	0	0
0:00:32	1714.2	61.71	-0.107	408.8	13185.2	-1.8	0	0
0:00:33	1703.6	61.33	-0.106	425.9	13168.1	-1.8	0	0
0:00:34	1693	60.95	-0.105	442.8	13151.2	-1.8	0	0
0:00:35	1682.5	60.57	-0.104	459.7	13134.3	-1.8	0	0
0:00:36	1672.1	60.2	-0.103	476.5	13117.5	-1.8	0	0
0:00:37	1661.9	59.83	-0.102	493.2	13100.8	-1.8	0	0
0:00:38	1651.7	59.46	-0.101	509.7	13084.3	-1.8	0	0
0:00:39	1641.7	59.1	-0.1	526.2	13067.8	-1.8	0	0
0:00:40	1631.7	58.74	-0.099	542.6	13051.4	-1.8	0	0
0:00:41	1621.8	58.39	-0.098	558.8	13035.2	-1.8	0	0
0:00:42	1612	58.03	-0.097	575	13019	-1.8	0	0
0:00:43	1602.3	57.68	-0.096	591.1	13002.9	-1.8	0	0
0:00:44	1592.8	57.34	-0.095	607.1	12986.9	-1.8	0	0
0:00:45	1583.3	57	-0.094	622.9	12971.1	-1.8	0	0
0:00:46	1573.8	56.66	-0.093	638.7	12955.3	-1.8	0	0
0:00:47	1564.5	56.32	-0.092	654.4	12939.6	-1.8	0	0
0:00:48	1555.3	55.99	-0.097	670	12924	-1.8	0	0
0:00:49	1545.6	55.64	-0.142	685.5	12908.5	3.5	0	0
0:00:50	1531.4	55.13	-0.141	700.9	12893.1	3.5	0	0
0:00:51	1517.3	54.62	-0.14	716.1	12877.9	3.5	0	0
0:00:52	1503.3	54.12	-0.138	731.2	12862.8	3.5	0	0
0:00:53	1489.5	53.62	-0.137	746.2	12847.8	3.5	0	0
0:00:54	1475.7	53.13	-0.136	761	12833	3.5	0	0
0:00:55	1462.1	52.64	-0.135	775.7	12818.3	3.5	0	0

0:00:56	1448.7	52.15	-0.134	790.3	12803.7	3.5	0	0
0:00:57	1435.3	51.67	-0.132	804.7	12789.3	3.5	0	0
0:00:58	1422.1	51.19	-0.131	819	12775	3.5	0	0
0:00:59	1408.9	50.72	-0.13	833.1	12760.9	3.5	0	0
0:01:00	1395.9	50.25	-0.129	847.2	12746.8	3.5	0	0
0:01:01	1383	49.79	-0.128	861.1	12732.9	3.5	0	0
0:01:02	1370.2	49.33	-0.127	874.8	12719.2	3.5	0	0
0:01:03	1357.5	48.87	-0.126	888.5	12705.5	3.5	0	0
0:01:04	1344.9	48.42	-0.125	902	12692	3.5	0	0
0:01:05	1332.5	47.97	-0.124	915.4	12678.6	3.5	0	0
0:01:06	1320.1	47.52	-0.123	928.6	12665.4	3.5	0	0
0:01:07	1307.8	47.08	-0.122	941.8	12652.2	3.5	0	0
0:01:08	1295.7	46.64	-0.121	954.8	12639.2	3.5	0	0
0:01:09	1283.6	46.21	-0.12	967.7	12626.3	3.5	0	0
0:01:10	1271.6	45.78	-0.119	980.5	12613.5	3.5	0	0
0:01:11	1259.7	45.35	-0.118	993.1	12600.9	3.5	0	0
0:01:12	1248	44.93	-0.117	1005.7	12588.3	3.5	0	0
0:01:13	1236.3	44.51	-0.116	1018.1	12575.9	3.5	0	0
0:01:14	1224.7	44.09	-0.115	1030.4	12563.6	3.5	0	0
0:01:15	1213.2	43.67	-0.114	1042.6	12551.4	3.5	0	0
0:01:16	1201.7	43.26	-0.113	1054.6	12539.4	3.5	0	0
0:01:17	1190.4	42.85	-0.112	1066.6	12527.4	3.5	0	0
0:01:18	1179.2	42.45	-0.112	1078.4	12515.6	3.5	0	0
0:01:19	1168	42.05	-0.111	1090.2	12503.8	3.5	0	0
0:01:20	1156.9	41.65	-0.11	1101.8	12492.2	3.5	0	0
0:01:21	1145.9	41.25	-0.109	1113.3	12480.7	3.5	0	0
0:01:22	1135	40.86	-0.108	1124.7	12469.3	3.5	0	0
0:01:23	1124.2	40.47	-0.108	1136	12458	3.5	0	0
0:01:24	1113.4	40.08	-0.107	1147.2	12446.8	3.5	0	0
0:01:25	1102.8	39.7	-0.106	1158.3	12435.7	3.5	0	0
0:01:26	1092.2	39.32	-0.105	1169.3	12424.7	3.5	0	0
0:01:27	1081.6	38.94	-0.104	1180.1	12413.9	3.5	0	0
0:01:28	1071.2	38.56	-0.104	1190.9	12403.1	3.5	0	0
0:01:29	1060.8	38.19	-0.103	1201.6	12392.4	3.5	0	0
0:01:30	1050.5	37.82	-0.102	1212.1	12381.9	3.5	0	0
0:01:31	1040.3	37.45	-0.102	1222.6	12371.4	3.5	0	0
0:01:32	1030.2	37.09	-0.101	1232.9	12361.1	3.5	0	0
0:01:33	1020.1	36.72	-0.1	1243.2	12350.8	3.5	0	0
0:01:34	1010.1	36.36	-0.099	1253.3	12340.7	3.5	0	0
0:01:35	1000.1	36	-0.099	1263.4	12330.6	3.5	0	0
0:01:36	990.2	35.65	-0.098	1273.3	12320.7	3.5	0	0
0:01:37	980.4	35.29	-0.097	1283.2	12310.8	3.5	0	0
0:01:38	970.7	34.94	-0.328	1292.9	12301.1	3.5	0	0

0:01:39	937.9	33.76	-0.858	1302.6	12291.4	3.5	0	0
0:01:40	852.1	30.68	-0.854	1311.5	12282.5	0	0	0
0:01:41	766.7	27.6	-0.854	1319.6	12274.4	0	0	0
0:01:42	681.2	24.52	-0.854	1326.8	12267.2	0	0	0
0:01:43	595.8	21.45	-0.854	1333.2	12260.8	0	0	0
0:01:44	510.4	18.37	-0.854	1338.8	12255.2	0	0	0
0:01:45	424.9	15.3	-0.854	1343.4	12250.6	0	0	0
0:01:46	339.5	12.22	-0.854	1347.2	12246.8	0	0	0
0:01:47	254	9.15	-0.854	1350.2	12243.8	0	0	0
0:01:48	168.6	6.07	-0.861	1352.3	12241.7	0	0	0
0:01:49	82.5	2.97	-0.825	1353.4	12240.6	0	0	0
0:01:50	0	0	0	1354	12240	0	0	0

### 问题一 (2)

A6-A7 运行时间 111.5 秒，A7-A8 运行时间 108.6 秒

时刻 (hh:mm:ss)	实际速度 (cm/s)	实际速度 (km/h)	计算加速度 (m/s <sup>2</sup> )	计算距离(m)	计算公里标(m)	当前坡度(%)	计算牵引力(N)	计算牵引功率(Kw)
0:00:00	0	0	1	0	13594	0	198162.2	0
0:00:01	100	3.6	1	0.7	13593.3	0	198162.2	198.16
0:00:02	200	7.2	1	2	13592	0	198854.4	397.71
0:00:03	300	10.8	1	4.5	13589.5	0	199603	598.81
0:00:04	400	14.4	1	8	13586	0	200381.8	801.53
0:00:05	500	18	1	12.5	13581.5	0	201233	1006.16
0:00:06	600	21.6	1	18	13576	0	202164.4	1212.99
0:00:07	700	25.2	0.996	24.5	13569.5	0	203000	1420.96
0:00:08	799.6	28.78	0.99	32	13562	0	203000	1623.13
0:00:09	898.6	32.35	0.984	40.5	13553.5	0	203000	1824.11
0:00:10	997	35.89	0.977	50	13544	0	203000	2023.83
0:00:11	1094.7	39.41	0.97	60.4	13533.6	0	203000	2222.19
0:00:12	1191.7	42.9	0.963	71.9	13522.1	0	203000	2419.12
0:00:13	1288	46.37	0.955	84.3	13509.7	0	203000	2614.55
0:00:14	1383.4	49.8	0.932	97.6	13496.4	0	203000	2808.4
0:00:15	1476.7	53.16	0.827	111.9	13482.1	0	192264.2	2839.12
0:00:16	1559.4	56.14	0.732	127.1	13466.9	0	172543.5	2690.63
0:00:17	1632.6	58.77	0.657	143.1	13450.9	0	157433.9	2570.23
0:00:18	1698.2	61.14	0.596	159.7	13434.3	0	145534.8	2471.54
0:00:19	1757.8	63.28	0.545	177	13417	0	135942.1	2389.64
0:00:20	1812.4	65.25	0.083	194.9	13399.1	0	128052.9	2320.81
0:00:21	1820.7	65.54	-0.135	213.1	13380.9	0	0	0

0:00:22	1807.2	65.06	-0.134	231.3	13362.7	0	0	0
0:00:23	1793.8	64.58	-0.132	249.3	13344.7	0	0	0
0:00:24	1780.5	64.1	-0.131	267.1	13326.9	0	0	0
0:00:25	1767.4	63.63	-0.13	284.9	13309.1	0	0	0
0:00:26	1754.4	63.16	-0.112	302.5	13291.5	0	0	0
0:00:27	1743.2	62.76	-0.11	320	13274	-1.8	0	0
0:00:28	1732.2	62.36	-0.109	337.3	13256.7	-1.8	0	0
0:00:29	1721.4	61.97	-0.108	354.6	13239.4	-1.8	0	0
0:00:30	1710.6	61.58	-0.106	371.8	13222.2	-1.8	0	0
0:00:31	1700	61.2	-0.105	388.8	13205.2	-1.8	0	0
0:00:32	1689.4	60.82	-0.104	405.8	13188.2	-1.8	0	0
0:00:33	1679	60.44	-0.103	422.6	13171.4	-1.8	0	0
0:00:34	1668.7	60.07	-0.102	439.4	13154.6	-1.8	0	0
0:00:35	1658.4	59.7	-0.101	456	13138	-1.8	0	0
0:00:36	1648.3	59.34	-0.1	472.5	13121.5	-1.8	0	0
0:00:37	1638.3	58.98	-0.099	489	13105	-1.8	0	0
0:00:38	1628.3	58.62	-0.098	505.3	13088.7	-1.8	0	0
0:00:39	1618.5	58.27	-0.097	521.5	13072.5	-1.8	0	0
0:00:40	1608.7	57.91	-0.097	537.7	13056.3	-1.8	0	0
0:00:41	1599.1	57.57	-0.096	553.7	13040.3	-1.8	0	0
0:00:42	1589.5	57.22	-0.095	569.6	13024.4	-1.8	0	0
0:00:43	1580.1	56.88	-0.094	585.5	13008.5	-1.8	0	0
0:00:44	1570.7	56.54	-0.093	601.2	12992.8	-1.8	0	0
0:00:45	1561.4	56.21	-0.092	616.9	12977.1	-1.8	0	0
0:00:46	1552.2	55.88	-0.091	632.5	12961.5	-1.8	0	0
0:00:47	1543.1	55.55	-0.09	647.9	12946.1	-1.8	0	0
0:00:48	1534	55.22	-0.09	663.3	12930.7	-1.8	0	0
0:00:49	1525.1	54.9	-0.122	678.6	12915.4	-1.8	0	0
0:00:50	1512.8	54.46	-0.139	693.8	12900.2	3.5	0	0
0:00:51	1498.9	53.96	-0.138	708.9	12885.1	3.5	0	0
0:00:52	1485.1	53.46	-0.137	723.8	12870.2	3.5	0	0
0:00:53	1471.4	52.97	-0.136	738.6	12855.4	3.5	0	0
0:00:54	1457.8	52.48	-0.134	753.2	12840.8	3.5	0	0
0:00:55	1444.4	52	-0.133	767.7	12826.3	3.5	0	0
0:00:56	1431.1	51.52	-0.132	782.1	12811.9	3.5	0	0
0:00:57	1417.9	51.04	-0.131	796.4	12797.6	3.5	0	0
0:00:58	1404.8	50.57	-0.13	810.5	12783.5	3.5	0	0
0:00:59	1391.8	50.1	-0.129	824.5	12769.5	3.5	0	0
0:01:00	1378.9	49.64	-0.128	838.3	12755.7	3.5	0	0
0:01:01	1366.2	49.18	-0.127	852	12742	3.5	0	0
0:01:02	1353.5	48.73	-0.125	865.6	12728.4	3.5	0	0
0:01:03	1341	48.28	-0.124	879.1	12714.9	3.5	0	0
0:01:04	1328.5	47.83	-0.123	892.5	12701.5	3.5	0	0

0:01:05	1316.2	47.38	-0.122	905.7	12688.3	3.5	0	0
0:01:06	1304	46.94	-0.121	918.8	12675.2	3.5	0	0
0:01:07	1291.8	46.51	-0.12	931.8	12662.2	3.5	0	0
0:01:08	1279.8	46.07	-0.119	944.6	12649.4	3.5	0	0
0:01:09	1267.8	45.64	-0.118	957.4	12636.6	3.5	0	0
0:01:10	1256	45.22	-0.118	970	12624	3.5	0	0
0:01:11	1244.2	44.79	-0.117	982.5	12611.5	3.5	0	0
0:01:12	1232.6	44.37	-0.116	994.9	12599.1	3.5	0	0
0:01:13	1221	43.96	-0.115	1007.1	12586.9	3.5	0	0
0:01:14	1209.5	43.54	-0.114	1019.3	12574.7	3.5	0	0
0:01:15	1198.1	43.13	-0.113	1031.3	12562.7	3.5	0	0
0:01:16	1186.8	42.73	-0.112	1043.2	12550.8	3.5	0	0
0:01:17	1175.6	42.32	-0.111	1055.1	12538.9	3.5	0	0
0:01:18	1164.5	41.92	-0.11	1066.8	12527.2	3.5	0	0
0:01:19	1153.4	41.52	-0.11	1078.3	12515.7	3.5	0	0
0:01:20	1142.5	41.13	-0.109	1089.8	12504.2	3.5	0	0
0:01:21	1131.6	40.74	-0.108	1101.2	12492.8	3.5	0	0
0:01:22	1120.8	40.35	-0.107	1112.5	12481.5	3.5	0	0
0:01:23	1110	39.96	-0.106	1123.6	12470.4	3.5	0	0
0:01:24	1099.4	39.58	-0.106	1134.7	12459.3	3.5	0	0
0:01:25	1088.8	39.2	-0.105	1145.6	12448.4	3.5	0	0
0:01:26	1078.3	38.82	-0.104	1156.4	12437.6	3.5	0	0
0:01:27	1067.9	38.44	-0.103	1167.2	12426.8	3.5	0	0
0:01:28	1057.6	38.07	-0.103	1177.8	12416.2	3.5	0	0
0:01:29	1047.3	37.7	-0.102	1188.3	12405.7	3.5	0	0
0:01:30	1037.1	37.33	-0.101	1198.7	12395.3	3.5	0	0
0:01:31	1026.9	36.97	-0.101	1209.1	12384.9	3.5	0	0
0:01:32	1016.9	36.61	-0.1	1219.3	12374.7	3.5	0	0
0:01:33	1006.9	36.25	-0.099	1229.4	12364.6	3.5	0	0
0:01:34	997	35.89	-0.099	1239.4	12354.6	3.5	0	0
0:01:35	987.1	35.54	-0.098	1249.3	12344.7	3.5	0	0
0:01:36	977.3	35.18	-0.097	1259.2	12334.8	3.5	0	0
0:01:37	967.6	34.83	-0.097	1268.9	12325.1	3.5	0	0
0:01:38	957.9	34.48	-0.096	1278.5	12315.5	3.5	0	0
0:01:39	948.3	34.14	-0.095	1288	12306	3.5	0	0
0:01:40	938.8	33.8	-0.402	1297.5	12296.5	3.5	0	0
0:01:41	898.6	32.35	-0.854	1306.7	12287.3	0	0	0
0:01:42	813.1	29.27	-0.854	1315.3	12278.7	0	0	0
0:01:43	727.7	26.2	-0.854	1323	12271	0	0	0
0:01:44	642.2	23.12	-0.854	1329.9	12264.1	0	0	0
0:01:45	556.8	20.04	-0.854	1335.9	12258.1	0	0	0
0:01:46	471.4	16.97	-0.854	1341	12253	0	0	0
0:01:47	385.9	13.89	-0.854	1345.3	12248.7	0	0	0

0:01:48	300.5	10.82	-0.854	1348.7	12245.3	0	0	0
0:01:49	215.1	7.74	-0.855	1351.3	12242.7	0	0	0
0:01:50	129.6	4.67	-0.866	1353	12241	0	0	0
0:01:51	43	1.55	-0.866	1353.7	12240.3	0	0	0
0:01:52	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:01:53	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:01:54	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:01:55	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:01:56	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:01:57	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:01:58	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:01:59	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:00	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:01	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:02	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:03	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:04	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:05	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:06	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:07	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:08	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:09	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:10	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:11	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:12	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:13	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:14	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:15	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:16	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:17	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:18	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:19	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:20	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:21	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:22	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:23	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:24	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:25	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:26	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:27	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:28	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:29	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:30	0	0	0	1354	12240	0	0	0

0:02:31	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:32	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:33	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:34	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:35	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:36	0	0	0	1354	12240	0	0	0
0:02:37	0	0	1	0	12240	0	198162.2	0
0:02:38	100	3.6	1	0.7	12239.3	0	198162.2	198.16
0:02:39	200	7.2	1	2	12238	0	198854.4	397.71
0:02:40	300	10.8	1	4.5	12235.5	0	199603	598.81
0:02:41	400	14.4	1	8	12232	0	200381.8	801.53
0:02:42	500	18	1	12.5	12227.5	0	201233	1006.16
0:02:43	600	21.6	1	18	12222	0	202164.4	1212.99
0:02:44	700	25.2	0.996	24.5	12215.5	0	203000	1420.96
0:02:45	799.6	28.78	0.99	32	12208	0	203000	1623.13
0:02:46	898.6	32.35	0.984	40.5	12199.5	0	203000	1824.11
0:02:47	997	35.89	0.977	50	12190	0	203000	2023.83
0:02:48	1094.7	39.41	0.97	60.4	12179.6	0	203000	2222.19
0:02:49	1191.7	42.9	0.963	71.9	12168.1	0	203000	2419.12
0:02:50	1288	46.37	0.955	84.3	12155.7	0	203000	2614.55
0:02:51	1383.4	49.8	0.932	97.6	12142.4	0	203000	2808.4
0:02:52	1476.7	53.16	0.827	111.9	12128.1	0	192264.2	2839.12
0:02:53	1559.4	56.14	0.732	127.1	12112.9	0	172543.5	2690.63
0:02:54	1632.6	58.77	0.657	143.1	12096.9	0	157433.9	2570.23
0:02:55	1698.2	61.14	0.103	159.7	12080.3	0	145534.8	2471.54
0:02:56	1708.6	61.51	-0.124	176.9	12063.1	0	0	0
0:02:57	1696.2	61.06	-0.123	193.9	12046.1	0	0	0
0:02:58	1683.9	60.62	-0.121	210.8	12029.2	0	0	0
0:02:59	1671.8	60.18	-0.113	227.6	12012.4	0	0	0
0:03:00	1660.5	59.78	-0.09	244.2	11995.8	-3	0	0
0:03:01	1651.5	59.46	-0.089	260.8	11979.2	-3	0	0
0:03:02	1642.6	59.14	-0.088	277.2	11962.8	-3	0	0
0:03:03	1633.8	58.82	-0.087	293.6	11946.4	-3	0	0
0:03:04	1625.1	58.5	-0.086	309.9	11930.1	-3	0	0
0:03:05	1616.5	58.19	-0.086	326.1	11913.9	-3	0	0
0:03:06	1607.9	57.89	-0.085	342.2	11897.8	-3	0	0
0:03:07	1599.4	57.58	-0.084	358.3	11881.7	-3	0	0
0:03:08	1591.1	57.28	-0.083	374.2	11865.8	-3	0	0
0:03:09	1582.7	56.98	-0.082	390.1	11849.9	-3	0	0
0:03:10	1574.5	56.68	-0.082	405.9	11834.1	-3	0	0
0:03:11	1566.3	56.39	-0.081	421.6	11818.4	-3	0	0
0:03:12	1558.3	56.1	-0.08	437.2	11802.8	-3	0	0
0:03:13	1550.3	55.81	-0.079	452.8	11787.2	-3	0	0

0:03:14	1542.3	55.52	-0.079	468.2	11771.8	-3	0	0
0:03:15	1534.5	55.24	-0.078	483.6	11756.4	-3	0	0
0:03:16	1526.7	54.96	-0.077	498.9	11741.1	-3	0	0
0:03:17	1519	54.68	-0.076	514.1	11725.9	-3	0	0
0:03:18	1511.3	54.41	-0.076	529.3	11710.7	-3	0	0
0:03:19	1503.7	54.13	-0.075	544.4	11695.6	-3	0	0
0:03:20	1496.2	53.86	-0.074	559.4	11680.6	-3	0	0
0:03:21	1488.8	53.6	-0.074	574.3	11665.7	-3	0	0
0:03:22	1481.4	53.33	-0.073	589.1	11650.9	-3	0	0
0:03:23	1474.1	53.07	-0.072	603.9	11636.1	-3	0	0
0:03:24	1466.9	52.81	-0.072	618.6	11621.4	-3	0	0
0:03:25	1459.7	52.55	-0.097	633.3	11606.7	-3	0	0
0:03:26	1449.9	52.2	-0.119	647.8	11592.2	2	0	0
0:03:27	1438	51.77	-0.118	662.3	11577.7	2	0	0
0:03:28	1426.2	51.34	-0.117	676.6	11563.4	2	0	0
0:03:29	1414.5	50.92	-0.116	690.8	11549.2	2	0	0
0:03:30	1402.9	50.51	-0.115	704.9	11535.1	2	0	0
0:03:31	1391.4	50.09	-0.114	718.8	11521.2	2	0	0
0:03:32	1380	49.68	-0.113	732.7	11507.3	2	0	0
0:03:33	1368.7	49.27	-0.112	746.4	11493.6	2	0	0
0:03:34	1357.5	48.87	-0.111	760.1	11479.9	2	0	0
0:03:35	1346.4	48.47	-0.11	773.6	11466.4	2	0	0
0:03:36	1335.4	48.07	-0.109	787	11453	2	0	0
0:03:37	1324.4	47.68	-0.108	800.3	11439.7	2	0	0
0:03:38	1313.6	47.29	-0.108	813.5	11426.5	2	0	0
0:03:39	1302.8	46.9	-0.107	826.6	11413.4	2	0	0
0:03:40	1292.2	46.52	-0.106	839.5	11400.5	2	0	0
0:03:41	1281.6	46.14	-0.105	852.4	11387.6	2	0	0
0:03:42	1271.1	45.76	-0.104	865.2	11374.8	2	0	0
0:03:43	1260.7	45.39	-0.103	877.8	11362.2	2	0	0
0:03:44	1250.4	45.01	-0.102	890.4	11349.6	2	0	0
0:03:45	1240.1	44.64	-0.102	902.8	11337.2	2	0	0
0:03:46	1230	44.28	-0.101	915.2	11324.8	2	0	0
0:03:47	1219.9	43.92	-0.1	927.4	11312.6	2	0	0
0:03:48	1209.9	43.56	-0.099	939.6	11300.4	2	0	0
0:03:49	1199.9	43.2	-0.099	951.6	11288.4	2	0	0
0:03:50	1190.1	42.84	-0.098	963.6	11276.4	2	0	0
0:03:51	1180.3	42.49	-0.097	975.4	11264.6	2	0	0
0:03:52	1170.6	42.14	-0.096	987.2	11252.8	2	0	0
0:03:53	1161	41.8	-0.096	998.9	11241.1	2	0	0
0:03:54	1151.4	41.45	-0.095	1010.4	11229.6	2	0	0
0:03:55	1141.9	41.11	-0.094	1021.9	11218.1	2	0	0
0:03:56	1132.5	40.77	-0.093	1033.3	11206.7	2	0	0

0:03:57	1123.2	40.43	-0.093	1044.5	11195.5	2	0	0
0:03:58	1113.9	40.1	-0.092	1055.7	11184.3	2	0	0
0:03:59	1104.7	39.77	-0.091	1066.8	11173.2	2	0	0
0:04:00	1095.5	39.44	-0.091	1077.8	11162.2	2	0	0
0:04:01	1086.5	39.11	-0.09	1088.7	11151.3	2	0	0
0:04:02	1077.4	38.79	-0.09	1099.5	11140.5	2	0	0
0:04:03	1068.5	38.47	-0.089	1110.3	11129.7	2	0	0
0:04:04	1059.6	38.15	-0.088	1120.9	11119.1	2	0	0
0:04:05	1050.8	37.83	-0.088	1131.5	11108.5	2	0	0
0:04:06	1042	37.51	-0.087	1141.9	11098.1	2	0	0
0:04:07	1033.3	37.2	-0.086	1152.3	11087.7	2	0	0
0:04:08	1024.7	36.89	-0.086	1162.6	11077.4	2	0	0
0:04:09	1016.1	36.58	-0.085	1172.8	11067.2	2	0	0
0:04:10	1007.6	36.27	-0.085	1182.9	11057.1	2	0	0
0:04:11	999.1	35.97	-0.078	1193	11047	2	0	0
0:04:12	991.3	35.69	-0.064	1202.9	11037.1	0	0	0
0:04:13	984.9	35.46	-0.064	1212.8	11027.2	0	0	0
0:04:14	978.5	35.23	-0.735	1222.6	11017.4	0	0	0
0:04:15	905	32.58	-0.854	1232.1	11007.9	0	0	0
0:04:16	819.6	29.51	-0.854	1240.7	10999.3	0	0	0
0:04:17	734.2	26.43	-0.854	1248.5	10991.5	0	0	0
0:04:18	648.7	23.35	-0.854	1255.4	10984.6	0	0	0
0:04:19	563.3	20.28	-0.854	1261.4	10978.6	0	0	0
0:04:20	477.8	17.2	-0.854	1266.6	10973.4	0	0	0
0:04:21	392.4	14.13	-0.854	1271	10969	0	0	0
0:04:22	307	11.05	-0.854	1274.5	10965.5	0	0	0
0:04:23	221.5	7.98	-0.854	1277.1	10962.9	0	0	0
0:04:24	136.1	4.9	-0.865	1278.9	10961.1	0	0	0
0:04:25	49.6	1.78	-0.865	1279.6	10960.4	0	0	0
0:04:26	0	0	0	1280	10960	0	0	0