

参赛密码 _____
(由组委会填写)



“华为杯”第十四届中国研究生
数学建模竞赛

学 校 中国科学院上海技术物理研究所

参赛队号 80143006

1. 胡涛

队员姓名 2. 束安

3. 郑付强

参赛密码 _____
(由组委会填写)



“华为杯”第十四届中国研究生 数学建模竞赛

题 目 面向下一代光通信的 VCSEL 激光器仿真模型

摘要：

本文通过研究垂直腔面发射激光器（VCSEL）的 L-I 曲线，来判定激光器极限工作温度。通过研究激光器参数对激光器的带宽 $H(f)$ 的影响，为设计更大的传输带宽的激光器做准备。

对于问题 1，由 VCSEL 激光器的 L-I 经验模型出发，推导出一个 8 参数数学模型，赋予初值用最小二乘法非线性迭代拟合曲线，得出一组新参数值组合，为了验证参数的准确性，用拟合优度来判定模型拟合程度 ($R^2=0.994$)。分别按题意，结合新参数值可以输出 0-70 摄氏度 L-I 曲线，但 80 度以上激光器属于不工作状态。根据我们预测模型，激光器在环境不超过 34 度情况下，才能满足 2mW 被检测到要求。

对于问题 2，我们主要做两方面工作：一是改进问题 1 的模型，二是从速率方程出发提出更好新的 L-I 模型。(1) 第一部分工作，我们从物理角度来说明温度对 $\eta(T)$ 和 R_{th} 的影响，来指出经验模型的假设缺陷，并在相关文献得到证实，温度对这两个参数确实存在显著的影响。接着用最小二乘法非线性迭代拟合曲线，分别验证了温度对 $\eta(T)$ 和 R_{th} 影响，以及温度对两者同时作用的影响，用拟合优度来判定新参数对曲线拟合的影响，每次拟合优度 R^2 均大于 0.99。在新模型下，激光器可以在 130 度环境以上也可以工作，大大的改善了经验模型在高温度

模拟值低于实验值的缺陷，完善了问题 1 模型低估工作温度的缺陷；同时也大大减小了高温度时激光器初始工作的最小电流，即阈值电流，更加符合实验数据。

(2) 第二部分，通过文献调研，我们从速率方程出发，通过描述载流子和光子浓度的变化率建立了一个新模型，得出 L-I 曲线跟带宽函数 $H(f)$ 的显性函数关系，新模型具有更加简单，误差更小的特点，直接证明了 L-I 曲线跟带宽函数 $H(f)$ 的关系。

对于问题 3，在假设参数最优值跟参数初始值相差不大的前提下，结合初值判定部分含参表达式有些项的数量级相差过大（一般相差三个数量级以上），经过数学优化处理，最后确定为一个四参数模型，并以实际与理论上电流的差值以及功率的差值作为两个约束收敛条件，同时运用标准简面体爬山法和通用全局非线性最优化迭代出四个与原来相差不大的新参数值，验证可知新参数值仍符合第三个小信号的约束条件。具体温度和电流对带宽的影响可参见图 6.2-6.15，各参数影响参带宽可以见图 6.16-6.18。另外由一些图，经判断偏置电流在 7.5mA 以及 10mA 附近，各温度下 S21 曲线均较为平坦，带宽较宽。

对于问题 4，通过文献调研，从速率方程出发，通过假定载流子和光子浓度变化不大的情况下，描述载流子和光子浓度的变化率，以及增益对时间的变化率，分析各物理参数对应跟这三者对应的关系式，推导出 VCSEL 带宽模型 $H(f)$ 。从形式上来说，本模型具有直观简洁性，相比如附录推导模型更具有物理意义；而且考虑比附录模型更多因素（例如电学寄生效应等），使得模型更加符合实际；在公式组成和最终形式也更加简单，模型运算速度更快。针对如何调节带宽，在模型中给出了建议，增大 f_R 和 f_P ，减小 γ ，其中在平衡调节 f_P 和 γ 两者时，有个最佳带宽值。

关键词：垂直腔面发射激光器（VCSEL） L-I 曲线 非线性迭代 曲线拟合 速率方程 带宽模型

摘要	2
1 问题重述	5
2 模型假设	6
3 符号说明	7
4 问题一 (L-I 曲线)	8
4.1 问题分析与描述	8
4.2 非线性最小二乘法拟合	9
4.3 模型参数求解与分析	10
5 问题二 (L-I 曲线改进模型)	14
5.1 模型改进意义	14
5.2 模型求解与分析	14
5.2.1 $\eta(T)$ 受温度影响	14
5.2.2 R_{th} 受温度影响	16
5.2.3 $\eta(T)$ 和 R_{th} 均受温度影响	19
5.3 基于速率方程新模型	20
7 问题三 (带宽模型)	24
7.1 问题描述与分析	24
7.2 模型参数求解与分析	25
7.3 小信号幅频响应参数模型简化	27
8 问题四 (带宽模型的改进)	34
9 模型评价	37
9.1 模型的优点	37
9.2 模型的缺点	37
参考文献	38

1 问题重述

随着互联网技术的快速发展，家庭固定网络的发展飞快，光纤传输已全面普及，光纤中传输的激光信号具有远高于电信号传输速率的特点，更适合于未来高速率的传输网络。工程师们在光纤通信传输系统设计前，往往会通过计算机仿真的方式研究系统设计的指标，以便快速找到最适合的解决方案。因此在进行系统仿真时，需要准确掌握系统中各个器件的特性以保证仿真模型的精度。其中，激光器作为光纤通信系统的核心器件是系统仿真中需要考虑的一个重要因素。本文以垂直腔面发射激光器（VCSEL）作为研究对象，研究其输出的光功率强度与器件的温度的关系。

具体需要解决以下 4 个问题：

问题一：VCSEL 的 L-I 模型

根据对 L-I 问题的理解，和给定的实测数据，(1) 确定模型参数 $(\eta, I_{th0}, R_h, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ ，根据模型画出 $10^\circ\text{C}, 20^\circ\text{C}, 30^\circ\text{C}, \dots, 90^\circ\text{C}$ 等温度下的 L-I 曲线（横坐标是电流强度，纵坐标是光功率）；(2) 假定当电信机房里 VCSEL 激光器在直流输入时输出的平均光功率低于 2mW 时，用户的光猫无法检测到信号。那么，根据建立的 L-I 模型推测：电信机房里 VCSEL 激光器工作的环境温度最多不能高于多少摄氏度，才能保证用户可以正常使用网络？

问题二：L-I 模型的改进

分析问题 1 中模型的精度和误差产生的原因，提出你们的改进，根据改进模型画出 $10^\circ\text{C}, 20^\circ\text{C}, 30^\circ\text{C}, \dots, 90^\circ\text{C}$ 等温度下的 L-I 曲线，并与问题 1 中 L-I 曲线进行比较。你们也可以采用完全不同的方法得到更好的 L-I 模型。

问题三：VCSEL 的带宽模型（小信号幅频响应模型）

了解 VCSEL 的带宽模型，并通过附录提供的公式及相应的实测数据：(1) 建立恰当的激光器小信号幅频响应参数模型，给出参数构成及其确定方法，画出不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线；(2) 利用带宽模型，分析激光器的温度和激光器的偏置电流对器件带宽曲线的影响；(3) 假定激光器工作环境温度恒定在 20°C ，偏置电流固定在 7.5mA 。那么，如果要获得更宽带宽的激光器设计方案，还可以通过什么手段实现？(4) 改变激光器的某些参数可以发现一些有趣的问题，比如激光器在 3dB 范围内的部分频率处幅度可能会高于 0 频位置。请问，改变哪些参数会有这种现象？在实际应用中，我们希望这部分带宽曲线越平坦越好，那么如何设计这些参数可以实现我们的目的？

问题四：VCSEL 带宽模型的改进

开放性探索问题：是否有更好的带宽模型建模方式，使得模型运算速度更快？或者在相同的温度和偏置电流下，可以获得更宽的 3dB （或 10dB ）带宽？如果有，请给出建模方案，包括可能的数学公式，不同温度和偏置电流下的带宽响应曲线，并与问题 3 的模型进行比较。

2 模型假设

- (1) 假设参数的初始值都与参数迭代拟合后的值相差不大。(第三问)
- (2) 假设经验公式推导和小信号响应曲线推导正确。
- (3) 假设载流子浓度变化和光子浓度变化量比较小。(第四问)
- (4) 假设题目 L-I 在 $T=20$ 摄氏度的实验数据, 足够预测其他温度 L-I 曲线。

3 符号说明

P_0	输出的光功率
I	外部驱动电流
$\eta(T)$	L-I 曲线的斜率
$I_{th}(N, T)$	阈值电流
N	载流子数
R_{th}	VCSEL 热阻抗
τ_{th}	热时间常数
T_0	环境温度
I	输入电流
V	输入电压
η_i	转换效率
N_0	透明载流子数
$I_{off}(T)$	温度相关的偏置电流
τ_n	载流子复合寿命
τ_p	光子寿命
G_0	增益系数
S	光子数
β	受激辐射耦合系数
ε	增益压缩因子

4 问题一 (L-I 曲线)

4.1 问题分析与描述

问题一物理模型是建立在前人对 VCSEL 的 L-I 模型问题做了大量研究的基础上, 根据目前国际上公认的 L-I 经验公式和已知的室温为 20° C 时的实测数据, 确定模型参数 (η , T_{th0} , R_{th} , a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4), 并根据所确定模型绘制室温在 10°C, 20°C, 30°C, ……, 90°C 等温度下的 L-I 曲线。然后判断电信机房里 VCSEL 激光器工作的环境温度最多不能高于多少摄氏度, 才能保证用户可以正常使用网络。

对于 VCSEL 的 L-I 模型, 一般我们认为其各参数间满足以下等式:

$$P_0 = \eta(T)(I - I_{th}(N, T)) \quad (4-1)$$

式中, P_0 表示输出的光功率; I 代表外部驱动电流, 包含外部加载的偏置电流 I_b 和信号电流, 在无信号时为偏置电流 I_b ; $\eta(T)$ 表示 L-I 曲线的斜率; $I_{th}(N, T)$ 表示阈值电流, 即激光器电流超过该值则激光发光; N 表示载流子数。

根据问题一的要求, 本文假设 $\eta(T)$ 受温度影响较小, 近似于 η ; 且 $I_{th}(N, T) = I_{th0} + I_{off}(T)$, 其中, I_{th0} 为常数, $I_{off}(T)$ 是与温度相关的经验热偏置电流(与外部人为加载的激光器偏置电流 I_b 不同, 随激光器温度的变化而变化)。由此, 式 (4-1) 可以简化为:

$$P_0 = \eta(I - I_{th0} - I_{off}(T)) \quad (4-2)$$

$I_{off}(T)$ 可以表示为:

$$I_{off}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \quad (4-3)$$

该式中的温度 T 受外界环境温度 T_0 和自身的影响, 自身的温度与器件产生的瞬时功率 相关, 即受 V-I 特性 (电压-电流特性) 影响:

$$T = T_0 + (IV - P_0)R_{th} - \tau_{th} \frac{dT}{dt} \quad (4-4)$$

其中, T_0 代表环境温度, I 为偏置电流 (即输入电流), V 表示输入电压, R_{th} 为 VCSEL 热阻抗, τ_{th} 表示热时间常数, 由于本题模型在直流状态下进行, 则可知 $\tau_{th} \frac{dT}{dt}$ 为 0。

整理上式可得:

$$P_0 = \eta \{ I - I_{th0} - [a_0 + a_1(T_0 + (IV - P_0)R_{th}) + a_2(T_0 + (IV - P_0)R_{th})^2 + a_3(T_0 + (IV - P_0)R_{th})^3 + a_4(T_0 + (IV - P_0)R_{th})^4] \} \quad (4-5)$$

由上式即可得到激光器的光功率 P_0 与 (η , T_{th0} , R_{th} , a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4) 之间的关系, 本题给出了该模型的一组参考值:

表 4.1 L-I 模型初值设置即模型参数提取

参数	参考初值	单位
η	0.5	-
I_{th0}	0.3E-3	A
R_{th}	2.6E3	°C/W
a_0	1.246E-3	A
a_1	-2.545E-5	A/K
a_2	2.908E-7	A/K ²
a_3	-2.531E-10	A/K ³
a_4	1.022E-12	A/K ⁴

所以本题转化成了非线性方程的迭代问题, 利用模型参数的初始值和室温为20 °C时的实测数据迭代出模型参数的最优解, 即得到一组新的模型参数(η , T_{th0} , R_{th} , a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4), 并通过新的参数反解出不同温度下对应I所对应的光功率P, 从而画出不同环境温度下P-I曲线。

4.2 非线性最小二乘法拟合

本题要从给定的模型参数初始值和相应实测数据迭代最优模型参数, 可用最小二乘法的方法(基本算法是 Guass-Newton 算法)进行曲线拟合, n 次迭代出模型参数。最小二乘法曲线拟合的基本思想是: 使所有数据点与估计点(或叫做拟合点)的误差(如果是二维图形误差就是数据点与估计点的垂直距离)的平方和, 如果所拟合的曲线能使误差平方和最小, 这就得到最小二乘法拟合曲线。其数学原理为: 对于给定的一组数据{ (x_i, y_i) }, ($i=1, 2, 3, \dots, m$), 若拟合曲线模型为 $y=f(x)$, 则第 i 组误差距离为 $f(x_i) - y_i$, 所有点的平方和就是 $\sum_1^m [f(x_i) - y_i]^2$, 进而得到拟合曲线。

本题使用的基本算法是 Guass-Newton 算法, 基本原理是: 求最优估计 x^* , 使得误差(残差)向量 $\varepsilon = f(x^*) - z$ 的平方和 $S(x) = \varepsilon^T \varepsilon$ 最小, 即求

$$x^* = \arg \min \varepsilon^T \varepsilon = \arg \min S(x) = \arg \min \|f(x) - z\|_2^2 \quad (4-6)$$

最理想的情况, 误差 $\varepsilon=0$, 此时 $f(x^*)=zf(x^*)=z$, 故最优化问题(1)等价于“解方程”问题:

$$f(x) = z \quad (4-6)$$

大部分非线性最优化算法需要迭代求解:

$$x_{+} = x + \delta \quad (4-7)$$

若已有初值 x , 每次迭代需要求解一个最优增量 δ , 使得迭代后的“预测输出” $f(x + \delta)$ 与实际的观测值 z 的误差 $\|f(x + \delta) - z\|$ 最小。

对误差向量线性化，有

$$f(x + \delta) - z \approx f(x) + J\delta - z \quad (4-8)$$

其中， $J = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$ 为 $f(x)$ 的雅克比矩阵。令上式为 0，就变成了解线性方程问题。

$$J\delta = \epsilon, \quad \epsilon = z - f(x) \quad (4-9)$$

但在实际应用中，上式往往是超定的，故用线性最小二乘法求解，

$$J^T J \delta = J^T \epsilon \leftrightarrow \delta^* = \arg \min \|J\delta - \epsilon\|_2^2 \quad (4-10)$$

故非线性最优化问题就变成了迭代求解非线性方程的问题，即高斯-牛顿方法。

4.3 模型参数求解与分析

本题根据提供的模型参数初始值（表 4.1），利用 MATLAB 软件进行 P-I 模型的最小二乘法拟合，主体代码见本文附录，公式中所有参数的单位均换算为国际单位（mA 换算为 A，mW 换算为 W，°C/W 换算为 K/W 等）多次迭代后得到新的优化后的参数值，见表 4.2。

表 4.2 模型参数值对比

参数	参考初值	优化后值	单位
η	0.5	0.415	-
I_{th0}	0.3E-3	-1.45E-3	A
R_{th}	2873	2873	K/W
a_0	1.246E-3	-0.46E-3	A
a_1	-2.545E-5	-3.97E-5	A/K
a_2	2.908E-7	2.50E-7	A/K ²
a_3	-2.531E-10	-5.04E-10	A/K ³
a_4	1.022E-12	6.87E-13	A/K ⁴

求解出优化后的模型参数值后，我们就可以根据以上公式模拟出测试温度 $T_0=20^\circ\text{C}$ 时的光功率 P_0 ，绘制的 L-I 曲线如图 4.1 所示：

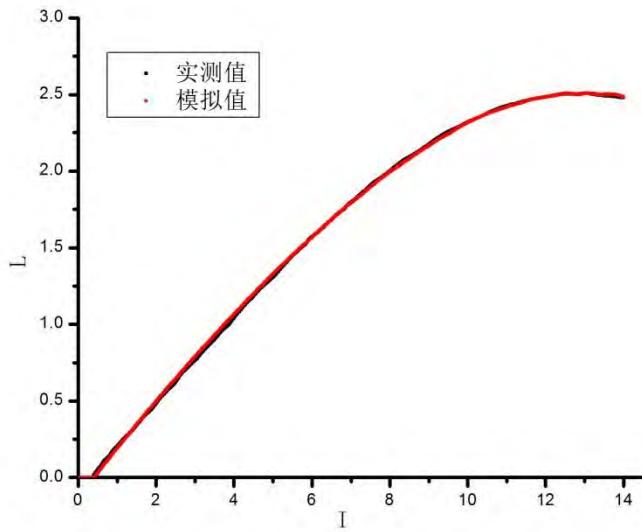


图 4.1 $T_0=20^\circ\text{C}$ 时实测值与模拟值 L-I 曲线

根据室温 20°C 下实测的光功率和模拟的光功率所绘制的 L-I 曲线, 我们可以直观地看出, 随着 I 增加, L 呈上升的趋势。 $I=0.38\text{mA}$ 是该激光器的初始电流, 这个值在物理上叫做阈值电流, 超过这个值, 才有光功率输出。

为了更精确地验证模型建立的准确性, 我们通过拟合优度检验来评价我们的模型。拟合优度适用于检验回归方程对样本观测值的拟合程度, 对本题实用性更高。定义样本决定系数为:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} \quad (4-11)$$

其中, SST 、 SSR 和 SSE 分别表示总平方和、回归平方和与残差平方和, 样本决定系数 R^2 的取值在 $[0, 1]$ 区间内, 且 R^2 越接近于 1, 表明回归拟合的效果越好。本题将公式用 MATLAB 求解, 得到在 $T_0=20^\circ\text{C}$, R^2 达到 0.99, 说明了模拟的光功率值与实测值几乎重合。由此也可以看出, 拟合出的模型参数

$(\eta, T_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ 精度较高, 可以用来模拟不同 T_0 下的 L-I 曲线。

将 $T_0=10^\circ\text{C}, 20^\circ\text{C}, 30^\circ\text{C}, \dots, 90^\circ\text{C}$ 分别带入回归方程, 可模拟出相应温度下的光功率数据, 可绘制出不同温度下 VCSEL 的 P-I 曲线, 如图 4.2 所示:

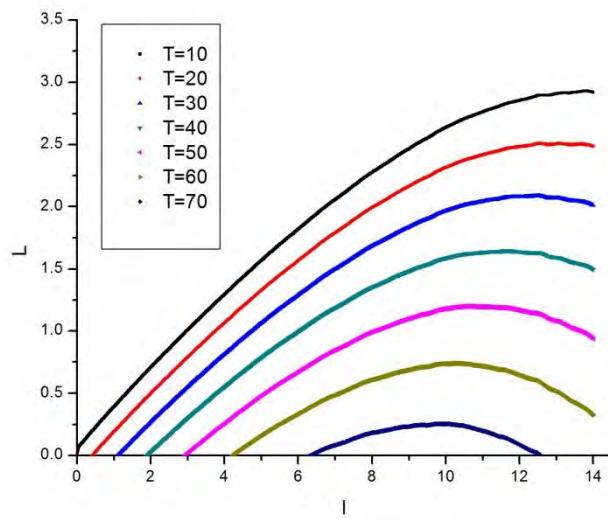


图 4.2 不同温度下 L-I 曲线

根据上图，我们可以看出，随着温度的增加，L-I 曲线的峰值逐渐减小，峰值所对应的工作电流向左移动，并且最大光功率也逐渐减小，从而说明了环境温度越高，对激光器的工作效率也就越低，通过能量守恒的角度也可以解释这个原因，环境温度越高，激光器转换成热能的部分就越多，转换为光能的部分自然减少，可利用的部分就更少了。

由于本题该模型拟合曲线是建立在多种假设基础上的，将 η 当做一个常数，不受温度影响，热阻抗 R_{th} 也当做定值，迭代后并没有改变，所以造成根据该模型参数绘制的不同温度的 L-I 曲线精度上不够准确，并且当 $T_0=80^\circ\text{C}$ 、 90°C 时， P 值均小于 0，这个在物理上没有意义，即激光器在 $T_0=80^\circ\text{C}$ 、 90°C 均不工作，所以下期仍需要改进参数模型，提高激光器的工作温度。

表 4.3 不同温度对应峰值

T0: 环境温度	I: 驱动电流	P: 光功率
10	13.78	2.929113
20	12.54	2.508097
30	12.49	2.088971
40	11.66	1.648568
50	10.61	1.198444
60	10.39	0.739012
70	9.86	0.256435
80	9.25	-0.25285
90	7.96	-0.77369

在得到 $T_0=10^\circ\text{C}$ ， 20°C ， 30°C ，……， 90°C 等温度下的 L-I 曲线后，我们将各温度下的峰值提取出，如下表所示，并绘制散点图如下图所示：

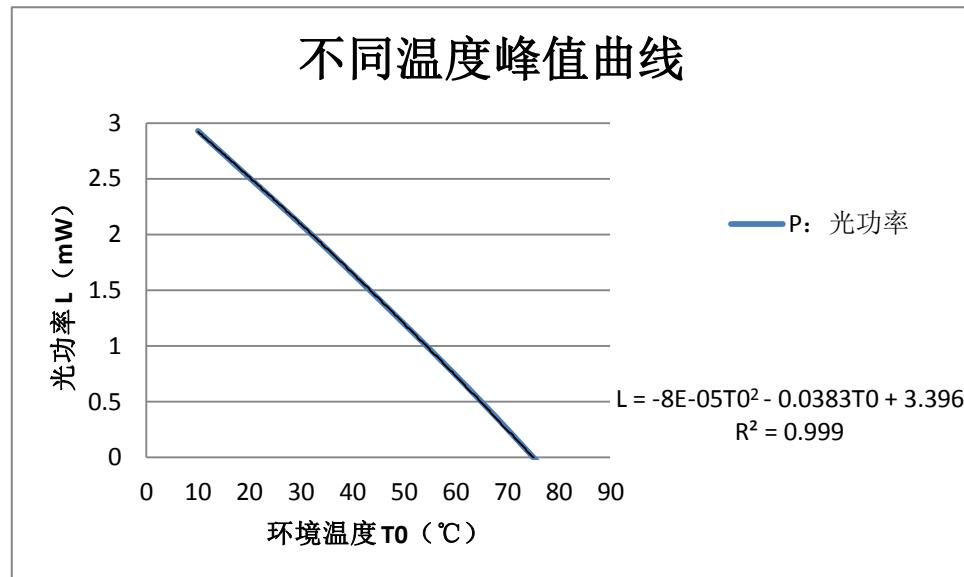


图 4.3 不同温度峰值曲线

根据不同温度下对应的最大光功率曲线，我们可以看出，光功率与温度具有相关性，可表示为 $L = -8E-05T0^2 - 0.0383T0 + 3.396$, R^2 接近于 1，相关性非常高。假定当电信机房里 VCSEL 激光器在直流输入时输出的平均光功率低于 2mW 时（即最大光功率为 2mW 时），用户的光猫无法检测到信号。那么，此时，由公式得出 $T0=34^{\circ}\text{C}$ 。为了验证 $T0$ 的正确性，我将 $T0=34^{\circ}\text{C}$ 时带入模型公式，可得出如下图所示的 L-I 曲线：

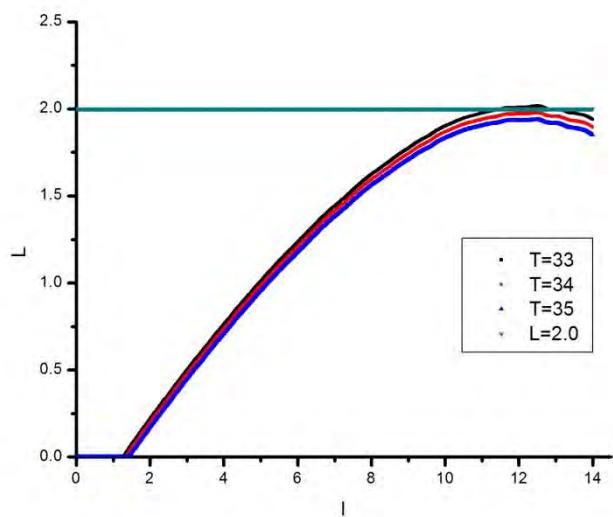


图 4.4 $T0=33$ 、 34 和 35°C 时 L-I 曲线

为了验证 $T0=34^{\circ}\text{C}$ 的正确性，我们将 $T0=33$ 和 35°C 的 L-I 曲线绘制出来，从图中我们可以看出， $T0=33$ 时最大功率超过 2mW，而 $T0=35$ 时的 L-I 曲线位于 $T0=34$ 的下方，从而可以推测电信机房里 VCSEL 激光器工作的环境温度最多不能高于 34 摄氏度，才能保证用户可以正常使用网络。

5 问题二 (L-I 曲线改进模型)

5.1 模型改进意义

问题一我们通过已知的环境温度 $T_0=20^\circ\text{C}$ 时的实测的 4 个变量: I: 实测驱动电流, U: 实测电压, T_a : 实测温度和附录给出的 L-I 模型参数的初始值通过最小二乘法迭代拟合出 20°C 下模型参数的最优解, 并通过新的最优解和模型模拟出 P_0 , 绘制新的 L-I 曲线, 从实验结果可以看出, 20°C 的实测值和模拟值十分接近, R^2 达到了 0.99, 从而验证了该拟合方法的正确性。

根据绘制的 $T_0=10^\circ\text{C}, 20^\circ\text{C}, 30^\circ\text{C}, \dots, 90^\circ\text{C}$ 下的 L-I 曲线, 可以看出, $T_0=10^\circ\text{C}$ 时, 在工作电流 $I=0$ 时, 模拟光功率 $P>0$, 这在物理学上显然是错误的, 另外, 当 $T_0>80^\circ\text{C}$ 以后 (即 $T_0=80, 90^\circ\text{C}$), 无论工作电流 I 怎么变化, P 均在 0 以下, 相当于温度超过 80°C , 激光器停止工作, 也是存在问题的。文献^[9] 也说明在经验模型在高温度下是不准的, 一般小于实验数据。

针对以上分析, 我们可以看出问题一中模型的精度较低, 只在 $T_0=20^\circ\text{C}$ 时较为精确地模拟出了光功率的值, 在其它温度下则产生很大的误差。我们分析有以下几个原因:

(1) 上式中的 $\eta(T)$ 代表的是 L-I 曲线的斜率, 从能量转换的角度看, 斜率对应于转换效率 (L-I 曲线横坐标是电流 I , 纵坐标是出光功率 P , 则斜率越高, 相同电流 I 对应的输出光功率越高, 相同的电能转换为光能部分越多), 问题一我们假定转换效率 $\eta(T)$ 受温度影响较小, 即 $\eta(T)$ 近似于常数 η (本题中设 η 初始值为 0.5)。但是在实际工作中, 从物理学的角度来看, 伴随着温度的升高, 半导体器件一定会产生更多的热量, 从而转化为光能的能量就会减少 (输出光功率越低), 可以利用的能量就越少, 也就是转换效率越低。所以, $\eta(T)$ 应随这温度的升高而减小, 当温度变化较大时, 不能看做一个常数来分析。

(2) 上式中的 R_{th} 表示 VCSEL 热阻抗, 热阻抗是指热量在热流路径上遇到的阻力, 反映介质或介质间的传热能力的大小。问题一给定了一个参考值, 为 $2.6\text{E}3^\circ\text{C/W}$ 。该值是在 $T_0=20^\circ\text{C}$ 给定的初值, 并不适用于所有环境温度下, 问题一为了简化模型, 将在 $T_0=20^\circ\text{C}$ 环境下的热阻抗扩展到其它温度, 也是造成 L-I 曲线存在误差的原因之一。这点在文献^[10] 也有说明, 我们通常为了弥补高温度带来模型的欠缺, 会故意认为加大 R_{th} 值, 从而来弥补模型的欠缺。

5.2 模型求解与分析

针对以上分析, 我们提出 3 种改进模型: $\eta(T)$ 受温度影响、 R_{th} 受温度影响和 $\eta(T)$ 与 R_{th} 均受温度影响, 下面将逐一展开求解与分析。

5.2.1 $\eta(T)$ 受温度影响

这里假设 η 受到环境温度的变化而变化, 是温度 T_0 的函数, 为了简化模型, 我们认为 η 与 T_0 之间仅存在一次线性关系, 忽略高次项的影响, 可表示为:

$$\eta_1 = \eta + \alpha_1 T_0 \quad (5-1)$$

式中, η 为问题一给定的值, 同时 η_1 是有关 η 和 T_0 的函数, 此时问题公式变为:

$$P_0 = (\eta + \alpha_1 T_0) \{ I - I_{th0} - [a_0 + a_1 (T_0 + (IV - P_0)R_{th}) + a_2 (T_0 + (IV - P_0)R_{th})^2 + a_3 (T_0 + (IV - P_0)R_{th})^3 + a_4 (T_0 + (IV - P_0)R_{th})^4] \} \quad (5-2)$$

由上式可知，公式中含有9个模型参数，其中 $(\eta, T_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ 8个模型参数已经给出，我们通过给定新的合适参数 a_1 一个初值，经过最小二乘法迭代后得出最优解，并将该值继续当做初值带入，经过多次迭代优化后，直到 a_1 的最优解固定，则认为 $(\eta, T_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ 在 $T0=20^{\circ}\text{C}$ 下的最优解求取成果，具体值见表 5.1：

表 5.1 模型参数值对比

参数	参考初值	优化后值	单位
η	0.5	0.4524	-
I_{th0}	0.3E-3	1.1E-3	A
R_{th}	2873	2873	K/W
a_0	1.246E-3	-0.7E-3	A
a_1	-2.545E-5	4.714E-8	A/K
a_2	2.908E-7	1.4E-8	A/K ²
a_3	-2.531E-10	-4.608E-10	A/K ³
a_4	1.022E-12	1.208E-12	A/K ⁴
a_1	-0.001	-4.346E-4	-

通过新的模型参数，将 $T0=20^{\circ}\text{C}$ 带入公式，即可得出不同工作电流下的光功率模拟数据，从而得到新的 L-I 曲线，如图 5.1 所示：

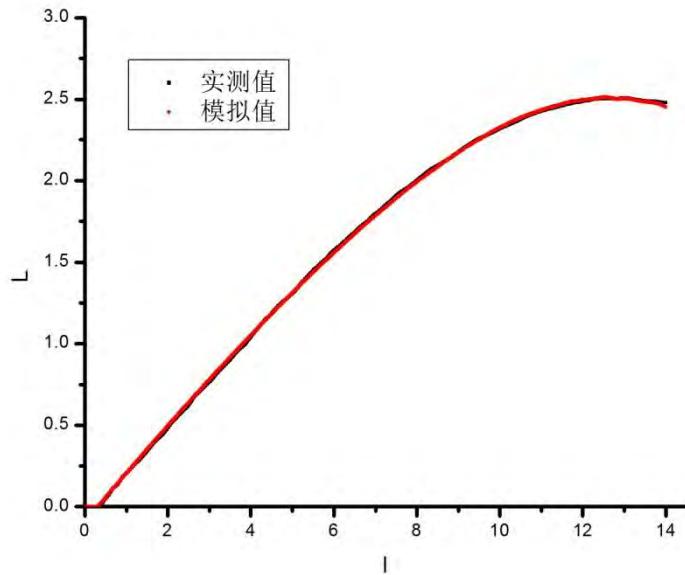


图 5.1 考虑 η 后 20°C 下 L-I 曲线

为了评价我们模型准确性, 引进我们拟优化度指数, 此时 R^2 达到了 0.99, 说明该参数引入合理, 可以用这一组新的模型参数模拟出其它不同温度下的光功率数据, 进而画出新的 L-I 曲线, 如图 5.2 所示。

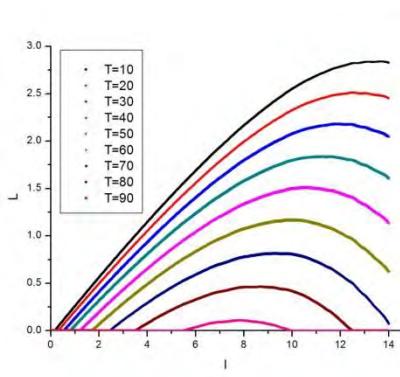


图 5.2 (a) 不同温度 L-I 曲线 (考虑 η)

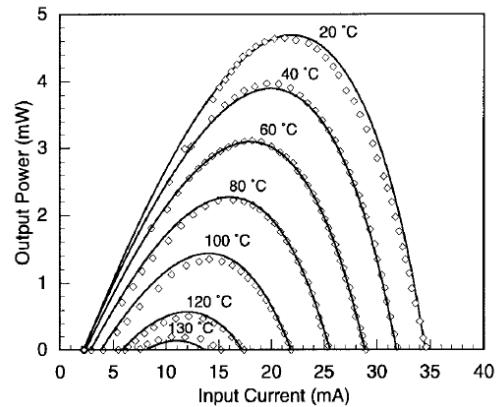


图 5.2 (b) 文献^[5]实验和模拟图

由 5.2 (a) 和 (b) 的对比, 我们可以发现, 我们的曲线形状越来越接近实验数据值, 由 (5-2) 式可知, 究其原因是 η 影响着不同温度下曲线间的斜率, 间接影响着激光器在温度高的时候刚开始可以工作的初始电流。为原模型在高温度失准, 提供了很好的弥补, 为有效改进。

5.2.2 R_{th} 受温度影响

与上述方法类似, 这里假设 R_{th} 并非一直是个定值, 这在文献^[5]反复提及, 为了弥补温度高对经验模型准确性的影响, 会认为有意设置一个高于实际的值, 显然其受到环境温度的变化而变化, 是温度 T_0 的函数, 而文中却认为它是一个常数, 为了简化模型, 我们认为 R_{th} 与 T_0 之间仅存在一次线性关系, 而忽略高

次项的影响，可表示为：

$$Rth0 = Rth + \alpha_2 T0 \quad (5-3)$$

式中， Rth 认为问题一给定的值，同时 $Rth0$ 是有关 Rth 和 $T0$ 的函数，此时问题公式变为：

$$P_0 = \eta \{ I - I_{th0} - [a_0 + a_1(T_0 + (IV - P_0)(Rth + \alpha_2 T0)) + a_2(T_0 + (IV - P_0)(Rth + \alpha_2 T0))^2 + a_3(T_0 + (IV - P_0)(Rth + \alpha_2 T0))^3 + a_4(T_0 + (IV - P_0)(Rth + \alpha_2 T0))^4] \} \quad (5-4)$$

由上式可知，公式中含有 9 个模型参数，其中 $(\eta, T_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ 8 个模型参数已经给出，我们通过给定新的参数 a_2 一个初值，经过最小二乘法迭代后得出最优解，并将该值继续当做初值带入，经过多次迭代优化后，直到 a_1 的最优解固定。但是在迭代的过程中，我们发现 Rth 值并不随迭代的次数而改变，即我们需要根据一些经验来设置 a_2 的值，在前人的基础上，本文经过多次假设和验证，发现 $a_2 = 30$ 时效果最好，最接近于真实值，此时模型参数的最优值如下表所示 ($T0=20^\circ\text{C}$)：

表 5.2 参数值对比

参数	参考初值	优化后值	单位
η	0.5	0.5	-
I_{th0}	0.3E-3	-4.849E-4	A
R_{th}	2873	2873	K/W
a_0	1.246E-3	-1.5E-3	A
a_1	-2.545E-5	-2.676E-5	A/K
a_2	2.908E-7	1.994E-7	A/K ²
a_3	-2.531E-10	-3.481E-10	A/K ³
a_4	1.022E-12	2.099E-13	A/K ⁴
a_2	-	30	

通过新的模型参数，将 $T0=20^\circ\text{C}$ 带入公式，即可得出不同工作电流下的光功率模拟数据，从而得到新的 L-I 曲线，如图 5.3 所示：

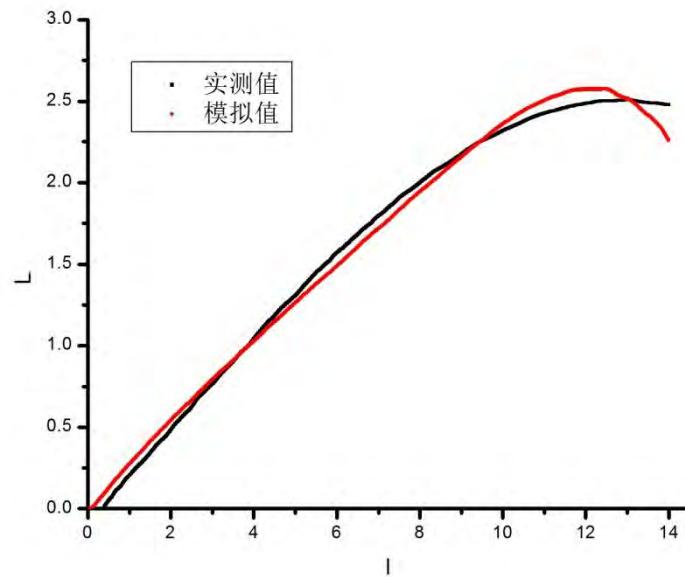


图 5.3 考虑 R_{th} 后 20°C 下 L-I 曲线

为了评价我们模型准确性，引进我们拟优化度指数，此时 R^2 达到了 0.99，说明该参数引入合理，假设成立，可以用这一组模型参数模拟出其它不同温度下的光功率数据，进而画出新的 L-I 曲线，如下图所示。

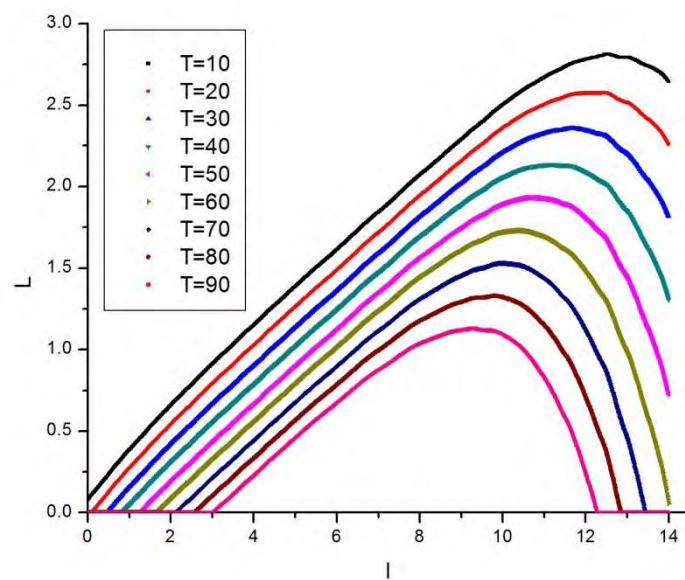


图 5.4 不同温度 L-I 曲线（考虑 R_{th} ）

由 5.4 图和 5.2 (b) 的对比，我们可以发现，我们的曲线形状越来越接近实验数据值，由文献^[5]可知，通常 R_{th} 模拟使用的值高于该温度下的实际值，目的就是为了弥补高温给 R_{th} 带来的影响，因此改变这个参数显得很有意义，实际效果也是越来越接近真实曲线。

5.2.3 $\eta(T)$ 和 R_{th} 均受温度影响

上面两种情况是单独考虑 $\eta(T)$ 和 R_{th} 受温度影响时的L-I曲线变化，并得到了优于问题一的结果。但在实际工作中， $\eta(T)$ 和 R_{th} 往往都会受到温度的影响而不同程度的改变。通过以上分析，我们考虑 $\eta(T)$ 和 R_{th} 均受温度影响而变化，即：

$$\eta_1 = \eta + \alpha_1 T_0 \quad (5-5)$$

$$R_{th0} = R_{th} + \alpha_2 T_0 \quad (5-6)$$

此时，式(5-4)可写成：

$$P_0 = (\eta + \alpha_1 T_0) \{ I - I_{th0} - [a_0 + a_1 (T_0 + (IV - P_0)(R_{th} + \alpha_2 T_0)) + a_2 (T_0 + (IV - P_0)(R_{th} + \alpha_2 T_0))^2 + a_3 (T_0 + (IV - P_0)(R_{th} + \alpha_2 T_0))^3 + a_4 (T_0 + (IV - P_0)(R_{th} + \alpha_2 T_0))^4] \} \quad (5-7)$$

由上式可知，公式中含有10个模型参数，其中 $(\eta, T_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ 8个模型参数已经给出，通过上面的分析我们给定经过 α_1 和 α_2 的初始值，经过最小二乘法迭代后得出最优解。最后得出的模型参数的最优值如下表所示($T_0=20^\circ\text{C}$)：

表 5.3 模型参数值对比

参数	参考初值	优化后值	单位
η	0.5	0.424	-
I_{th0}	0.3E-3	3.5E-3	A
R_{th}	2873	2873	K/W
a_0	1.246E-3	4.4E-3	A
a_1	-2.545E-5	-7.146E-5	A/K
a_2	2.908E-7	2.288E-7	A/K ²
a_3	-2.531E-10	-2.954E-10	A/K ³
a_4	1.022E-12	1.533E-13	A/K ⁴
a_1	-0.001	-3.005E-4	-
a_2	-	30	

通过新的模型参数，将 $T_0=20^\circ\text{C}$ 带入公式，即可得出不同工作电流下的光功率模拟数据，从而得到新的L-I曲线，如图5.5所示：

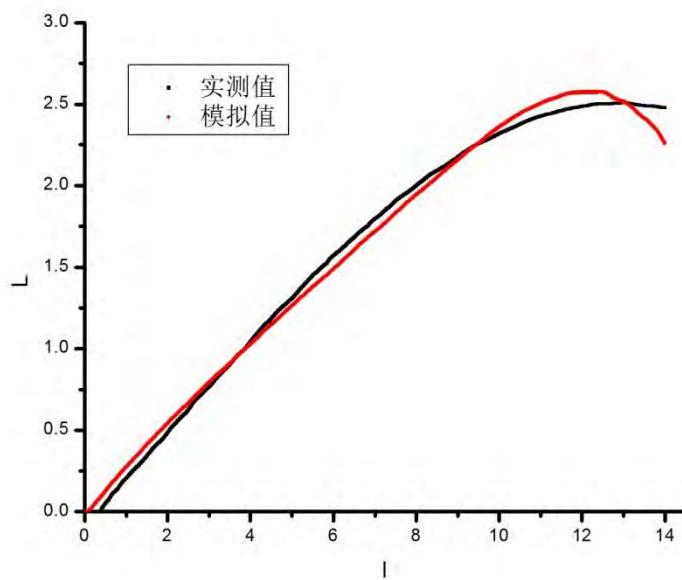


图 5.5 20°C 下 L-I 曲线 (考虑 η 和 R_{th})

此时, 20°C 的实测值和模拟值的 R^2 为 0.99, 说明了拟合的 10 个模型参数满足要求, 可以改变 T_0 来模拟出其余温度下的光功率值, 并绘制相应 L-I 曲线, 如下图所示:

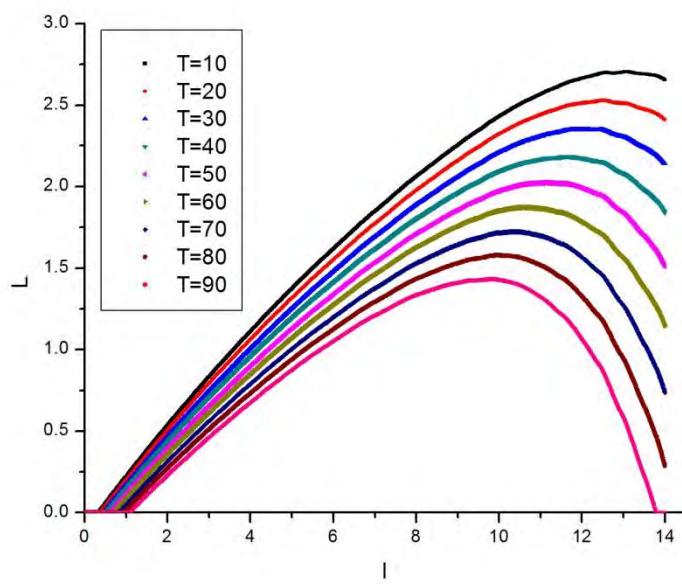


图 5.6 不同温度下 L-I 曲线 (同时考虑 η 和 R_{th})

5.3 基于速率方程新模型

本小问我们根据查阅相关文献^[6], 将从速率方程出发, 研究新的 L-I 模型建模方式。假设载流子浓度和光子浓度变化量较小情况下, 将电流 I、载流子浓度

N、光子浓度 N_p 以及增益 g 作为变量分别对时间 t 求微分，可得：

$$d\left[\frac{dN}{dt}\right] = \frac{\eta_i}{qV} dI - \frac{1}{\tau_{\Delta N}} dN - v_g dN_p - N_p v_g dg \quad (5-8)$$

$$d\left[\frac{dN_p}{dt}\right] = \left[\Gamma v_g - \frac{1}{\tau_p}\right] dN_p + N_p \Gamma v_g + \frac{\Gamma}{\tau_{\Delta N}} dN \quad (5-9)$$

其中，辐射进入激光基模的载流子寿命 $\tau_{\Delta N}$ 和 $\tau_{\Delta N}'$ 为：

$$\frac{1}{\tau_{\Delta N}} = \frac{dR_{sp}}{dN} = 2\beta_{sp}BN + \frac{dR_{sp}}{dN}BN^2 \quad (5-10)$$

$$\frac{1}{\tau_{\Delta N}'} = \frac{dR_{sp}}{dN} = 2\beta BN + \frac{dR_{sp}}{dN}BN^2 \quad (5-11)$$

其中， $\tau_{\Delta N}'$ 由于较小，为简化模型可以忽略不计。增益 g 是关于 N 和 N_p 的函数，对其求导得：

$$dg = \alpha dN - \alpha_p dN_p \quad (5-12)$$

$$\alpha = \frac{\partial g}{\partial N} = \frac{g_0}{(N+N_s)(1+\varepsilon N_p)} \quad (5-13)$$

$$\alpha_p = -\frac{\partial g}{\partial N_p} = \frac{\varepsilon g}{1+\varepsilon N_p} \quad (5-14)$$

由于 g_0 、 N_s 和 ε 均为常量，将上式整理变形可得：

$$d\left[\frac{dN}{dt}\right] = \frac{\eta_i}{qV} dI - \left(\frac{1}{\tau_{\Delta N}} + N_p v_g \alpha\right) dN - (v_g g - N_p v_g \alpha_p) dN_p \quad (5-15)$$

$$d\left[\frac{dN_p}{dt}\right] = \left(\frac{\Gamma}{\tau_p} + N_p \Gamma v_g \alpha\right) dN - \left(\frac{1}{\tau_p} - \Gamma v_g g + N_p \Gamma v_g \alpha\right) dN_p \quad (5-16)$$

$$\frac{1}{\tau_p} - \Gamma v_g = \frac{\Gamma R_{sp}}{N_p} \quad (5-17)$$

可将其写成矩阵的形式，

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} dN \\ dN_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Upsilon_{NN} & -\Upsilon_{NP} \\ \Upsilon_{PN} & -\Upsilon_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dN \\ dN_p \end{bmatrix} + \frac{\eta_i}{qV} \begin{bmatrix} dI \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-18)$$

$$\Upsilon_{NN} = \frac{\Gamma}{\tau_{\Delta N}} + v_g \alpha N_p \quad (5-19)$$

$$\Upsilon_{PN} = v_g g - v_g \alpha_p N_p = \frac{1}{\Gamma \tau_p} - \frac{R_{sp}}{N_p} - v_g \alpha_p N_p \quad (5-20)$$

$$\Upsilon_{PN} = \frac{\Gamma}{\tau_{\Delta N}} + \Gamma v_g \alpha N_p \quad (5-21)$$

$$\Upsilon_{PP} = \frac{1}{\tau_p} - \Gamma v_g g + \Gamma v_g \alpha_p N_p = \frac{\Gamma R_{sp}}{N_p} + \Gamma v_g \alpha_p N_p \quad (5-22)$$

当电流 I 远大于阈值电流 I_{th} 且光子浓度 N_p 足够大时，对上式进行优化，可得：

$$\Upsilon_{NN} = \frac{\Gamma}{\tau_{\Delta N}} + v_g \alpha N_p \quad (5-23)$$

$$\Upsilon_{PN} = \frac{1}{\Gamma \tau_p} - v_g \alpha_p N_p \quad (5-24)$$

$$\Upsilon_{PN} = \Gamma v_g \alpha_p N_p \quad (5-25)$$

$$\Upsilon_{PP} = \Gamma v_g \alpha_p N_p \quad (5-26)$$

通过上面的小信号速率方程组，虽然上式中的各个系数依赖于 N 、 N_p 的变化，但在特定的 I 电流条件下， N 和 N_p 均为常量。假设调制电流为正余弦形式， dI 、 dN 以及 dN_p 可分别表示为：

$$dI(t) = I e^{j\omega t} \quad (5-27)$$

$$dN(t) = N_1 e^{j\omega t} \quad (5-28)$$

$$dN_p(t) = N_{p1} e^{j\omega t} \quad (5-29)$$

其中， I 、 N_1 以及 N_{p1} 分别为调制电流的振幅、载流子浓度幅值以及光子浓度幅值。

带入整理可得关于 N_1 和 N_{p1} 的矩阵形式，

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{NN} + j\omega & \Upsilon_{NP} \\ -\Upsilon_{PN} & \Upsilon_{PP} + j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_{p1} \end{bmatrix} = \frac{\eta_i I}{qV} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5-30)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Upsilon_{NN} + j\omega & \Upsilon_{NP} \\ -\Upsilon_{PN} & \Upsilon_{PP} + j\omega \end{vmatrix} = \Upsilon_{NP} \Upsilon_{PN} + \Upsilon_{NN} \Upsilon_{PP} - \omega^2 + j\omega(\Upsilon_{NN} + \Upsilon_{PP}) \quad (5-31)$$

将其求解可得，

$$N_1 = \frac{\eta_i I}{qV} \cdot \frac{\Upsilon_{PP} + j\omega}{\omega_R^2} \cdot H(\omega) \quad (5-32)$$

$$N_{p1} = \frac{\eta_i I}{qV} \cdot \frac{\Upsilon_{PN}}{\omega_R^2} \cdot H(\omega) \quad (5-33)$$

$$H(\omega) = \frac{\omega^2}{\Delta} = \frac{\omega_R^2}{\omega_R^2 - \omega^2 + j\omega\gamma} \quad (5-34)$$

$$\omega_R^2 = \Upsilon_{NP} \Upsilon_{PN} + \Upsilon_{NN} \Upsilon_{PP} \quad (5-35)$$

$$\gamma = \Upsilon_{NN} + \Upsilon_{PP} \quad (5-36)$$

其中， $H(\omega)$ 为小信号幅频响应函数， ω_R 代表的是松弛振荡角频率， γ 为阻尼因子。将以上公式进一步整理，

$$\omega_R^2 = \frac{N_p v_g \alpha_p}{\tau_p} + \left(\frac{\Gamma v_g \alpha_p N_p}{\tau_{\Delta N}} - \frac{\Gamma v_g g}{\tau_{\Delta N}} \right) \left(1 - \frac{\tau_{\Delta N}}{\tau_{\Delta N}'} \right) + \frac{1}{\tau_{\Delta N} \tau_p} \quad (5-37)$$

$$\gamma = \left(\frac{1}{\tau_{\Delta N}} + N_p v_g \alpha \right) + \left(\frac{1}{\tau_p} + \Gamma v_g \alpha_p N_p \right) - v_g g \quad (5-38)$$

从上式均是有物理意义的，左端第一个括号项表示由于载流子浓度的变化而引起的损耗，第二个括号表示由于光子浓度的变化引起的损耗，最后一项为光子浓度的增加项。通过消去增益，上式可变为：

$$\omega_R^2 = \frac{N_p v_g \alpha}{\tau_p} + \left(\frac{\Gamma v_g \alpha_p N_p}{\tau_{\Delta N}} + \frac{\Gamma R_{sp}}{N_p \tau_{\Delta N}} \right) \left(1 - \frac{\tau_{\Delta N}}{\tau_{\Delta N}'} \right) + \frac{1}{\tau_{\Delta N} \tau_p} \quad (5-39)$$

$$\gamma = N_p v_g \alpha \left(1 + \frac{\Gamma \alpha_p}{\alpha} \right) + \frac{1}{\tau_{\Delta N}} + \frac{\Gamma R_{sp}'}{N_p} \quad (5-40)$$

若注入电流远大于阈值电流，松弛振荡频率 ω_R 可以进一步简化，此时上式右端第一项远远大于其它项，对 ω_R 起着主要作用。可简化如下式。

$$\omega_R^2 \approx \frac{v_g \alpha N_p}{\tau_p} \quad (5-41)$$

$$\frac{N_{p1}}{I} = \frac{\eta_i}{qV} \Gamma \tau_p H(\omega) \quad (5-42)$$

又由文献^[7]可知: $\Gamma = \Gamma_i \Gamma_z$ $P = \eta_0 h r \frac{N_p V_p}{\tau_p}$ $(5-43)$

$$P = \eta_i \eta_0 \frac{hr}{q} H(\omega) * I \quad (5-44)$$

上式, hv 表示光子能量, 即 L-I 曲线可通过小信号幅频响应曲线 $H(w)$ 获得。由于时间紧迫, 接下来未深入展开研究, 但从函数模型形式上来说是相当简单的。

7 问题三（带宽模型）

7.1 问题描述与分析

本题要求建立恰当的激光器小信号幅频相应参数模型,给出参数构成及其确定方法,画出不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线(即 S21 曲线),其中一条必须是 20℃下 7.5mA 偏置电流的仿真输出曲线。本题给出了一组激光器小信号幅频响应曲线数据和相应的驱动电流、输出光功率数据,将数据载入 MATLAB 将获得 4 个变量: $I_b=7.5$, 表示偏置电流为 7.5mA; $T_a=20$ 表示测试的环境温度是 20℃; f 表示 S21 曲线的频率, 单位为 Hz; $S21$ 表示 S21 曲线的幅度, 单位为 dB, 本题将其转化为百分比归一化后的值, 更加直观。

目前首先需要解决的问题是建立合适的 VCSEL 的小信号响应数学表达式,并通过给定的某些参数的初始值确定最优解,使得在相同的温度 T_0 和偏置电流 I 的影响下,按照该表达式模拟的响应值与实测值输出一致,从而模拟出其它温度和不同偏置电流下的响应,绘制带宽响应曲线(即 S21 曲线)。

根据附录二, 我们得出归一化处理后的 VCSEL 的小信号响应函数:

$$H(f) = \frac{h(f)}{h(0)} = \frac{Z}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \quad (6-1)$$

其中, Y 、 Z 分别为:

$$Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 P_s}{k + \varepsilon P_s} - \frac{G_0 (N_s - N_0)}{(1 + \varepsilon P_s / k)^2} \quad (6-2)$$

$$Z = \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 P_s}{\tau_p (k + \varepsilon P_s)} - \frac{(1 - \beta) G_0 (N_s - N_0)}{\tau_n (1 + \varepsilon P_s / k)^2} \quad (6-3)$$

已知某些参数的初始值为:

表 6.1 小信号模型初值设置的参考值

参数	参考初值	单位
η_i	0.7	-
β	1E-5	-
τ_n	9.6E-9	s
k	1.5E-8	W
G_0	1.8E6	s^{-1}
N_0	4.97E5	-
τ_p	3.8E-12	s
ε	4.7E-8	-

由上式可知，大部分的模型参数初始值已知，只要得到 P_s 即可求出 Y 、 Z ，VCSEL 中 P_s 与光子数 (S_s) 正比，比例因子为 k ，即： $P_s = kS_s$ 。

根据载流子浓度 N_s 可以得到激光器稳态下理论的光子数 S_s ：

$$S_s = \frac{\eta_i (I - I_{th0} - I_{off}(T)) / q - N_s / \tau_n}{G_0 (N_s - N_0)} \quad (6-4)$$

式中， $(I - I_{th0} - I_{off}(T))$ 可通过问题一获得，除载流子浓度 N_s 未知外，其它参数均给出已知值， N_s 的计算式如下：

$$N_s = \frac{P_0 / (k\tau_p) + G_0 N_0 P_0 / (k + \varepsilon P_0)}{\beta / \tau_n + G_0 P_0 / (k + \varepsilon P_0)} \quad (6-5)$$

式中， P_0 可根据问题得到数据，其它参数均给出初始值。

综上所述，我们可以得出小信号相应函数 $H(f)$ 与 f 的表达式，将其展开并结算：

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{Z}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \\ &= \frac{Z}{-4\pi^2 f^2 + Z + 2\pi fY \cdot j} \\ &= \frac{Z(-4\pi^2 f^2 + Z + 2\pi fY \cdot j)}{(-4\pi^2 f^2 + Z + 2\pi fY \cdot j)(-4\pi^2 f^2 + Z + 2\pi fY \cdot j)} \quad (6-6) \\ &= \frac{Z^2 - 4\pi^2 f^2 Z - 2\pi f \cdot Y \cdot Z \cdot j}{(Z - 4\pi^2 f^2)^2 + 4\pi^2 f^2 Y^2} \\ &= \frac{Z^2 - 4\pi^2 f^2 Z}{(Z - 4\pi^2 f^2)^2 + 4\pi^2 f^2 Y^2} - j \cdot \frac{2\pi f \cdot Y \cdot Z}{(Z - 4\pi^2 f^2)^2 + 4\pi^2 f^2 Y^2} \end{aligned}$$

根据以上公式，可以的得到 $H(f)$ ，再求出 $H(f)$ 的模，从而模拟出函数的响应值。

7.2 模型参数求解与分析

这里，我们引进 3 个误差约束判断所求出的模型参数的最优解满足该模型的要求。即：(1) 理论上的驱动电流 I_{cur} 与实测驱动电流值相减可以得到第一个误差约束关系；(2) 用计算出的载流子浓度 N_s 求出理论上的激光器出光功率，将理论出光功率与实测激光器光功率 P_0 相减得到第二个误差约束；(3) 第三个误差约束根据理论计算出的小信号响应与测试的小信号响应给出，判断该小信号模型参数的准确性。

通过 MATLAB 迭代, 可以求出小信号模型参数的最优解, 如下表所示:

表 6.2 模型参数对比

参数	参考初值	最优值	单位
η_i	0.7	0.7	-
β	1E-5	2E-6	-
τ_n	9.6E-9	2.03E-24	s
k	1.5E-8	1.17E-8	W
G_0	1.8E6	0.92E6	
N_0	4.97E5	2.6E5	-
τ_p	3.8E-12	2.08E-12	s
ε	4.7E-8	-3.87E-8	-

通过新的模型参数以及 $H(f)$ 的响应函数, 可以模拟出偏置电流 $I_b=7.5\text{mA}$, 环境温度为 20°C 不同频率对应的幅度, 从而绘制 $S21$ 曲线, 如图 6.1 所示:

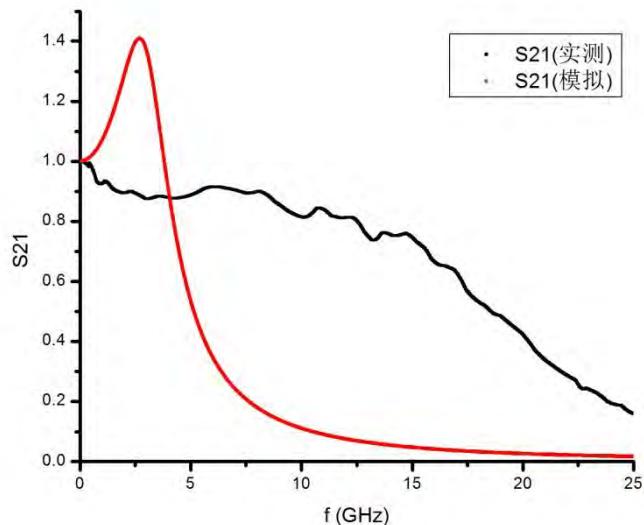


图 6.1 $I_b=7.5\text{mA}, T=20^\circ\text{C}$ 时 $S21$ 曲线图

附录给出的 $S21$ 曲线纵坐标表示幅度, 单位为 dB , 由于实际的信号和系统都不可能是在全部频率上都有非 0 值的, 将其具有非零值或集中了主要能量的频率范围称为信号的带宽, 对系统, 将其使输出信号的幅度下降到最大值的倍数不小于某一数值 (比如 70.7%, 称为 -3dB 带宽, 31.6%, 称为 -10db 带宽) 范围称为系统的带宽。所以为了方便分析, 我们将模拟出的 $S21$ 幅度值进行百分比归一化处理。通过该条件下实测的 $S21$ 线的幅度值和模拟值对比, 我们可以看出: 根

据实测数据绘制的 S21 曲线效果并不理想，其出现了峰值，并且大于 1，这显然与实际是不相符的，通过模拟的数据绘制的 S21 曲线图要优于实测图，其带宽曲线随着频率的增高而呈降低的趋势。

7.3 小信号幅频响应参数模型简化

根据模拟迭代出的模型参数的最优解，我们可以发现部分参数的值对于初始值变化不大，并且改变之后对函数的响应值影响几乎可以忽略不计，由于带宽模型的函数较为复杂，涉及的模型参数值较多，为了简化模型，我们从各公式数量级的角度分析 Y 和 Z 的简化形式。

对于 N_s ，我们先看分子项，分子第一项 P_0 、 k 和 τ_p 数量级分别对应 10^{-3} 、 10^{-8} 和 10^{-12} ，总体数量级为 10^{17} ；分子第二项中，对于 $k + \varepsilon P_s$ ， k 、 ε 和 P_s 的数量级分别为 10^{-8} 、 10^{-8} 和 10^{-3} 。我们规定当数量级大于 3 时，两项相加可以忽略数量级低的一项，所以可以简化为 k 。对于分母式，第一项对应数量级为 E4，第二项对于数量级为 E11，所以忽略前一项，总体上 N_s 可以简化为：

$$N_s = \frac{P_0 / \tau_p + G_0 N_0 P_0}{G_0 P_0} \quad (6-7)$$

同理，我们可以将 S_s 简化：

$$S_s = \frac{\eta_i (I - I_{th0} - I_{off}(T)) / q}{G_0 (N_s - N_0)} \quad (6-8)$$

基于此，进而将 Y、Z 简化为下式：

$$Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{G_0 p_s}{k} - G_0 (N_s - N_0) \quad (6-9)$$

$$Z = \frac{G_0 p_s}{\tau_p k} \quad (6-10)$$

此时，带宽模型的参数简化为 τ_p 、 k 、 G_0 和 N_0 ，模型参数的减少将会极大地增加算法的运行效率，同时还能提高带宽模型的精度。通过新的模型参数，并赋予给定的初始值，经程序拟合迭代后的最优解见表 6.3，该简化后的模型参数满足上文的 3 个约束条件。

表 6.3 简化模型参数对比

参数	参考初值	最优值	单位
τ_n	9.6E-9	1.66E-12	s
k	1.5E-8	3.07E-8	W
G_0	1.8E6	3.4E7	
N_0	4.97E5	3.62E5	-

该简化后的模型参数满足上文的 3 个约束条件。

(1) 通过简化后的模型参数, 可以绘制不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线。本题以 $T=10^{\circ}\text{C}$ 、 20°C 、 30°C 、...、 90°C 测试温度下偏置电流为 2.5mA、5mA、7.5mA、10mA 和 12.5mA 下的带宽响应曲线, 由于温度和电流均近似等间隔选取, 绘制的曲线较为全面。如图所示:

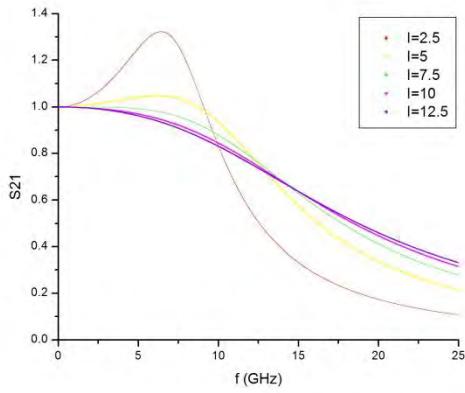


图 6.2 $T=10^{\circ}\text{C}$ 时 $S21$ 曲线

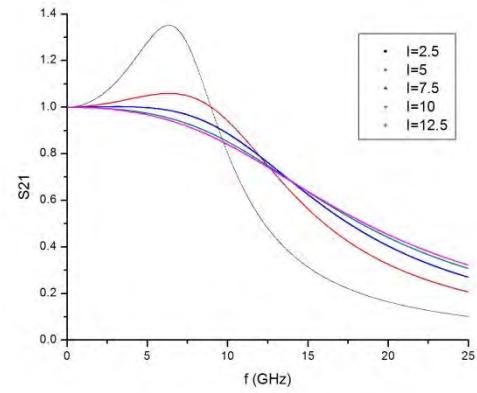


图 6.3 $T=20^{\circ}\text{C}$ 时 $S21$ 曲线

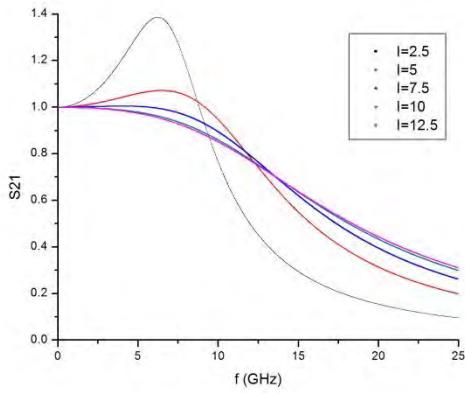


图 6.4 $T=30^{\circ}\text{C}$ 时 $S21$ 曲线

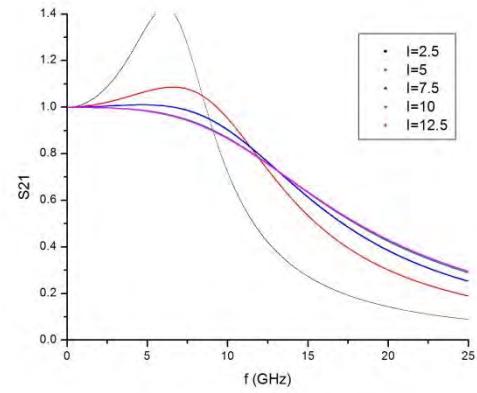


图 6.5 $T=40^{\circ}\text{C}$ 时 $S21$ 曲线

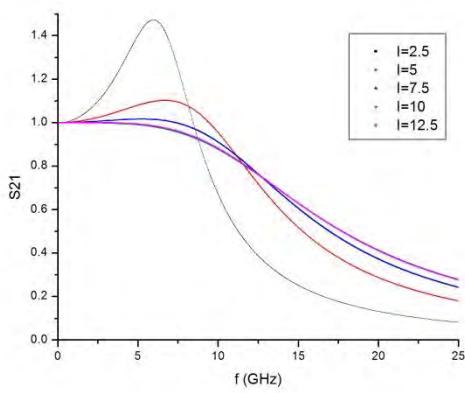


图 6.6 $T=50^{\circ}\text{C}$ 时 S21 曲线

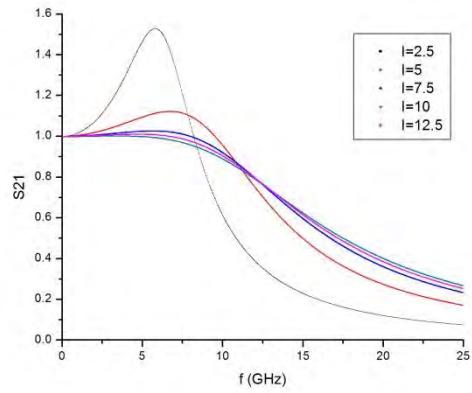


图 6.7 $T=60^{\circ}\text{C}$ 时 S21 曲线

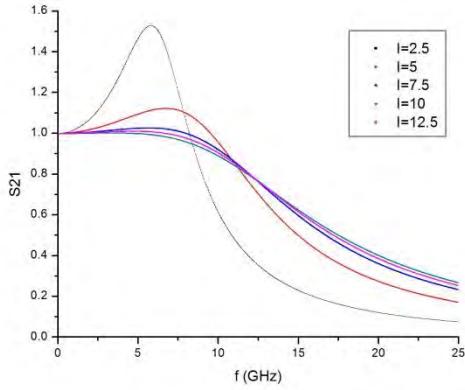


图 6.8 $T=70^{\circ}\text{C}$ 时 S21 曲线

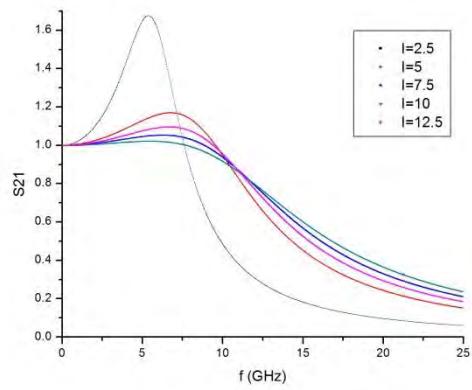


图 6.9 $T=80^{\circ}\text{C}$ 时 S21 曲线

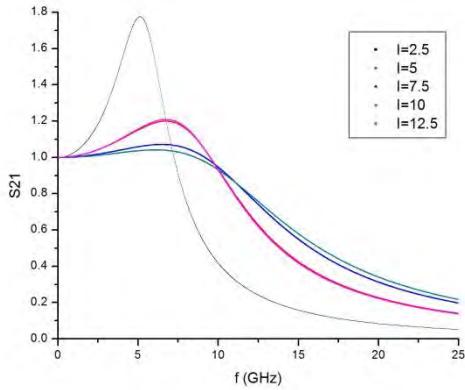


图 6.10 $T=90^{\circ}\text{C}$ 时 S21 曲线

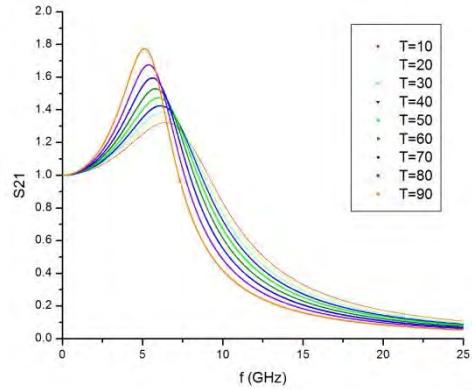


图 6.11 $I=2.5\text{mA}$ 时 S21 曲线

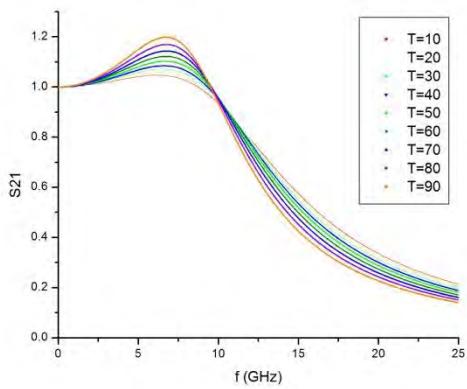


图 6.12 $I=5\text{mA}$ 时 $S21$ 曲线

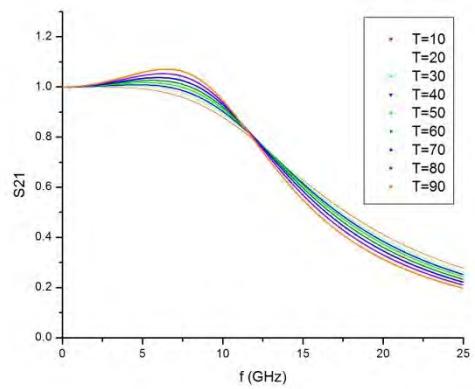


图 6.13 $I=7.5\text{mA}$ 时 $S21$ 曲线

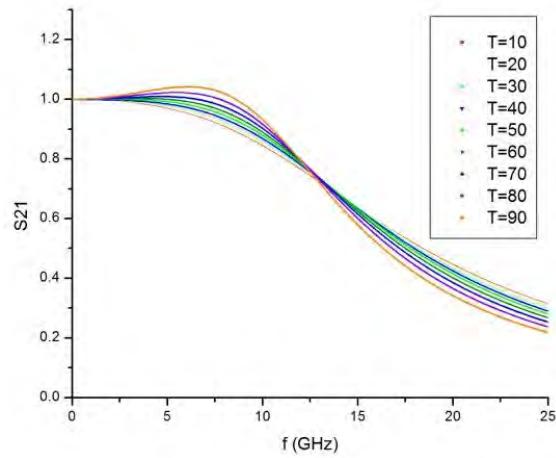


图 6.14 $I=10\text{mA}$ 时 $S21$ 曲线

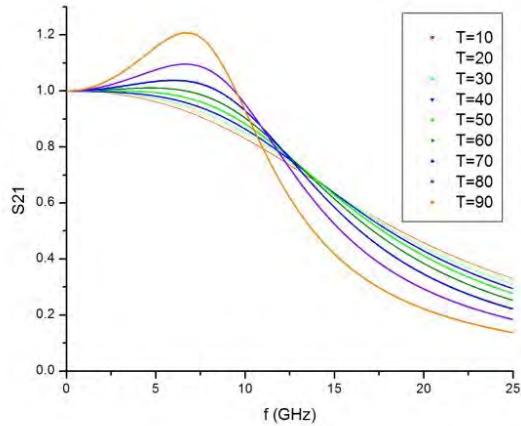


图 6.15 $I=12.5\text{mA}$ 时 $S21$ 曲线

(2) 通过以上图示以及相应模拟出的数据, 我们可以看出, 以 $T=20^{\circ}\text{C}$ 为例, 图 6.3 展示了其不同偏置电流下的 S_{21} 曲线, 可以看出在激光器的温度一定的情况下, S_{21} 曲线随着偏置电流 I 的增加而逐渐平坦, 在 $I=2.5\text{mA}$ 时曲线出现了一个较大的峰值, 高于 0 频的范围较多, 带宽也较低; 以偏置电流 $I=7.5\text{mA}$ 为例, 图 6.13 展示其在不同温度下的 S_{21} 曲线, 从图中我们可以看出, 不同温度下的 S_{21} 曲线大致走势接近, 随着 T 的增大, S_{21} 曲线逐渐变陡, 并在 $f=12\text{GHz}$ 附近有交点。

(3) 根据要求, 我们假定 $T=20^{\circ}\text{C}$ 、 $I=7.5\text{mA}$ 均已固定, 相应获得更宽带宽的激光器设计方案。要想获得更宽的带宽, 即激光器的 S_{21} 曲线在 31.6%~70.7% 部分 (即带宽为 $-3\text{dB} \sim -10\text{dB}$) 的范围尽可能大。本文改变激光器的小信号模型参数的方法探究其带宽更宽的情况。实验我们得出 k 参数不变, 则通过改变其它 3 个参数的值 (以自身值上下 20% 大小波动), 重新模拟出 S_{21} 曲线, 如下图所示:

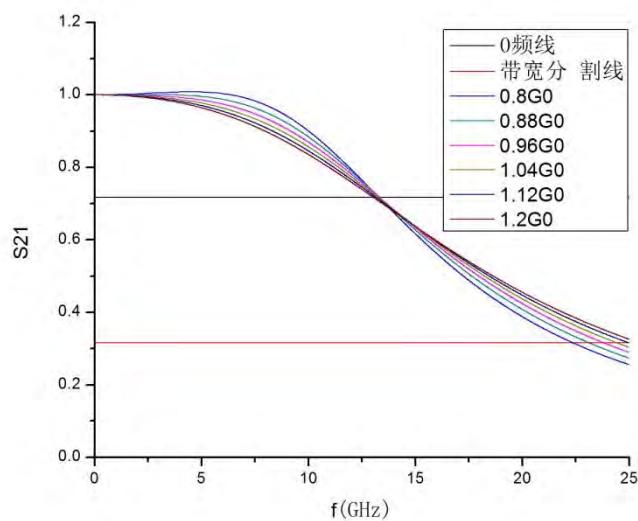


图 6.16 G0 波动 S_{21} 曲线

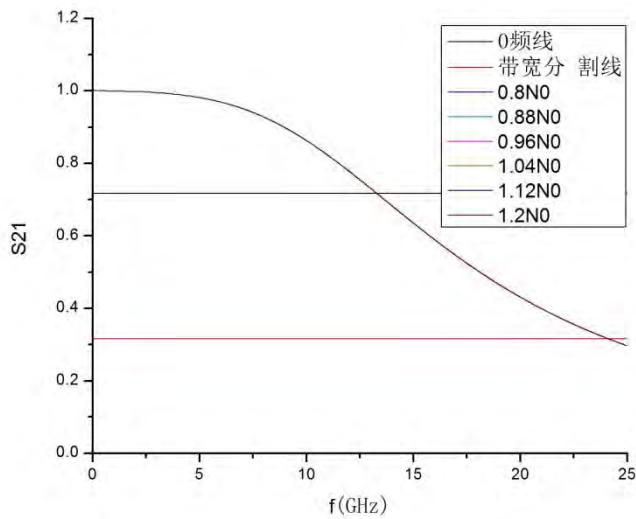


图 6.17 N0 波动 S21 曲线

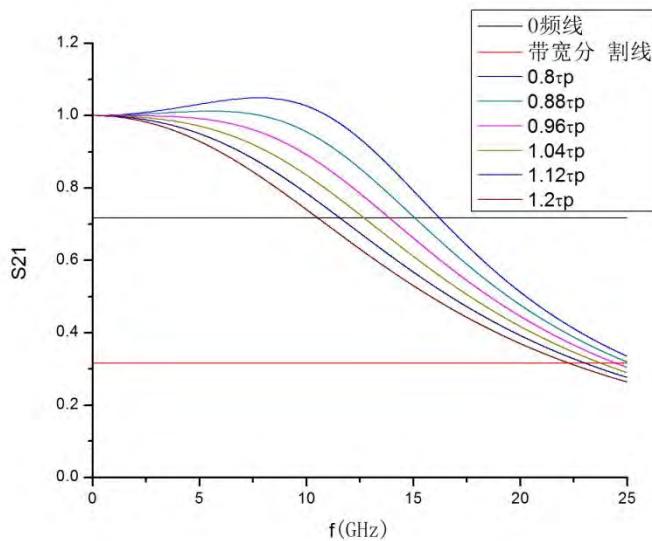


图 6.18 τ_p 波动 S21 曲线

(4) 通过上图我们可以看出，仅考虑 G_0 影响时， G_0 在自身上下 20% 波动时， S_{21} 曲线在 70.7% (即带宽为-10dB) 附近相交，且随着 G_0 的增大，曲线逐渐平缓；仅考虑 N_0 影响时，我们发现 N_0 的改变对 S_{21} 曲线影响较小，带宽宽度基本保持不变；仅考虑 τ_p 影响时，可以发现 τ_p 小范围变化时， S_{21} 曲线波动较大，随着 τ_p 的增加， S_{21} 曲线逐渐平坦，且根据实验可得，当 τ_p 变化 1

个数量级以上时，无法模拟出 S_{21} 曲线，也间接说明了该值对 S_{21} 曲线的影响较大。

在实际应用中，我们希望 S_{21} 曲线在 31.6%~70.7% 范围（即 -3~-10dB）的带宽越宽越好，也就是希望这部分曲线越平坦越好。根据以上实验模拟的结果可以看出，不同温度不同电流对 S_{21} 的曲线——带宽宽度影响还是较大的，由图所示，在 $I=7.5$ 、 10mA 附近时，各温度下的 S_{21} 曲线该部分较为平坦，即带宽更宽；在固定 T 不变时， S_{21} 曲线随着工作电流的影响变化较大，这也可以说， S_{21} 曲线受电流的影响更大一些，由于本实验时间有限，后期可以通过实验进行更深入的调研与研究。

8 问题四（带宽模型的改进）

在问题 3 的基础上，寻找更好的带宽模型建模方式，使得模型运算更快，在相同的温度和偏置电流下，可以获得更宽的 3dB（或 10dB）带宽。本节我们在查阅相关文献^[8]的基础上，将从速率方程出发，研究新的带宽模型建模方式。假设载流子浓度和光子浓度变化量较小情况下，将电流 I、载流子浓度 N、光子浓度 N_p 以及增益 g 作为变量分别对时间 t 求微分，可得：

$$d\left[\frac{dN}{dt}\right] = \frac{\eta_i}{qV} dI - \frac{1}{\tau_{\Delta N}} dN - v_g dN_p - N_p v_g dg \quad (7-1)$$

$$d\left[\frac{dN_p}{dt}\right] = \left[\Gamma v_g - \frac{1}{\tau_p}\right] dN_p + N_p \Gamma v_g + \frac{\Gamma}{\tau_{\Delta N}'} dN \quad (7-2)$$

其中，辐射进入激光基模的载流子寿命 $\tau_{\Delta N}$ 和 $\tau_{\Delta N}'$ 为：

$$\frac{1}{\tau_{\Delta N}} = \frac{dR_{sp}}{dN} = 2\beta_{sp}BN + \frac{dR_{sp}}{dN}BN^2 \quad (7-3)$$

$$\frac{1}{\tau_{\Delta N}'} = \frac{dR_{sp}}{dN} = 2\beta BN + \frac{dR_{sp}}{dN}BN^2 \quad (7-4)$$

其中， $\tau_{\Delta N}'$ 由于较小，为简化模型可以忽略不计。增益 g 是关于 N 和 N_p 的函数，对其求导得：

$$dg = \alpha dN - \alpha_p dN_p \quad (7-5)$$

$$\alpha = \frac{\partial g}{\partial N} = \frac{g_0}{(N+N_s)(1+\varepsilon N_p)} \quad (7-6)$$

$$\alpha_p = -\frac{\partial g}{\partial N_p} = \frac{\varepsilon g}{1+\varepsilon N_p} \quad (7-7)$$

由于 g_0 、 N_s 和 ε 均为常量，将上式整理变形可得：

$$d\left[\frac{dN}{dt}\right] = \frac{\eta_i}{qV} dI - \left(\frac{1}{\tau_{\Delta N}} + N_p v_g \alpha\right) dN - (v_g g - N_p v_g \alpha_p) dN_p \quad (7-8)$$

$$d\left[\frac{dN_p}{dt}\right] = \left(\frac{\Gamma}{\tau_p} + N_p \Gamma v_g \alpha\right) dN - \left(\frac{1}{\tau_p} - \Gamma v_g g + N_p \Gamma v_g \alpha\right) dN_p \quad (7-9)$$

$$\frac{1}{\tau_p} - \Gamma v_g = \frac{\Gamma R_{sp}}{N_p} \quad (7-10)$$

可将其写成矩阵的形式，

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} dN \\ dN_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Upsilon_{NN} & -\Upsilon_{NP} \\ \Upsilon_{PN} & -\Upsilon_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dN \\ dN_p \end{bmatrix} + \frac{\eta_i}{qV} \begin{bmatrix} dI \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7-11)$$

$$\Upsilon_{NN} = \frac{\Gamma}{\tau_{\Delta N}} + v_g \alpha N_p \quad (7-12)$$

$$\Upsilon_{PN} = v_g g - v_g \alpha_p N_p = \frac{1}{\Gamma \tau_p} - \frac{R_{sp}}{N_p} - v_g \alpha_p N_p \quad (7-13)$$

$$\Upsilon_{PP} = \frac{\Gamma}{\tau_p} + \Gamma v_g \alpha N_p \quad (7-14)$$

$$\Upsilon_{PP} = \frac{1}{\tau_p} - \Gamma v_g g + \Gamma v_g \alpha_p N_p = \frac{\Gamma R_{sp}}{N_p} + \Gamma v_g \alpha_p N_p \quad (7-15)$$

当电流 I 远大于阈值电流 I_{th} 且光子浓度 N_p 足够大时, 对上式进行优化, 可得:

$$\Upsilon_{NN} = \frac{\Gamma}{\tau_{\Delta N}} + v_g \alpha N_p \quad (7-16)$$

$$\Upsilon_{PN} = \frac{1}{\Gamma \tau_p} - v_g \alpha_p N_p \quad (7-17)$$

$$\Upsilon_{PN} = \Gamma v_g \alpha_p N_p \quad (7-18)$$

$$\Upsilon_{PP} = \Gamma v_g \alpha_p N_p \quad (7-19)$$

假设调制电流为正余弦形式, dI , dN 以及 dN_p 可分别表示为:

$$dI(t) = I_1 e^{j\omega t} \quad (7-20)$$

$$dN(t) = N_1 e^{j\omega t} \quad (7-21)$$

$$dN_p(t) = N_{p1} e^{j\omega t} \quad (7-22)$$

其中, I_1 、 N_1 以及 N_{p1} 分别为调制电流的振幅、载流子浓度幅值以及光子浓度幅值。

带入整理可得关于 N_1 和 N_{p1} 的矩阵形式,

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{NN} + j\omega & \Upsilon_{NP} \\ -\Upsilon_{PN} & \Upsilon_{PP} + j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_{p1} \end{bmatrix} = \frac{\eta_i I_1}{qV} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7-23)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Upsilon_{NN} + j\omega & \Upsilon_{NP} \\ -\Upsilon_{PN} & \Upsilon_{PP} + j\omega \end{vmatrix} = \Upsilon_{NP} \Upsilon_{PN} + \Upsilon_{NN} \Upsilon_{PP} - \omega^2 + j\omega(\Upsilon_{NN} + \Upsilon_{PP}) \quad (7-24)$$

将其求解可得,

$$N_1 = \frac{\eta_i I}{qV} \cdot \frac{\Upsilon_{PP} + j\omega}{\omega_R^2} \cdot H(\omega) \quad (7-25)$$

$$N_{p1} = \frac{\eta_i I}{qV} \cdot \frac{\Upsilon_{PN}}{\omega_R^2} \cdot H(\omega) \quad (7-26)$$

$$H(\omega) = \frac{\omega^2}{\Delta} = \frac{\omega_R^2}{\omega_R^2 - \omega^2 + j\omega\gamma} \quad (7-27)$$

$$\omega_R^2 = \Upsilon_{NP} \Upsilon_{PN} + \Upsilon_{NN} \Upsilon_{PP} \quad (7-28)$$

$$\gamma = \Upsilon_{NN} + \Upsilon_{PP} \quad (7-29)$$

其中, $H(\omega)$ 为关于参变量 ω_R 和 γ 的小信号幅频响应函数, ω_R 代表的是松弛振荡角频率, γ 为阻尼因子。将以上公式进一步整理,

$$\omega_R^2 = \frac{N_p v_g \alpha_p}{\tau_p} + \left(\frac{\Gamma v_g \alpha_p N_p}{\tau_{\Delta N}} - \frac{\Gamma v_g g}{\tau_{\Delta N}} \right) \left(1 - \frac{\tau_{\Delta N}}{\tau_{\Delta N}'} \right) + \frac{1}{\tau_{\Delta N} \tau_p} \quad (7-30)$$

$$\gamma = \left(\frac{1}{\tau_{\Delta N}} + N_p v_g \alpha \right) + \left(\frac{1}{\tau_p} + \Gamma v_g \alpha_p N_p \right) - v_g g \quad (7-31)$$

从上式均是有物理意义的, 左端第一个括号项表示由于载流子浓度的变化而引起的损耗, 第二个括号表示由于光子浓度的变化引起的损耗, 最后一项为光子浓度的增加项。通过消去增益, 上式可变为:

$$\omega_R^2 = \frac{N_p v_g \alpha}{\tau_p} + \left(\frac{\Gamma v_g \alpha_p N_p}{\tau_{\Delta N}} + \frac{\Gamma R_{sp}}{N_p \tau_{\Delta N}} \right) \left(1 - \frac{\tau_{\Delta N}}{\tau_{\Delta N}'} \right) + \frac{1}{\tau_{\Delta N} \tau_p} \quad (7-32)$$

$$\gamma = N_p v_g \alpha \left(1 + \frac{\Gamma \alpha_p}{\alpha} \right) + \frac{1}{\tau_{\Delta N}} + \frac{\Gamma R_{sp'}}{N_p} \quad (7-33)$$

若注入电流远大于阈值电流, 松弛振荡频率 ω_R 可以进一步简化, 此时上式右端第一项远远大于其它项, 对 ω_R 起着主要作用。可简化如下式。

$$\omega_R^2 \approx \frac{v_g \alpha N_p}{\tau_p} \quad (7-34)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= K f_R^2 + \gamma_0 \\ f_R &= \frac{\omega_R}{2\pi} \end{aligned} \quad (7-35)$$

其中, K 因子和阻尼补偿因子 γ_0 分别为:

$$K = 4\pi^2 \left(1 + \Gamma \frac{\alpha_p}{\alpha} \right) \quad (7-36)$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{\tau_{\Delta N}} + \Gamma \frac{R_{sp'}}{N_p} \quad (7-37)$$

进而求得:

$$f_R = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{v_g \alpha N_p}{\tau_p}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\eta_i v_g \alpha}{q V_p}} \cdot \sqrt{I - I_{th}} = D \sqrt{I - I_{th}} \quad (7-38)$$

其中, D 因子表征着松弛振荡频率 f_R 随注入电流 I 的变化快慢, 即曲线的斜率。 D 因子不是一个常量, 它依赖于微分增益 α 。所以, 随着 N 和 N_p 的增大, 微分增益 α 减小, 即 D 因子减小, 进而是 f_R 随 I 变化程度变缓。

使用 M 因子, 我们将 VCSEL 的调制带宽-3dB 带宽表示为类似的形式, 即:

$$f_{-3dB} = M \sqrt{I - I_{th}} \quad (7-39)$$

根据相关资料^{【5】}调研, 若再考虑到电学寄生效应的影响, 为了方便研究, 通常将电学寄生效应等效为一阶低通滤波器, 则小信号幅频响应函数表达式可进一步的完善, 即:

$$H(f) = \text{const} \cdot \frac{f_R^2}{f_R^2 - f + j \cdot f \cdot \frac{\gamma}{2\pi}} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{f}{f_p}} \quad (7-40)$$

该函数包含了寄生截止频率 f_p 、阻尼因子 γ 以及松弛响应频率 f_R 这三个参数因子, 这三个参数因子影响着 VCSEL 的调制特性。通过增大 f_R 和 f_p , 减小 γ 可以使 VCSEL 的带宽变大。但同时从公式可知, f_R 的增大和 γ 的减小相矛盾, 因而 f_R 并不是越大越好, 而是要采取一种折中的方法, 使调制带宽尽可能的大。

9 模型评价

9.1 模型的优点

问题一，对多参数模型进行了很好的非线性迭代拟合拟合，拟合优化度 $R^2=0.994$ ，能够精确地描述模型。

问题二，基于文献调研，分析了问题一中模型缺陷，合理提出与温度相关的参数 $\eta(T)$ 和 R_{th} 来改进模型，发现新模型新模型在最大工作温度及最小的初始工作电流都有很大改进，使模型与实际更贴近。另外，基于速率方程的推导，得出 LI 曲线跟带宽函数 $H(f)$ 的显性函数关系，新模型具有更加简单，误差更小的特点，直接证明了 LI 曲线跟带宽函数 $H(f)$ 的关系。

问题三，通过合理假设，数学优化，相应的各关系式都有很大精简，将 8 参数拟合变为 4 参数拟合，大大提高了模型运算速度以及参数拟合的精度。

问题四，新模型从形式上来说，本模型具有直观简洁性，相比如附录推导模型更具有物理意义；而且考虑比附录模型更多因素（例如电学寄生效应等），使得模型更加符合实际；在公式组成和最终形式上，也更加简单，模型运算速度更快。

9.2 模型的缺点

问题一，没有求 U 与 I 的显性函数关系，可以通过多项式拟合出来，这样以后，可以画出模型曲线 16mA 以后的值，相应在某温度下可以知道激光器的极限工作电流，即电流超过这个值，输出功率为零。

问题二，基于速率方程模型的新模型，由于时间问题，没有来得及讨论。

问题三，忽略了参数都与初始值相差较大的情况。

问题四，没有定量去分析新模型的带宽和响应速度。

参考文献

- [1] 姜启源, 谢金星.数学建模案例选集, 北京: 高等教育出版社, 2006
- [2] 姜启源, 谢金星, 叶俊.数学模型 (第 4 版), 北京: 高等教育出版社, 2011
- [3] 王倩.垂直腔面发射激光器热效应与光电特性的研究[D].北京: 北京邮电大学, 2008
- [4] 杨浩.垂直腔面发射激光器模式模型的建立[D].北京: 北京工业大学, 2008
- [5] A simple rate-equation-based thermal VCSEL model[J].P. V. Mena, J. J. Morikuni, S.-M. Kang, Journal of lightwave technology.1999
- [6] 毛周.1.55m VCSEL 高频响应特性的优化研究[D].西安: 西安电子科技大学, 2013
- [7] Temperature dependent polarization switch of 850-nm VCSELs with different apertures[J]. Qiang Wang,Baolu Guan,Ke Liu,Xin Liu,Xiaowei Jiang,Yunhua Ma,Shamsul Arafat,Guangdi Shen. Optics and Laser Technology.2014
- [8] Emerging applications for vertical cavity surface emitting lasers[J].J S Harris,T O'sullivan,T Sarmiento,M M Lee,SVo. Semiconductor Science and Technology . 2011
- [9] W. Wang,Y. Ning,J. Zhang,L. Qin,Y. Zeng,Y. Liu,C. Tong,L. Wang.Power and spectra polarization of large-aperture rectangular-shaped vertical-cavity top-emitting lasers[J].Laser Physics.2012
- [10] Tunable Diode Laser Absorption Spectroscopy- Based Detection of Propane for Explosion Early Warning by Using a Vertical Cavity Surface Enhanced Laser Source and Principle Component Analysis Approach[J].IEEE Sensors Journal. 2017
- [11] CH Uy, D Rontani, M Sciamanna.Vectorial extreme events in VCSEL polarization dynamics[J].Optics Letters, 2017

附录： MATLAB 部分代码

1. 最小二乘法迭代模型参数

```
%%%%%%函数%%%%%
function p=fun(a,x)
% 初始函数
p=a(6)*(x(:,2)-a(7)-(a(1)+a(2)*(293+(x(:,2).*x(:,3)-x(:,1))*a(8))+a(3)*(293+(x(:,2).*x(:,3)-x(:,1))*a(8)).^2+a(4)*(293+(x(:,2).*x(:,3)-x(:,1))*a(8)).^3+a(5)*(293+(x(:,2).*x(:,3)-x(:,1))*a(8)).^4));
%%%%%
clear;
l1=load('D:\2017\B\L-I-20C.mat');
Rth=2600+273;
l1.I=l1.I*(1E-3);
l1.P=l1.P*(1E-3);
S=l1.I.*l1.U;
P=l1.P;
I=l1.I;
U=l1.U;
%%%%%U 和 I 的多项式拟合%%%%%
C=polyfit(I,U,3);
TP=zeros(1401,3);
TP(:,1)=P;
TP(:,2)=I;
TP(:,3)=U;
bate=[1.246E-3,-2.545E-5,2.908E-7,-2.531E-10,1.022E-12,0.5,0.3E-3,Rth,];
yyy=zeros(size(TP,1),1);
[beat0,k]=nlinfit(TP,P,@fun,bate);

%%%%%解 p%%%%%
a=beta0;
PP=zeros(1401,1);
for i=1:1401
    T0=273+35;
    T=T0+(I(i)*U(i)-P(i))*a(8);
    PP(i)=a(6)*(I(i)-a(7)-(a(1)+a(2)*T+a(3)*(T^2)+a(4)*(T^3)+a(5)*(T^4)));
end
I=I*1000;
PP=PP*1000;
for k=1:1401
    if PP(k)>100||PP(k)<-100
        PP(k)=0;
    end
end
```

```

for p=1:1401
    if PP(p)<0
        PP(p)=0;
    end
end
figure(1);
plot(I,PP);
axis([0 16 0 3.5]);
P=P*1000;
Pm=mean(P);
sum1=0;
sum2=0;
for i=1:1401
    sum1=sum1+(P(i)-PP(i))*(P(i)-PP(i));
    sum2=sum2+(P(i)-Pm)*(P(i)-Pm);
end
R2=1-sum1/sum2;

```

2. 8 参数模型的初值参数对 HF 的求解拟合曲线

```

l1=load('C:\Users\Elam\Desktop\fffffff\temp\Bbbb\L-I-20C.mat');
Rth=2600+273;
l1.I=l1.I*(1E-3);
l1.P=l1.P*(1E-3);
S=l1.I.*l1.U;
P=l1.P;
I=l1.I;
U=l1.U;
%%%%%%%
C=polyfit(I,U,3);
TP=zeros(1401,3);
TP(:,1)=P;
TP(:,2)=I;
TP(:,3)=U;
Rth=2.6E3+273;
bate=[1.246E-3,-2.545E-5,2.908E-7,-2.531E-10,1.022E-12,0.5,0.3E-3,Rth];
% [A,B,C]=lsqcurvefit(@fun,bate,TP,P);
yyy=zeros(size(TP,1),1);
[g,k]=nlinfit(TP,P,@fun,bate);
T0=273+20;
qc=1.6E-19;
zz=zeros(1401,1);
pp=zeros(1401,1);
xx=zeros(1401,3);
xx(:,1)=I;

```

```

xx(:,2)=U;
xx(:,3)=P;
x=zeros(1,2);
x(1)=7.5;
Itur=x(1)/1000;
for i=1:1401
if xx(i,1)==(x(1)/1000)
    x(2)=xx(i,2);
    t=i;
end
end
%%%%,ù³/ÝtÈ¥1ÖDÖp0μÄÖμ
p0=2.17043550958961*0.001;
XIN(:,1);
l3=load('C:\Users\Elam\Desktop\HF-F.mat');
%%%%%%%%%%%%%Ãé±í,ñÉçμãÍ¼%%%%%%%%%%%
plot(l3.ffff(:,1),l3.ffff(:,2));
axis([0 3e11 0 1.3])
hold on;
f=l3.ffff(:,1);
a=[0.7,1E-5,9.6E-9,1.5E-8,1.8E6,4.97E5,3.8E-12,4.7E-8];
temp=a(2);
%%%%%NS%%%%%%%%%%
NS=(p0/(a(4)*a(7))+a(5)*a(6)*p0/(a(4)+a(8)*p0))/(a(2)/a(3)+a(5)*p0/(a(4)+a(8)*p0))
;
%%%%%SS%%%%%
%I-Itho-Ioff(T)=p0/n
SS=(a(1)*p0/(g(6)*qc)-NS/a(3))/(a(5)*(NS-a(6)));
%%%%%PS%%%%%
PS=SS*a(4);
%%%%%Y%%%%%
Y=1/a(7)+1/a(3)+(a(5)*PS)/(a(4)+a(8)*PS)-(a(5)*(NS-a(6)))/((1+a(8)*PS/a(4))^2);
%%%%%Z%%%%%
Z=1/a(7)*a(3)+(a(5)*PS)/(a(7)*(a(4)+a(8)*PS))-((1-a(2))*a(5)*(NS-a(6)))/(a(3)*(((1
+a(8)*PS/a(4)))^2));
%%%%%Hf%%%%%
%%%%%j2|Df=W
HF=zeros(2500,1);
for i=1:2500
HF(i)=sqrt(((Z^2-4*(pi^2)*(f(i)^2)*Z)/(((Z-4*(pi^2)*(f(i)^2))^2)+4*(pi^2)*(f(i)^2)*(Y^2)))^2+((2*Y*Z*pi*f(i))/((Z-4*(pi^2)*(f(i)^2))^2+4*(pi^2)*(f(i)^2)*(Y^2)))^2);
end
hh=plot(f,HF);
axis([0 3e11 0 1.3])

```

hold on;

3.求4参数模型的拟合曲线并验证是否满足初始条件：

```
l1=load('C:\Users\Administrator\Desktop\fffffff\temp\Bbbb\L-I-20C.mat');
Rth=2600+273;
l1.I=l1.I*(1E-3);
l1.P=l1.P*(1E-3);
S=l1.I.*l1.U;
P=l1.P;
I=l1.I;
U=l1.U;
%%%%%%%
C=polyfit(I,U,3);
TP=zeros(1401,3);
TP(:,1)=P;
TP(:,2)=I;
TP(:,3)=U;
Rth=2.6E3+273;
bate=[1.246E-3,-2.545E-5,2.908E-7,-2.531E-10,1.022E-12,0.5,0.3E-3,Rth];
yyy=zeros(size(TP,1),1);
[gg,k]=nlinfit(TP,P,@fun,bate);
T0=273+20;
qc=1.6E-19;
zz=zeros(1401,1);
pp=zeros(1401,1);
xx=zeros(1401,3);
xx(:,1)=I;
xx(:,2)=U;
xx(:,3)=P;
x=zeros(1,2);
x(1)=7.5;
Itur=x(1)/1000;
for i=1:1401
if xx(i,1)==(x(1)/1000)
    x(2)=xx(i,2);
    t=i;
end
end
line=zeros(2500,1);
for kk=1:2500
line(kk)=0.316;
end
%%%%%,ù³¼ÝtÈ¥1ÖÐÖÙp0µÄÖµ
p0=2.17e-3;
l3=load('C:\Users\Administrator\Desktop\fffffff\temp\Bbbb\final.mat');
```

```

%%%%%%%
%>óµ ÄÉçµãÍ!4%0%0%0%0%0%0%
plot(l3.final(:,1),l3.final(:,2));
axis([0 3e11 0 1.3])
hold on;
fx=l3.final(:,1);
a=[0.7,1E-5,9.6E-9,1.5E-8,1.8E6,4.97E5,3.8E-12,4.7E-8];%%%%%låÄç,øµÄ³ðÊ
%%%%%
d=3.06515778467793E-8;
e=34398220.0231316;
f=362255.800592265;
g=1.66447230552434E-12;
n=gg(6);
ni=0.7;
%%%%%NS%%%%%
NS=((p0/(d*g)+e*f*p0/d)/((e*p0)/d));
%%%%%PS%%%%%
PS=((ni*d*p0)/(qc*n*e*((p0/(d*g)+e*f*p0/d)/((e*p0)/d))-f));
%%%%%Y%%%%%
Y=(1/g+(e*PS)/(d)-e*(NS-f));
%%%%%Z%%%%%
Z=((e*PS)/(g*d));
%%%%%HF%%%%%
HF=zeros(2500,1);
for i=1:2500
HF(i)=sqrt(((Z^2-4*(pi^2)*(fx(i)^2)*Z)/((Z-4*(pi^2)*(fx(i)^2))^2+4*(pi^2)*(fx(i)^2)*(Y^2)))^2+((2*pi*fx(i)*Y*Z)/((Z-4*(pi^2)*(fx(i)^2))^2+4*(pi^2)*(fx(i)^2)*(Y^2)))^2);
end
plot(fx,HF);
axis([0 3e11 0 1.3])
hold on;
%%%%%Tcur%%%%%
Icur=(qc/ni)*(NS/a(3)+(e*(NS-f)*p0)/(d+a(8)*p0))+x(1)/1000-p0/(n);
Ic=Icur-x(1)/1000;
%%%%%PS%%%%%
Pc=PS-p0;
plot(fx,line);
hold on;

```

4.求不同温度与不同 I 下的曲线:

```
ll=load('C:\Users\Administrator\Desktop\ffffffff\temp\Bbbb\L-I-20C.mat');
```

```

Rth=2600+273;
l1.I=l1.I*(1E-3);
l1.P=l1.P*(1E-3);
S=l1.I.*l1.U;
P=l1.P;
I=l1.I;
U=l1.U;
%%%%%%%%%%%%%UoÎµÄ¶äÍ½ÄâºÍ%%%%%%
C=polyfit(I,U,3);
TP=zeros(1401,3);
TP(:,1)=P;
TP(:,2)=I;
TP(:,3)=U;
Rth=2.6E3+273;
bate=[1.246E-3,-2.545E-5,2.908E-7,-2.531E-10,1.022E-12,0.5,0.3E-3,Rth];
yyy=zeros(size(TP,1),1);
[gg,k]=nlinfit(TP,P,@fun,bate);
T0=273+20;
qc=1.6E-19;
zz=zeros(1401,1);
pp=zeros(1401,1);
xx=zeros(1401,3);
xx(:,1)=I;
xx(:,2)=U;
xx(:,3)=P;
x=zeros(1,2);
x(1)=7.5;
Itur=x(1)/1000;
for i=1:1401
if xx(i,1)==(x(1)/1000)
    x(2)=xx(i,2);
    t=i;
end
end
%%%%%,ù³/ÝtÈ¥1ÖÐÖÒp0µÄÖµ
l3=load('C:\Users\Administrator\Desktop\fffffff\temp\Bbbb\final.mat');
p=IT;
%%%%%%%%%%%%%Ãé±í,ñ¹éÒ»»»»óµÄÉ¢µãÍ¼%%%%%%
plot(l3.final(:,1),l3.final(:,2));
axis([0 3e11 0 1.3])
hold on;
fx=l3.final(:,1);
a=[0.7,1E-5,9.6E-9,1.5E-8,1.8E6,4.97E5,3.8E-12,4.7E-8];
d=3.06515778467793E-8;

```

```

e=34398220.0231316;
f=362255.800592265;
g=1.66447230552434E-12;
n=gg(6);
ni=0.7;
ttt=zeros(2500,5) ;
for j=1:5
p0=p(9,j);
%%%%%NS%%%%%NS%%%%%
NS=((p0/(d*g)+e*f*p0/d)/((e*p0)/d));
%%%%%PS%%%%%PS%%%%%
PS=((ni*d*p0)/(qc*n*e*((p0/(d*g)+e*f*p0/d)/((e*p0)/d))-f));
%%%%%Y%%%%%Y%%%%%
Y=(1/g+(e*PS)/(d)-e*(NS-f));
%%%%%Hf%%%%%Hf%%%%%
HF=zeros(2500,1);
for i=1:2500
HF(i)=sqrt(((Z^2-4*(pi^2)*(fx(i)^2)*Z)/((Z-4*(pi^2)*(fx(i)^2))^2+4*(pi^2)*(fx(i)^2)*(Y^2)))^2+((2*pi*fx(i)*Y*Z)/((Z-4*(pi^2)*(fx(i)^2))^2+4*(pi^2)*(fx(i)^2)*(Y^2)))^2);
end
%%%%%Tcur%%%%%Tcur%%%%%
hh(j)=plot(fx,HF);
axis([0 3e11 0 1.3])
hold on;
ttt(:,j)=HF;
end

```

5.改变参数验证参数对模型的影响:

```

l1=load('C:\Users\Administrator\Desktop\fffffff\temp\Bbbb\L-I-20C.mat');
Rth=2600+273;
l1.I=l1.I*(1E-3);
l1.P=l1.P*(1E-3);
S=l1.I.*l1.U;
P=l1.P;
I=l1.I;
U=l1.U;
%%%%%U%%%%%
C=polyfit(I,U,3);
TP=zeros(1401,3);
TP(:,1)=P;
TP(:,2)=I;

```

```

TP(:,3)=U;
Rth=2.6E3+273;
bate=[1.246E-3,-2.545E-5,2.908E-7,-2.531E-10,1.022E-12,0.5,0.3E-3,Rth];
yyy=zeros(size(TP,1),1);
[gg,k]=nlinfit(TP,P,@fun,bate);

T0=273+20;
qc=1.6E-19;
zz=zeros(1401,1);
pp=zeros(1401,1);
xx=zeros(1401,3);
xx(:,1)=I;
xx(:,2)=U;
xx(:,3)=P;
x=zeros(1,2);
x(1)=7.5;
Itur=x(1)/1000;
for i=1:1401
if xx(i,1)==(x(1)/1000)
    x(2)=xx(i,2);
    t=i;
end
end
%%%%%,ù¾ÝtÈ¥1ÖÐÒÒp0µÄÖµ
p0=2.17e-3;
% XIN(:,1);
l3=load('C:\Users\Administrator\Desktop\fffffff\temp\BBBB\final.mat');
%%%%%,ù¾ÝtÈ¥1ÖÐÒÒp0µÄÖµ
plot(l3.final(:,1),l3.final(:,2));
axis([0 3e11 0 1.3])
hold on;
fx=l3.final(:,1);
a=[0.7,1E-5,9.6E-9,1.5E-8,1.8E6,4.97E5,3.8E-12,4.7E-8];
d=3.06515778467793E-8;
e=34398220.0231316;
f=362255.800592265;
g=1.66447230552434E-12;
n=gg(6);
ni=0.7;
ttt=zeros(2500,6);
temp=g;%%,Ä±äÆäÖÐÒ»,ö²ÎÊýµÄÖµ
for j=1:6
g=temp*(0.72+0.08*j);
%%%%%NS%%%%%

```

```

NS=((p0/(d*g)+e*f*p0/d)/((e*p0)/d));
%%%%%%PS%%%%%%%
PS=((ni*d*p0)/(qc*n*e*((p0/(d*g)+e*f*p0/d)/((e*p0)/d))-f));
%%%%%%Y%%%%%%%
Y=(1/g+(e*PS)/(d)-e*(NS-f));
%%%%%%Z%%%%%%%
Z=((e*PS)/(g*d));
%%%%%HF%%%%%
HF=zeros(2500,1);
for i=1:2500
HF(i)=sqrt(((Z^2-4*(pi^2)*(fx(i)^2)*Z)/((Z-4*(pi^2)*(fx(i)^2))^2+4*(pi^2)*(fx(i)^2)*(Y^2)))^2+((2*pi*fx(i)*Y*Z)/((Z-4*(pi^2)*(fx(i)^2))^2+4*(pi^2)*(fx(i)^2)*(Y^2)))^2);
end
% %%%%%%TcurÓëµ2âµçÁ÷Ö®¼äµÄÔ¼Êø
hh(j)=plot(fx,HF);
axis([0 3e11 0 1.3])
hold on;
ttt(:,j)=HF;
end

```