



参赛密码 \_\_\_\_\_

(由组委会填写)



## “华为杯”第十四届中国研究生 数学建模竞赛

学 校 防化研究院

---

参赛队号 90105001

---

队员姓名 1.李京伦  
2.陈 晔  
3.李小强

---

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)



## “华为杯”第十四届中国研究生 数学建模竞赛

题目 面向下一代光通信的 VCSEL 激光器仿真模型

### 摘 要：

垂直腔面发射激光器（VCSEL: Vertical Cavity Surface Emitting Laser）具有使用简单，功耗较低等特点，在光通信、光互联、光信息处理和光集成元件等方面有着广泛的应用前景。本文对 VCSEL 激光器的物理特性进行数学建模，详细讨论了环境温度、电流以及器件自身的物理参数对其性能产生的影响。

针对问题一，对 a) 小题，首先建立了 VCSEL 激光器的 L-I 静态特性数学模型，并设计了合理的目标函数，利用实测数据，通过优化目标函数的方法求解出了 8 个模型参数，代入计算得到的光功率值与实测光功率值符合程度好。其次，在计算不同温度下的 L-I 曲线时，本文采用了实测电压值和 V-I 关系多项式拟合两种方法确定电压，其中后者可以摆脱实测数据的限制，充分探索在更大电流下的 L-I 曲线。然后，计算输出光功率需要求解较为复杂的 4 次方程，本文通过先求解温度  $T$  的方法减小了求解难度。经计算和分析可知：20℃ 时的理论计算光功率值与实测光功率值符合程度好，说明模型正确；随着温度升高，光功率呈下降趋势，本文对此给出了定性的理论解释；激光器输出光功率随着电流增大呈现先上升后下降的情况，即激光器输出光功率随着电流的增大存在一个最大值点，该结论与文献给出的 L-I 曲线一致，也验证了模型的正确性。

对 b) 小题，通过数据分析，建立了输出光功率最大值  $P_{\max}(T_0)$  与工作环境温度  $T_0$  的线性关系模型，并通过数据拟合求得模型参数。通过功率阈值（2mW）

代入模型可求得阈值温度  $T_{th}=38.2^{\circ}\text{C}$ 。

对问题二：经分析发现，问题一中采用的 5 阶多项式 V-I 关系模型对包含实测数据的电流区间部分符合较好，但是在外推的电流区间，拟合曲线呈现快速上升趋势，不符合 V-I 的物理规律。导致在外推电流区间内的电压  $V$  计算偏差较大，使得计算得到的 L-I 曲线下降过快。本文采用了改进的 V-I 关系模型——二极管参数模型，改进模型在大于 14mA 的电流外推区间以及 0~0.4mA 的小电流区间上的电压变化趋势，都比多项式模型更加符合实测数据，这说明二极管参数模型比多项式模型更为准确。利用改进模型求得了不同温度下的 L-I 曲线，在 20°C 下的 L-I 曲线更加符合实测数据，并且与文献中给出的曲线在趋势上更为接近，说明了改进模型的正确性。

针对问题三，对 a) 小题，首先，基于速率方程建立了 VCSEL 激光器小信号幅频响应模型，并根据 VCSEL 的小信号响应模型中三个约束条件（理论上的驱动电流  $I_{cur}$  与实测驱动电流值  $I$  误差约束，理论上的激光器出光功率  $P_s$  与实测激光器光功率  $P_0$  误差约束，理论计算出的小信号响应  $H_s(f)$  与实测的小信号响应值  $H(f)$  误差约束），设计了优化的目标函数。然后，通过非线性优化确定了模型中的 8 个参数值，经验证，小信号响应与实测数据符合较好，画出了不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线。

对 b) 小题，首先，分析不同电流下的带宽响应曲线可知：随着电流的增大，带宽首先逐渐变宽，并且通带逐渐变得平坦；但当电流值增大到某一反转点后，带宽又开始逐渐变窄。然后，分析不同温度下的带宽响应曲线可知：带宽随温度的升高而减小。可以发现，带宽与电流、温度的关系，和输出光功率与电流、温度的关系是一致的。这是因为带宽响应模型就是输入不同频率小信号获得的对应频率点输出信号的幅度（功率），这也验证了该模型计算结果的正确性。

对 c) 小题，通过调整参数的取值，研究了带宽响应曲线随  $\eta_i$ 、 $G_0$  和  $\tau_p$  等参数变化的规律，发现在环境温度和偏置电流固定时，增大转换效率  $\eta_i$ 、增益系数  $G_0$ ，减小光子寿命  $\tau_p$ ，均可以获得更宽的带宽。

对 d) 小题，首先，通过调整参数的取值，发现减小转换效率  $\eta_i$ 、增益系数  $G_0$ ，减小光子寿命  $\tau_p$  都会使得激光器在 3dB 范围内的部分频率处幅度可能高于 0 频位置。然后，重点讨论了  $G_0$  和  $\tau_p$  与通带平坦性的关系，提出增加通带平坦度的参数设计方案：先增大  $G_0$  使降低通带内凸起（过调整至无凸起），同时增加带宽；然后减小  $\tau_p$  补偿通带内凸起的过调整，让通带曲线变平坦，同时进一步增加带宽。

针对问题四，首先，通过文献调研采用等效电路模型推导得到 VCSEL 激光器的小信号带宽模型。然后，由小信号模型推导公式定性分析了影响调制带宽的主要参数  $\eta_i$ 、 $G_0$ 、 $\tau_p$ 。通过分析标准二阶低通模型  $H(f)$ ，得到弛豫共振频率  $\omega_r$  和阻尼系数（品质因数） $Q$  的数学模型，依据模型参数，从理论上分析了参数  $\eta_i$ 、 $G_0$ 、 $\tau_p$  等对激光器带宽和通带内平稳度的影响关系，并给出了四种提高带宽的措施。

**关键词：**VCSEL；L-I 曲线；速率方程；带宽模型

## 一、问题重述

互联网飞速发展的今天，“光纤入户”已经越来越普遍。从繁华的都市，到偏远的乡村，已经逐渐被光纤连接到了一起。在李克强总理“提速降费”的呼吁下，已经有越来越多的家庭能够依靠光纤宽带在网络的海洋中进行高速“冲浪”。光纤宽带就是把要传送的数据由电信号转换为光信号进行通讯。光纤中传输的激光信号具有远高于电信号传输速率的特点(激光信号传输带宽远大于电信号传输带宽)，更适合于未来高速率的传输网络，较高的通信速率也对光源提出了较高的要求。在整个光纤通信系统中，光源器件作为设备的核心，在系统设计和仿真计算中都需要慎重考虑。在众多光源中，半导体激光器具有转换效率高、体积小、重量轻、可靠性高、能直接解调等优点<sup>[1]</sup>。与我们生活息息相关的激光器种类繁多，垂直腔面发射激光器(Vertical Cavity Surface Emitting Laser, 以下简称 VCSEL)具有使用简单，体积小，功耗低等特点，VCSEL的工作电流大多在 6mA~8mA。VCSEL 的特点表明，与器件相关的各个物理量并不是一个衡量，在处理中也不能将它们视为一个常量。正是由于这些物理量是随空间变化而变化的动态元素，本文的主要任务，就是通过数学建模的方式，仿真分析 VCSEL 激光器的在不同条件下的物理特性。

激光器输出的光功率强度与器件的温度相关，当器件温度(受激光器自身发热和环境温度的共同影响)改变后，激光器输出的光功率强度也会相应发生变化。在进行建模时，我们既要准确反映 VCSEL 激光器特性，还要考虑：

(1) 激光器输出的功率强度与温度的关系——即该激光器可以在多大的外界环境温度范围内使用；

(2) VCSEL 的传输带宽越宽，用户上网的网速也就越快。为了适应未来的高速传输网络需求，期望设计出具有更宽带宽的激光器。如何设计激光器参数可以使激光器具有更大的传输带宽(即 S21 曲线上纵坐标-10dB 位置对应的横坐标频率值更大)——即可以实现更快的传输速率。

## 二、问题分析

### 2.1 问题 1 分析：VCSEL 的 L-I 模型的建模与模型解算

激光器是将电能转换成光能的半导体器件。能量转换的过程，也是电子能量转换为光子能量的过程。转换过程中，伴随着电子的运动，半导体器件会产生一定的热量。从能量守恒的角度看，转化为热能的能量越多(发热导致能量浪费)，器件温度越高，那么转化为光能的能量越少(输出光功率越低)。

根据题目给出的信息可知，激光器的输出光功率、工作电流以及温度有很大关系，本题的主要工作有：

(1) 建立 L-I 模型并解算

L-I 模型，即激光器的工作电流与输出光功率强度关系模型(L: light, 表示光功率强度，也可以表示为 P; I: Intensity of current, 表示工作电流)，题目给出了被广泛认可的 L-I 模型及其参数化表达公式。

根据 L-I 实测数据，将经验值作为初值代入模型，并设计模型解算算法以获取 L-I 模型参数( $\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ )；模型解算后得到精确的参数，将其代入模型画出 10℃, 20℃, 30℃, ……，90℃等温度下的 L-I 曲线。

(2) 工作温度分析

假定当电信机房里 VCSEL 激光器在直流输入时输出的平均光功率低于 2mW 时，用户的光猫无法检测到信号。那么，根据建立的 L-I 模型推测：电信机房里 VCSEL 激光器工作的环境温度最多不能高于多少摄氏度，才能保证用户可以正常使用网络。

该问题的解算需要获取不同温度下 VCSEL 激光器的平均输出光功率，并建立平均光功率与温度的数学模型，通过模型的解算得到 VCSEL 激光器的工作环境温度上限值。

## 2.2 问题 2 分析：L-I 模型的改进

分析问题 1 中模型的精度和误差产生的原因，提出改进措施，根据改进后的模型画出 10℃，20℃，30℃，……，90℃ 等温度下的 L-I 曲线，并与问题 1 中 L-I 曲线进行比较。需要分析现有 L-I 模型中的哪些参数在解算过程中出现了误差，建立新的数学模型提高精度。

## 2.3 问题 3 分析：带宽模型建立与分析

带宽模型，通常也称为小信号响应模型，就是给器件输入不同频率的幅度非常小的信号获得对应频率点输出信号的幅度（功率）。根据附录一中基于速率方程的带宽模型的推导结论建立小信号幅频响应模型，利用 VCSEL 激光器小信号幅频响应和相应的驱动电流、输出光功率等实测数据，完成如下四个问题的解算及分析：

(1) 建立恰当的激光器小信号幅频响应参数模型，给出参数构成及其确定方法。依据模型解算获取的新的参数画出不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线（即 S21 曲线），其中一条必须是 20℃ 下 7.5mA 偏置电流的仿真输出曲线。

(2) 利用建立的小信号带宽模型及参数，分析激光器的温度和激光器的偏置电流对器件带宽曲线的影响。

(3) 假定激光器工作环境温度可以采用某些措施让它固定在 20℃，偏置电流固定在 7.5mA，那么，如果要获得更宽带宽的激光器设计方案，还可以通过什么手段实现。逐步分析模型参数对带宽的影响，并得到给定条件下更宽带宽的设计方案。

(4) 改变激光器的某些参数可以发现一些有趣的问题，比如激光器在 3dB 范围内的部分频率处幅度可能会高于 0 频位置（谐振现象）。调整模型参数，获取各参数影响谐振频率的规律。通过各参数对谐振频率的影响给出参数匹配的方法使得通带内曲线更加平坦。

## 2.4 问题 4 分析：带宽模型探索

开放性探索问题：探索是否有更好的带宽模型建模方式，使得模型运算速度更快。或者建立新的模型以分析器件在相同的温度和偏置电流下，如何具有更宽的 3dB（或 10dB）带宽。

# 三、模型假设与符号说明

## 3.1 模型假设

(1) 激光器结区温度在直流偏置条件下，有足够的时间调整到驱动电流值，则不考虑温度的变化， $\frac{dT}{dt} = 0$ ；

(2) 在高速数据传输过程中，单比特的数字‘0’和数字‘1’持续时间均很短，在这么短的时间内可以认为 $\frac{dT}{dt} = 0$ ，进而推导小信号模型下的调制带宽公式。

(3) 假设 L-I 关系中转换效率  $\eta(T)$  受温度影响较小，即  $\eta(T)$  近似于常数  $\eta$ 。

## 3.2 符号说明与缩略语

表 1 符号说明与缩略语表

符号、缩略语	说明
$P_0$	激光器输出的光功率
$I$	注入到激光器的外部驱动电流

$\eta(T)$	L-I 曲线的斜率
$N$	载流子数
$I_{th0}$	常数
$I_{off}(T)$	与温度相关的经验热偏置电流
$I_b$	激光器偏置电流（输入电流）
$R_{th}$	VCSEL 热阻抗
$\tau_{th}$	热时间常数
$T_0$	环境温度
$V$	输入电压
$N_0$	透明载流子数
$\tau_n$	载流子复合寿命
$\tau_p$	光子寿命
$G_0$	增益系数，激光产生的阈值条件，增益大于总损耗；
$S$	光子数
$\beta$	受激辐射耦合系数
$\varepsilon$	增益压缩因子

---

注：行文中用到的其他变量、常量等均有明确的说明。

---

## 四、问题一模型的建立与求解

### 4.1 VCSEL 的 L-I 模型建立

本题的题目和文献<sup>[2]</sup>都给出了 VCSEL 激光器的 L-I 静态特性数学模型，该模型揭示出 VCSEL 输出光功率不仅与注入到激光器的外部驱动电流有关，而且还与激光器的转换效率和阈值电流有关，其中阈值电流是器件温度和载流子密度的函数，具体表达式如下：

$$P_0 = \eta(T)(I - I_{th}(N, T)) \quad (1)$$

其中：

$P_0$ ：激光器输出的光功率，在 L-I 中光功率也用 L 来表示，即 L-I 也可以写成 P-I；

$I$ ：注入到激光器的外部驱动电流，包含外部加载的偏置电流  $I_b$  和信号电流，在无信号时为偏置电流  $I_b$ ；

$\eta(T)$ ：L-I 曲线的斜率，从能量转换角度看斜率对应于转换效率，与温度相关；

$I_{th}(N, T)$ ：阈值电流，激光器电流超过该值则激光发光，与载流子数和温度相关；

$N$ ：载流子数；

假设：

(1) 转换效率  $\eta(T)$  受温度影响较小，即  $\eta(T)$  近似于常数  $\eta$ ；

(2) 将阈值电流用如下公式表示：

$$I_{th}(N, T) = I_{th0} + I_{off}(T) \quad (2)$$

其中  $I_{th0}$  为常数， $I_{off}(T)$  是与温度相关的经验热偏置电流（即激光器内部的偏置电流，随激光器温度的变化而变化，有别于外部人为加载的激光器偏置电流  $I_b$ ）。

这样公（1）式可以表达为：

$$P_0 = \eta(I - I_{th0} - I_{off}(T)) \quad (3)$$

将热偏置电流  $I_{off}(T)$  表示为:

$$I_{off}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \quad (4)$$

公式 (4) 中的温度  $T$  受外界环境温度  $T_0$  和自身的温度影响, 自身的温度与器件产生的瞬时功率  $VI$  相关, 即受 V-I 特性 (电压-电流特性) 影响:

$$T = T_0 + (IV - P_0)R_{th} - \tau_{th} \frac{dT}{dt} \quad (5)$$

式中, 符号及含义为:

$R_{th}$ : VCSEL 热阻抗;

$\tau_{th}$ : 热时间常数;

$T_0$ : 环境温度;

$I$ : 偏置电流  $I_b$  (输入电流);

$V$ : 输入电压。

本文假设, 实验数据均在直流模式下采集而来, 不考虑采集过程中的温度变化对器件的影响, 即  $\frac{dT}{dt} = 0$ , 则式 (5) 可进一步简化为:

$$T = T_0 + (IV - P_0)R_{th} \quad (6)$$

#### 4.2 L-I 模型参数值求解与 L-I 温度曲线

公式 (3) - 公式 (6) 是 VCSEL 的一种经验模型, 其中的参数需要根据实验数据确定, 表 2 给出了模型参数估计的参考初值:

表 2 L-I 模型初值设置

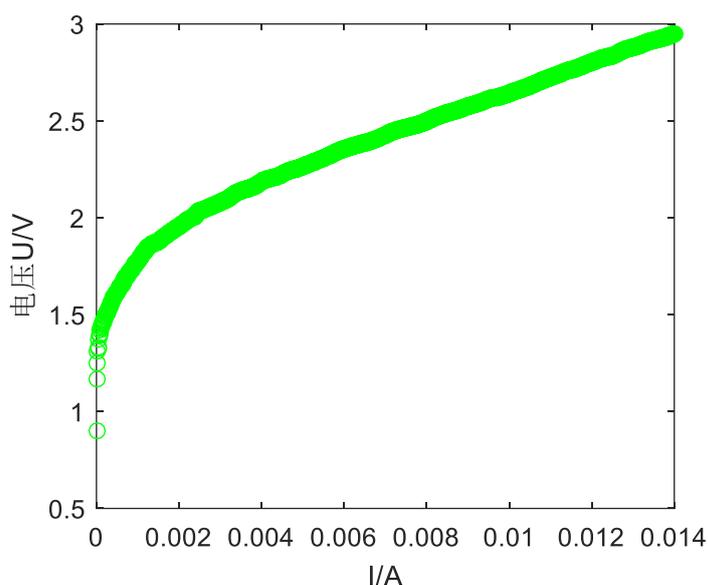
参数	参考初值	单位
$\eta$	0.5	-
$I_{th0}$	0.3E-3	A
$R_{th}$	2.6E3	°C/W
$a_0$	1.246E-3	A
$a_1$	-2.545E-5	A/K
$a_2$	2.908E-7	A/K <sup>2</sup>
$a_3$	-2.531E-10	A/K <sup>3</sup>
$a_4$	1.022E-12	A/K <sup>4</sup>

由公式 (1) 可知, VCSEL 的输出光功率要表达成为电流和温度的函数关系, 才能得到不同温度下的 L-I 曲线, 因此本文建立了数学模型完成参数的提取。

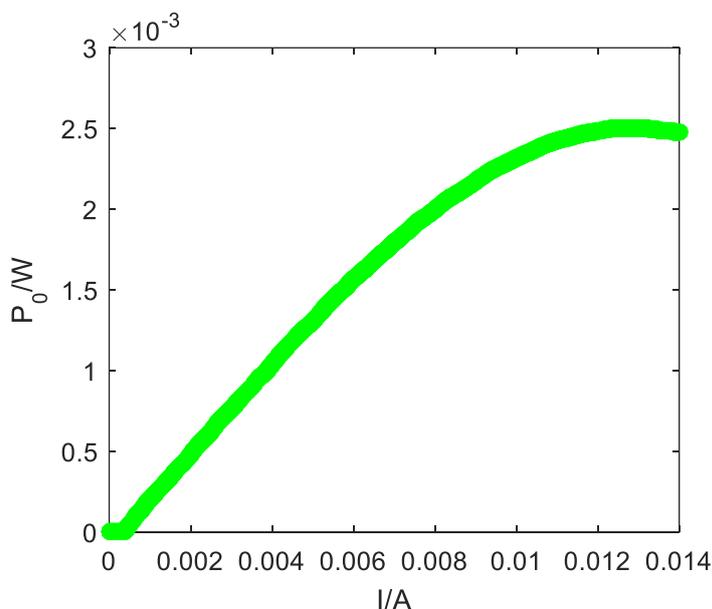
##### 4.2.1 L-I 模型参数求解

模型参数提取算法设计:

题目提供了电流  $I$ 、电压  $V$  以及激光器输出的光功率  $P_0$  的实验测试数据, 如图 1 所示:



(a) V-I 曲线



(b) L-I 曲线

图 1 V-I、L-I 实测数据曲线

由公式 (3)、(4)、(6) 可得：

$$P_0 = \eta \left( I - I_{th0} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (T_0 + (IV - P_0)R_{th})^n \right) \quad (7)$$

按照题目要求，设公式 (6) 中多项式为 4 次多项式，则上式可简化为：

$$P_0 = \eta \left( I - I_{th0} - \sum_{n=0}^4 a_n (T_0 + (IV - P_0)R_{th})^n \right) \quad (8)$$

可知，待定的参数共有 8 个，表 2 给出了这些参数的一组合理初始值。利用已知的电流  $I$ 、电压  $V$  以及光功率  $P_0$  的实验数据，可以对上式进行优化，从而确定各个待定参数。优化的方向是，待定参数使得公式 (8) 中计算的  $P_0$  与实测的  $P_0$  误差的均方和最小。

设题目所给的数据共有  $M$  对， $I_i$ 、 $V_i$  和  $P_{0i}$  分别为所给  $I$ 、 $V$ 、 $P_0$  数据中的第  $i$  个数

据，则可设优化的目标函数为：

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left( P_{0i} - \eta \left( I_i - I_{th0} - \sum_{n=0}^4 a_n (T_0 + (I_i V_i - P_{0i}) R_{th})^n \right) \right)^2 \quad (9)$$

其中， $\mathbf{x}$  为 8 个待定参数组成的向量： $\mathbf{x} = [\eta \quad I_{th0} \quad R_{th} \quad a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]$ 。

针对上式中的优化问题本文使用 MATLAB 中的 `fminsearch` 函数求解，该函数采用 Nelder-Mead 单纯形法求多元函数极值，能处理多参数联合无约束最优化任务，具有局部收敛速度快特点，尤其针对初始猜想值接近局部最优值情况，能快速收敛到局部最优值。也可采用文献<sup>[9][10]</sup>中的方法进行求解。

算法流程设计：

Step (1) 初始化，输入表 2 中的模型参数和实验数据  $I_i$ 、 $V_i$  和  $P_{0i}$ ，利用公式 (9) 优化向量  $\mathbf{x}$  中的参数值；

Step (2) 函数收敛后保存上述参数值（见表 3）供后续计算使用。

求得结果见表 3，优化的目标函数  $f(\mathbf{x})$  取值为：1.526424431368470E-10，说明优化后的参数使模型计算值与实测结果较好吻合。

将确定好的 8 个参数，以及  $I$ 、 $V$ 、 $P_0$  的实验数据代入公式 (8) 的数学模型中，求得的 L-I 曲线与实测 L-I 数据对比，如图 2 所示。可以看出，模型计算光功率值与实测光功率值符合得很好，说明模型求解正确。

表 3 参数求解结果

参数	模型提取的参数值	单位
$\eta$	0.327974911948322	-
$I_{th0}$	2.09792442194657E-05	A
$R_{th}$	3593.49598351965	°C/W
$a_0$	0.00245295354589810	A
$a_1$	-2.24461489568760E-05	A/K
$a_2$	8.55495131262933E-08	A/K <sup>2</sup>
$a_3$	-3.04196846538548E-10	A/K <sup>3</sup>
$a_4$	6.38679397411974E-13	A/K <sup>4</sup>

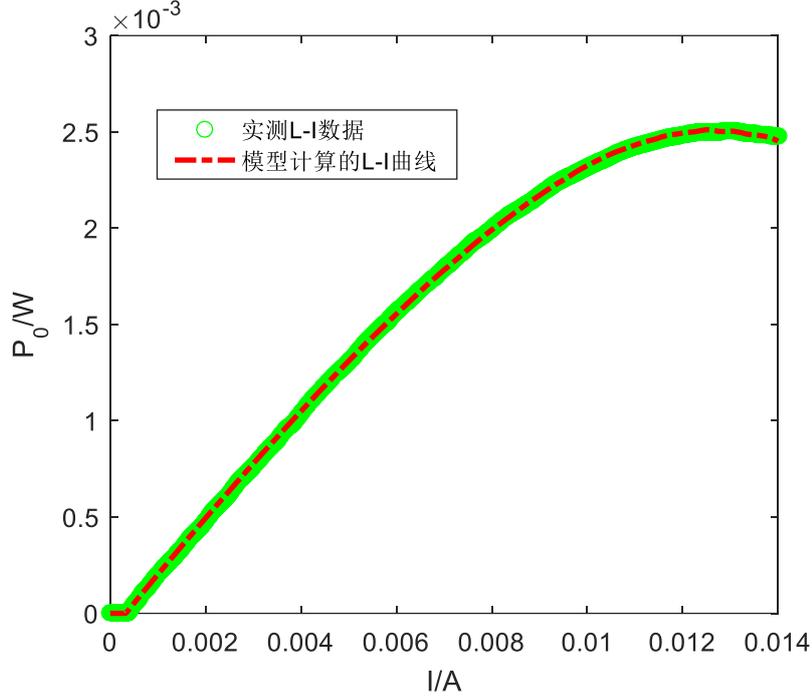


图 2 L-I 实测数据与模型计算结果对比

#### 4.2.2 不同温度下 L-I 曲线计算

##### (1) 直接采用实测电压数据计算 L-I 曲线

公式 (9) 最后确定的 VCSEL 激光器的 L-I 数学模型中的 8 个参数已经通过 4.2.1 节完成求解，则可以通过如下过程求解不同温度下的 L-I 曲线。

假设电压  $V$  只受电流  $I$  的影响，不受温度  $T$  影响，则可以直接将题目提供的  $V$  和  $I$  数据代入上述模型中。那么在一定温度  $T_0$  下，上述模型中只存在一个未知数  $P_0$ ，且等式为关于  $P_0$  的一元四次方程，通过求解这个方程，便可以确定输出光功率  $P_0$ 。

模型求解：

由于上述一元四次方程表达较为复杂，本文通过以下方法简化模型求解。

由式 (6) 可得：

$$P_0 = IV - \frac{T - T_0}{R_{th}} \quad (10)$$

将上式代入公式 (3) 中，得到一个关于  $T$  的一元四次方程，如下。

$$IV - \frac{T - T_0}{R_{th}} = \eta \left( I - I_{th0} - \sum_{n=0}^4 a_n T^n \right) \quad (11)$$

该方程形式较为简单，通过化简得到方程：

$$\eta R_{th} a_4 T^4 + \eta R_{th} a_3 T^3 + \eta R_{th} a_2 T^2 + (\eta R_{th} a_1 - 1)T + T_0 + R_{th} [\eta(I_{th0} - I + a_0) + IV] = 0 \quad (12)$$

通过求解公式 (12) 构成的四次方程，可以得到四个根： $T_i$ ， $i=1,2,3,4$ 。其中只有一个根与实际符合。考虑到实际中  $T$  相对于  $T_0$  的变化不大， $T_i$  中  $T_0$  最接近的那个温度即为  $T$  的解。因此可以由下式确定唯一的  $T$  值。

$$\min_{T_i} (|T_i - T_0|), \quad i=1,2,3,4 \quad (13)$$

在  $T$  值确定后将其代入式 (4)，得到热偏置电流  $I_{off}(T)$ ，将  $I_{off}(T)$  代入式 (3)，即可得到输出光功率  $P_0$ 。通过上述公式推导形成如下计算方法：

算法流程设计：

Step (1) 初始化，输入提取到的模型参数；

Step (2) 输入电流参数  $I$ 、环境温度参数  $T_0$ ，求解方程 (12)，按照公式 (13) 给出的判据得到温度参数  $T$ ；

Step (3) 将温度参数  $T$  代入式 (4)，得到热偏置电流  $I_{off}(T)$ ，将  $I$ 、 $I_{off}(T)$  代入式 (3)，即可得到输出光功率  $P_0$ ；

Step (4) 改变环境温度参数  $T_0$ 、电流参数  $I$ ，重复 Step (2) -Step (3) 求得不同温度下的 L-I 曲线。

使用上述模型计算得到的 10℃~90℃ 温度下的 L-I 曲线如图 3 所示。

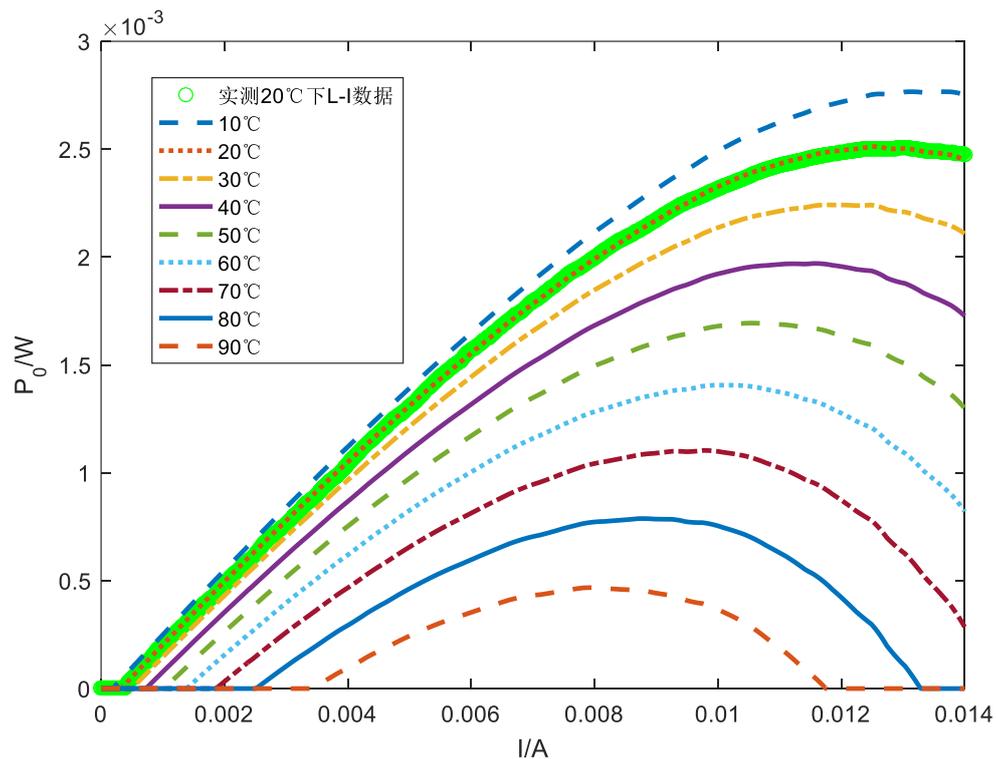


图 3 不同温度下的 L-I 曲线

可以看出，20℃ 情况下计算模型光功率值与实测光功率值符合得很好，随着温度升高，光功率呈下降趋势。

原因分析：激光器是将电能转换成光能的半导体器件，能量转换的过程，也是电子的电能为光子的光能的过程。在能量转换过程中，伴随着电子的运动，半导体器件会产生一定的热量，从能量守恒的角度看，转化为热能的能量越多（发热导致能量浪费了），器件温度越高，那么转化为光能的能量越少（输出光功率越低），可以利用的能量就越少。从而出现了 L-I 曲线中显示的，光输出功率随着环境温度的升高而下降的趋势。

实际计算出的数据与实际理论分析的情况符合，说明模型正确。图 3 数据显示随着温度的增加，器件阈值电流也随着增加，80℃ 和 90℃ 的 L-I 曲线表明在实测数据的输入电流范围内，曲线展示出了两个特性：1) 在某个电流工作点上  $P_0$  开始滚降；2) 越过滚降点后， $P_0$  随着输入电流的增加开始减小，直至为 0。

## (2) 利用多项式拟合 V-I 关系，再计算 L-I 曲线

由图 2 可知采集数据未能足够显示 L-I 曲线的变化趋势。在不考虑器件能够承受的

最大驱动电流条件下,为充分分析不同温度的 L-I 曲线,本文建立了 V-I 关系数学模型,对器件电压值 V-I 关系进行合理外推,以获取完整的 L-I 曲线。

同样假设电压 V 不受温度 T 影响,对于电压 V 与电流 I 的关系,假设 V 是 I 的一个多项式组合,如式 (14) 所示,取 V 为 I 的 5 阶多项式。

$$V = \sum_{n=0}^5 b_n I^n \quad (14)$$

对题目提供的 V 与 I 数据,利用 MATLAB 软件拟合,得到参数  $b_n$  取值如下表所示

表 4 多项式拟合 V-I 关系系数

参数	取值	单位
$b_0$	1.400131039196883	-
$b_1$	0.442357171224129	-
$b_2$	-0.104988380399638	-
$b_3$	0.014248010889581	-
$b_4$	-9.150132320360773e-04	-
$b_5$	2.233431354694871e-05	-

利用确定的参数,求得 V-I 关系曲线与实测 V-I 数据对比,如图 4 所示。可以看出,两者符合得很好。

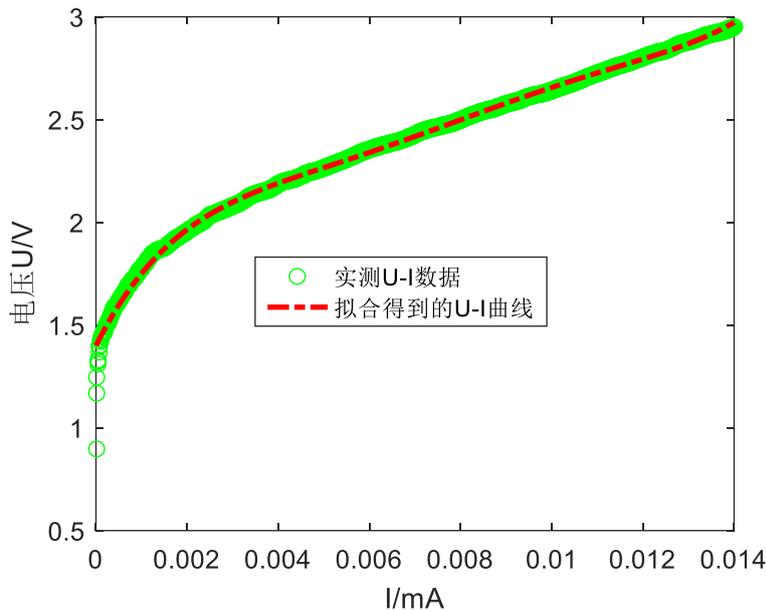


图 4 多项式拟合得到的 V-I 曲线与实测值对比

设拟合得到的电压值为  $V'$ , 利用下式评估拟合结果与实测数据的误差, 结果为  $err = 3.06 \times 10^{-4}$ , 说明拟合结果与实测数据误差很小, 模型正确。

$$err = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{(V_i - V'_i)^2}{V_i^2} \quad (15)$$

将拟合得到的 V-I 公式代入公式 (12), 关于 T 的一元四次方程变为:

$$\eta R_{th} a_4 T^4 + \eta R_{th} a_3 T^3 + \eta R_{th} a_2 T^2 + (\eta R_{th} a_1 - 1) T + T_0 + R_{th} \left[ \eta (I_{th0} - I + a_0) + I \sum_{n=0}^5 b_n I^n \right] = 0 \quad (16)$$

使用上述算法即可求解方程 (16)，确定  $T$  值，将其代入式 (4)，得到热偏置电流  $I_{off}(T)$ 。再将  $I_{off}(T)$  代入式 (3)，即可得到输出光功率  $P_0$ 。

该模型的不同在于，由题目数据建立的方法只能求解题目所提供的电流数据范围 (0~14mA) 内的输出光功率；而该模型使用了拟合得到的 V-I 关系，可以计算任意电流值下的输出光功率。

使用该模型计算得到的 10℃、20℃、…、90℃ 温度下的、电流在 0~25mA 范围内的 L-I 曲线如图 5 所示。

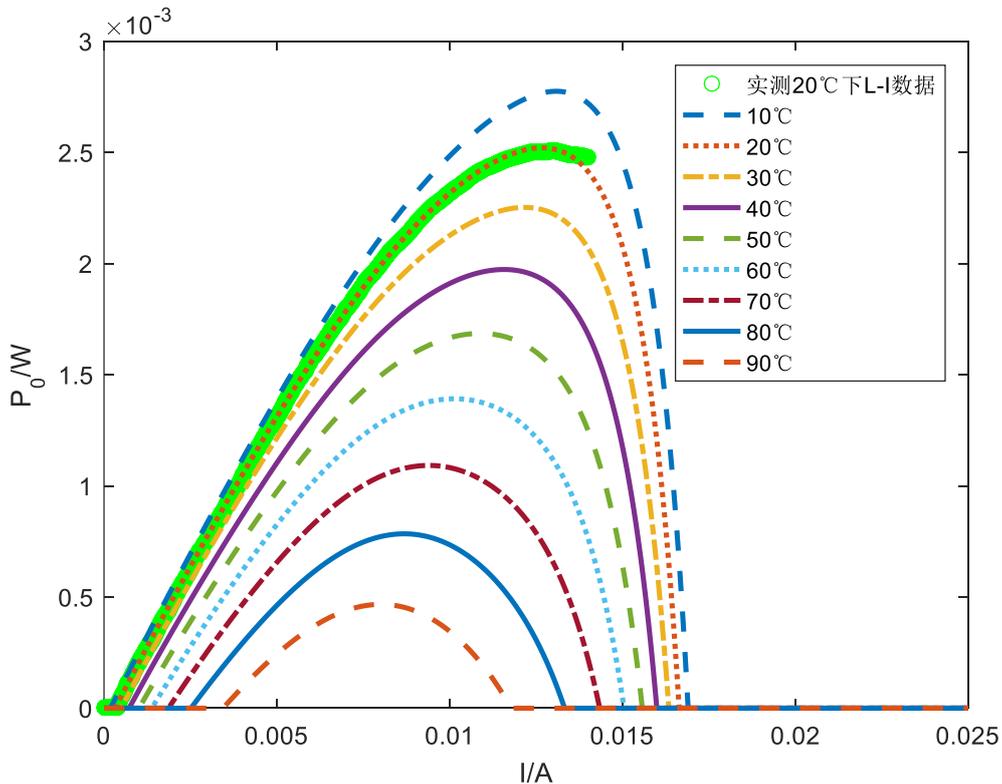


图 5 利用 V-I 多项式关系计算的不同温度下的 L-I 曲线

从新的 L-I 曲线可以看出，20℃ 情况下计算模型光功率值与实测光功率值符合的很好，而且图 5 给出了 10℃、20℃、…、90℃ 情况下，VCSEL 器件输出光功率随着电流增大呈现先上升后下降的情况，即激光器输出光功率随着电流的增大存在一个反转点，该结论与文献<sup>[2]</sup>给出的 L-I 曲线较为相似，也验证了模型的正确性。但通过仔细对比发现，基于多项式拟合的 V-I 外推数据计算得到的 L-I 曲线，随着电流值的增大达到反转点后输出光功率与文献给出的计算结果相比较，存在下降过快的现象。此现象揭示了建立的数学模型的精度不足，在 V-I 拟合过程中没有考虑温度对 V-I 的影响，也没有考虑此类二极管激光器 V-I 关系曲线中随着电流值增大电压值缓慢增加并趋向平稳的特性，此问题将要在第五章详细讨论。

### 4.3 VCSEL 工作环境温度的限值

#### 4.3.1 数学模型的建立

根据图 5 的求解结果，可以发现在确定的温度  $T_0$  下，输出光功率  $P_0$  随着电流  $I$  的增大呈现出先增大后减小的趋势，即在工作温度不变的情况下， $P_0$  存在一个最大值，设这一值为  $P_{max}(T_0)$ ，其与温度  $T_0$  存在一定关系。

由图 5 的计算结果，可以得到 10℃、20℃、…、90℃ 温度下的  $P_{max}$  值，如图 6 所示。

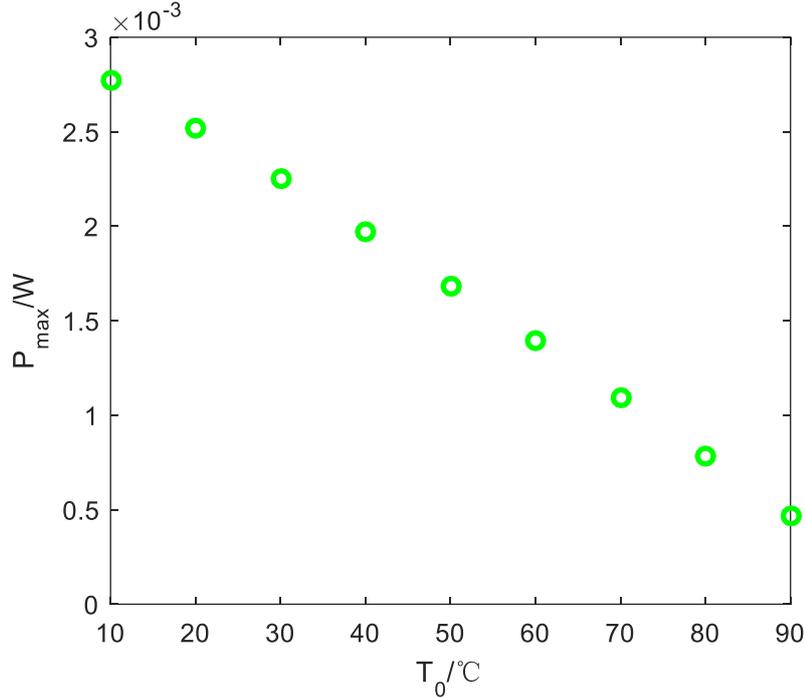


图 6 工作温度与激光器输出光功率的关系

通过观察可以看出， $P_{\max}(T_0)$ 与 $T_0$ 基本为线性关系。

建立如下模型，设：

$$P_{\max}(T_0) = k_p T_0 + b_p \quad (17)$$

利用上图中的 $P_{\max}(T_0)$ 数据，可以拟合得到参数 $k_p$ 及 $b_p$ 。

若假定当电信机房里 VCSEL 激光器在直流输入时输出的平均光功率低于某一阈值光功率 $P_{th}$ （题目设为 2mW）时，用户的光猫无法检测到信号。则根据上式，可求得电信机房里 VCSEL 激光器工作的环境温度最多不能高于阈值温度 $T_{th}$ ，才能保证用户可以正常使用网络。 $T_{th}$ 表达式如下：

$$T_{th} = \frac{(P_{th} - b_p)}{k_p} \quad (18)$$

#### 4.3.2 数学模型求解及工作环境温度限值计算

采用 MATLAB，拟合得到的参数 $k_p$ 及 $b_p$ 分别为：

$$k_p = -2.889968220301238 \times 10^{-5};$$

$$b_p = 0.00310487704857358。$$

拟合结果与 $P_{\max}(T_0)$ 数据对比图如图 7 所示，从图中可以看出线性拟合能够准确反映激光器输出光功率峰值与温度的理论关系。

根据题目要求的阈值光功率 $P_{th}$ 为 2mW，可以求得阈值温度 $T_{th} = 38.2^\circ\text{C}$ 。即电信机房里 VCSEL 激光器工作的环境温度最多不能高于阈值温度 38.2 $^\circ\text{C}$ ，才能保证用户可以正常使用网络，图 8 中 2mW 对应的水平曲线就是该条件下激光器的输出光功率阈值，只有激光器输出光功率超过该阈值才能正常共作。

该模型可以方便地求解任意阈值光功率 $P_{th}$ 下的阈值温度 $T_{th}$ 。如若阈值光功率 $P_{th}$ 为极限的 0mW，可求得 $T_{th} = 107.4^\circ\text{C}$ 。这意味着，当环境温度达到 107.4 $^\circ\text{C}$ 时，此种激光器已经不能有光功率输出。

从该模型还可以得出，激光器的最大输出光功率 $P_{\max}(T_0)$ 基本随着环境温度 $T_0$ 的增

加线性下降，对于激光器工作环境温度的调控工作具有指导意义。也就是说，激光器要想有更高的输出光功率，其周围环境的温度必须控制在合理的较低的水平。

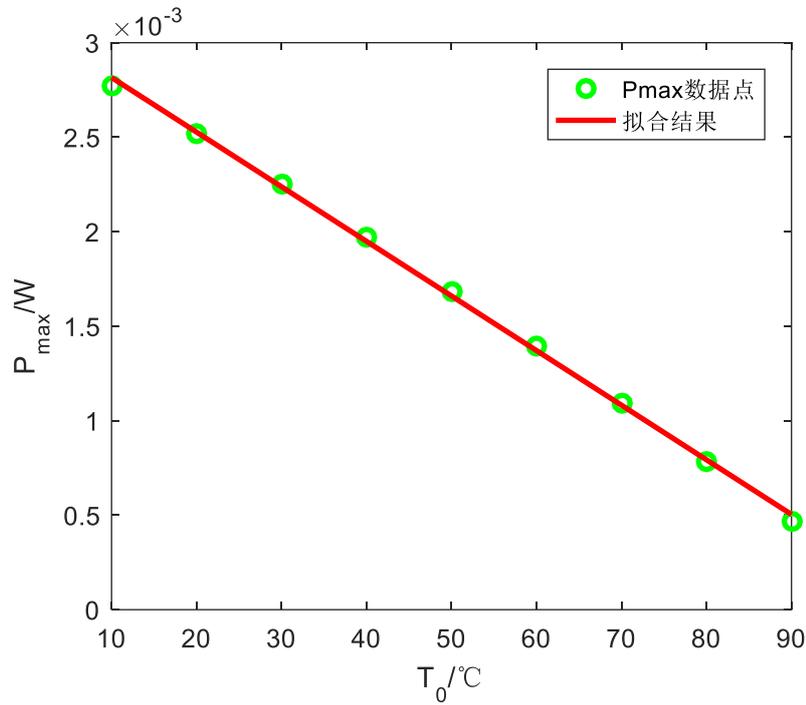


图 7 工作温度与激光器输出光功率的关系

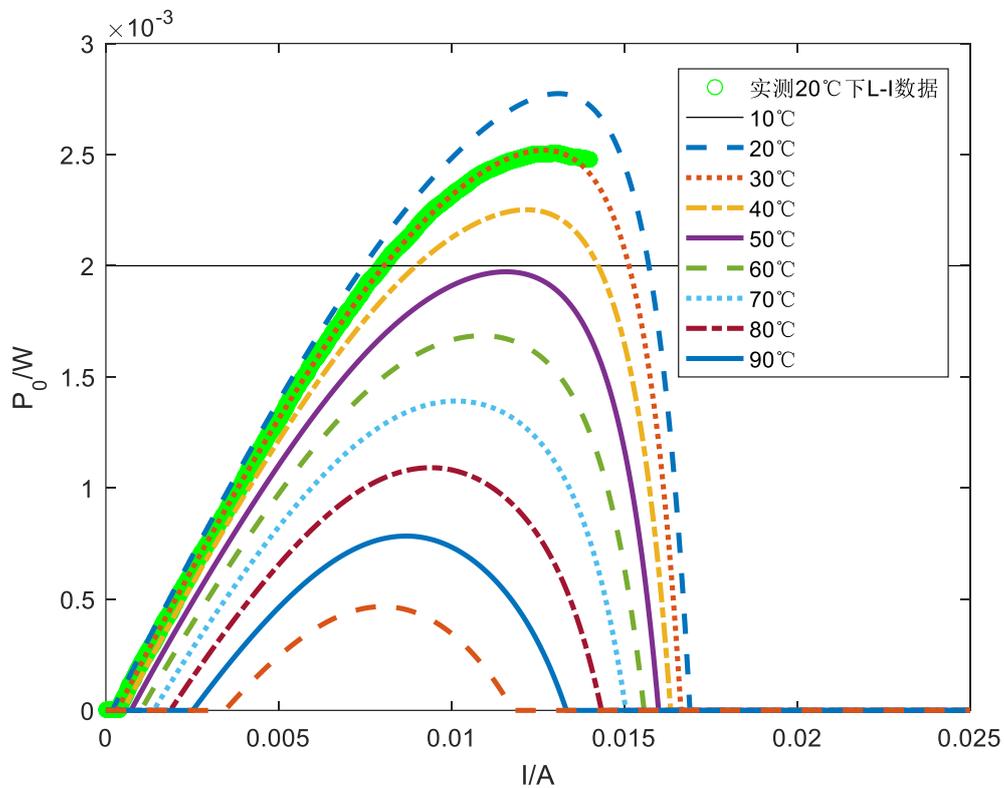


图 8 工作温度与激光器输出光功率的关系

#### 4.4 总结

针对问题一，建立了 VCSEL 激光器的 L-I 静态特性数学模型，并完成了模型解算得到了不同温度下的 L-I 曲线。20℃情况下计算模型光功率值与实测光功率值符合得很好，随着温度升高，光功率呈下降趋势，并给出了定性的理论解释，验证了建模与解算的正确性。本文发现，实验采集的电流数据未能足够显示 L-I 曲线的变化趋势，尤其 10℃、20℃两条曲线随着电流的增大输出光功率尚未明显下降。在不考虑器件能够承受的电流值情况下，为充分探索在较大电流，不同温度的情况下 L-I 理论曲线，本文建立了 V-I 关系的数学模型，对器件 V-I 关系进行外推，以获取完整的 L-I 曲线。从新的 L-I 曲线可以看出，20℃情况下计算模型光功率值与实测光功率值符合得很好，激光器输出光功率随着电流增大呈现先上升后下降的情况，即激光器输出光功率随着电流的增大存在一个反转点，该结论与文献给出的 L-I 曲线较为相似，也验证了模型的正确性。但通过仔细对比发现，基于多项式拟合的 V-I 数据计算得到的 L-I 曲线，随着电流值的增大达到反转点后输出光功率与文献给出的计算结果相比较，存在下降过快的现象。此现象揭示了建立的数学模型的精度不足，在 V-I 拟合过程中没有考虑温度对 V-I 的影响，也没有考虑 V-I 关系曲线中随着电流值增大电压值缓慢增大（二极管器件伏安特性）等问题，这将在第五章详细讨论。通过上述分析可知在工作温度不变的情况下，激光器输出光功率  $P_0$  存在一个最大值（ $P_{\max}(T)$ ），通过建立  $P_{\max}(T)$  与温度的关系模型可知， $P_{\max}(T)$  随着环境温度  $T_0$  线性下降，根据题目要求的阈值光功率  $P_{th}$  为 2mW，可以求得阈值温度  $T_{th}=38.2^\circ\text{C}$ 。这对于激光器工作环境温度的调控工作具有指导意义，也就是说，激光器要想有更高的输出光功率，其周围环境的温度必须控制在合理的较低水平。

## 五、问题二 L-I 模型的改进

### 5.1 问题一模型误差分析

从 L-I 曲线可以看出，20℃情况下计算模型光功率值与实测光功率值符合得很好，而且图 5 给出了 10~90℃情况下，VCSEL 器件输出光功率随着电流增大呈现先上升后下降的情况，即激光器输出光功率随着电流的增大存在一个反转点，该结论与文献<sup>[2]</sup>给出的 L-I 曲线较为相似，也验证了模型的正确性。但通过仔细对比发现，基于多项式拟合的 V-I 数据计算得到的 L-I 曲线（见图 5），随着电流值的增大达到反转点后输出光功率与文献给出的计算结果相比较，存在下降过快的现象，这一现象也可以由 20℃下的 L-I 曲线与实测数据的对比发现。

此现象揭示了建立的数学模型的精度不足，在 V-I 拟合过程中没有考虑温度对 V-I 的影响，也没有考虑 V-I 关系曲线中随着电流值增大电压值缓慢增大的趋势等问题。经过分析，问题一中（公式 14）采用的 V-I 关系数学模型中，采用了  $V$  为  $I$  的 5 阶多项式的关系。这一模型对包含实测数据的电流区间部分符合较好，但是在外推的电流区间，因没有实测数据，导致拟合曲线呈现快速上升趋势，这不符合二极管类器件的 V-I 特性物理规律。如下图所示，在包含实测数据的 0~14mA 电流范围内，拟合曲线与实测数据符合较好，但是在大于 14mA 的没有实测数据的电流范围内，拟合曲线的走势明显偏离了实测数据原有的变化规律。正是由于这一原因，导致在外推电流区间内的电压  $V$  计算偏差较大，使得计算得到的 L-I 曲线下降过快。

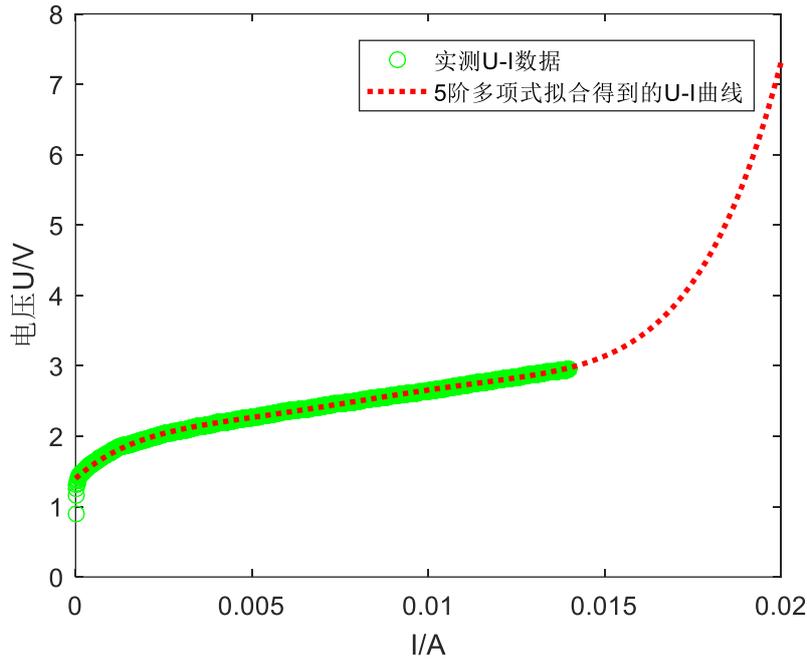


图 9 电压外推后的曲线对比

## 5.2 改进模型

在本节中，针对拟合 V-I 曲线的走势明显偏离了实测数据原有的变化规律的问题，引入了一种新的 V-I 关系模型——二极管参数模型。因为根据 VCSEL 激光器的结构，V-I 关系用一个电阻与一个二极管串联描述最为恰当<sup>[3]</sup>，可以表示为下式所示：

$$V = IR_s + V_T \ln \left( 1 + \frac{I}{I_s} \right) \quad (19)$$

该模型中共有 3 个待定参数。其中， $R_s$  为串联电阻， $V_T$  为二极管的热电压， $I_s$  为二极管的反向饱和电流。此模型也可变化为  $V = IR_s + V_T \ln(I)$  线性模型，这样可以用线性最小二乘方法拟合，可以适当降低计算复杂度。

针对公式 (19) 模型求解：

使用 MATLAB 的 cftool 拟合工具，拟合得到三个参数的取值分别为：

$$\begin{cases} R_s = 57.0360308555514 & \Omega \\ V_T = 0.153934044730170 & \text{V} \\ I_s = 1.29733744761763 \times 10^{-8} & \text{A} \end{cases} \quad (20)$$

利用确定的二极管模型参数，求得 V-I 关系曲线与多项式模型、实测 V-I 数据对比，如图 10 所示。可以看出，二极管模型拟合得到的 V-I 关系曲线不仅在 0~14mA 电流区间内与实测数据吻合，且在外推电流区间内计算的电压值趋势与实测数据符合。可见这一模型相比于多项式拟合模型更加符合实际物理规律。

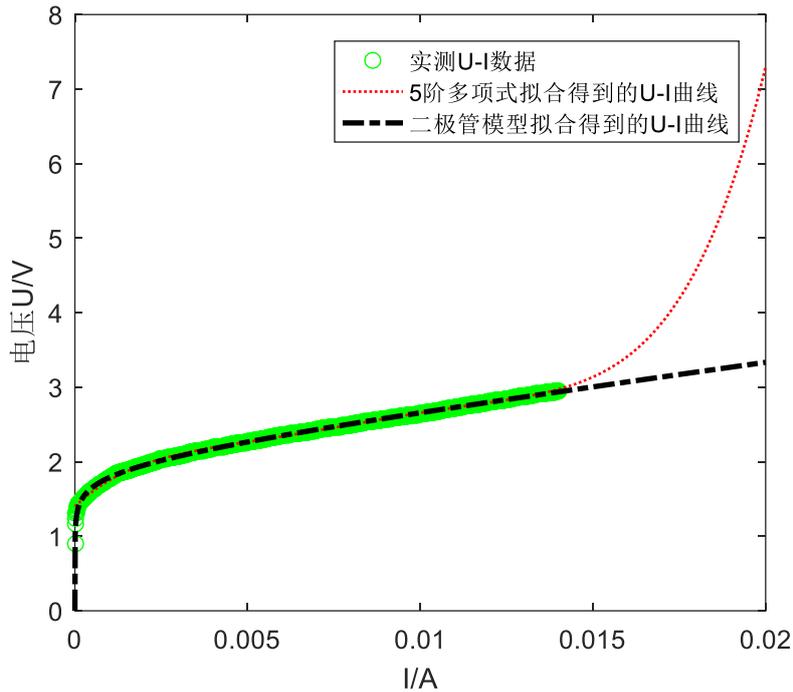


图 10 不同拟合方法电压外推后的曲线对比（大电流端）

另外，在电流较小时，二极管模型的拟合结果同样比多项式模型更具优势。如下图 11 所示，在 0~0.4mA 电流值较低区间内，二极管模型拟合曲线的走势与实测数据一致，而多项式模型拟合结果则存在较大偏差。这也同样说明了二极管拟合模型更加符合实际规律，更加准确。

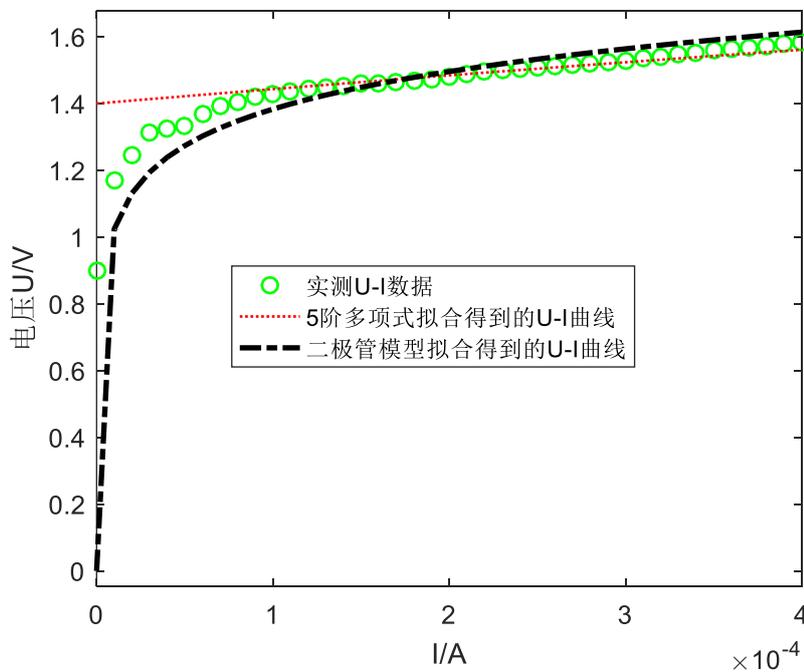


图 11 不同拟合方法电压外推后的曲线局部对比（小电流端）

### 5.3 模型求解及对比分析

基于上述二极管 V-I 关系模型，计算得到的 10℃、20℃、…、90℃ 温度下的、电流在 0~25mA 范围内的 L-I 曲线如图 12 所示。

模型改进前后得到的 10℃、20℃、…、90℃ 温度下的、电流在 0~25mA 范围内的 L-I 曲线对比如图 13 所示。

通过对比可知，20℃ 下的 L-I 曲线与实测数据相比改进前更加符合，并且与文献<sup>[2]</sup>中给出的曲线在趋势上更为接近，特别是在 14mA 电流附近。

改进前，在大于 14mA 的电流外推区间上，L-I 曲线变化过快，存在“骤降”现象；使用二极管 V-I 关系模型改进后，L-I 曲线在大于 14mA 的电流外推区间上的变化比改进前平缓，更加符合实际的物理规律。

另外，可以看出，在 10℃~90℃ 温度范围内，L-I 曲线的最大值点都在 14mA 之前。因此，虽然问题一中采用的多项式 V-I 关系模型在电流外推区间欠准确，但是对于不同温度下激光器的最大输出光功率  $P_{\max}(T)$  的计算是没有问题的。进而，问题一中，求得满足阈值光功率  $P_{th}$  为 2mW 的阈值温度  $T_{th}=38.2^{\circ}\text{C}$ ，这一结果同样也是准确的。

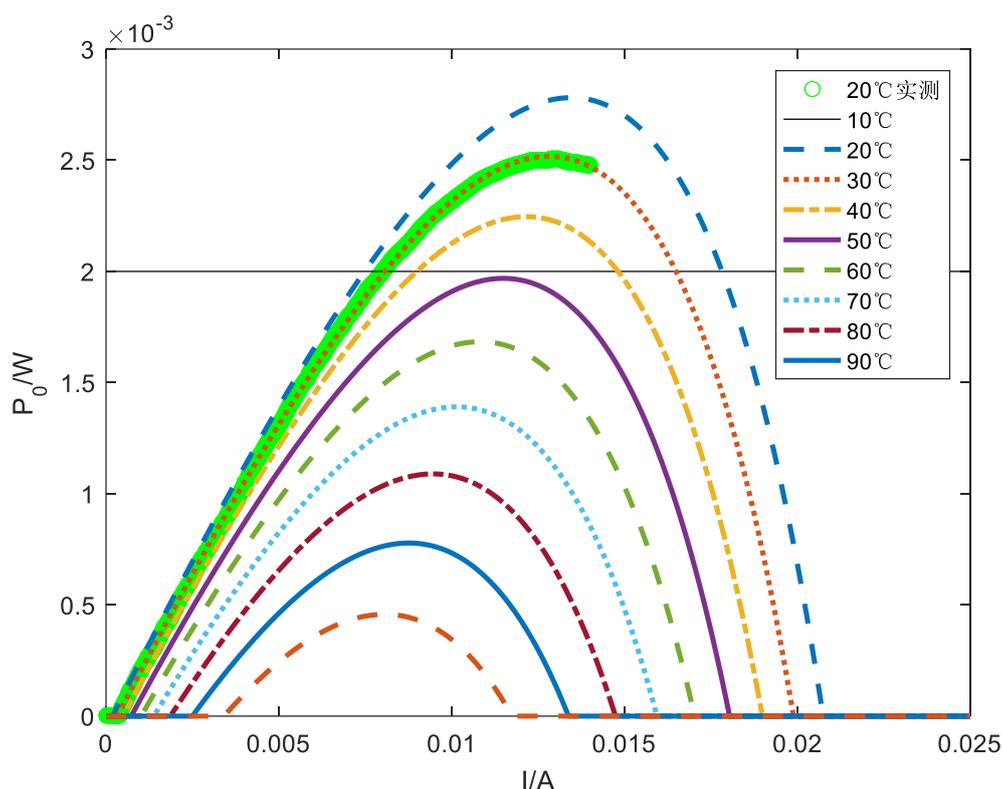


图 12 基于二极管模型拟合方法电压外推后的 L-I 曲线

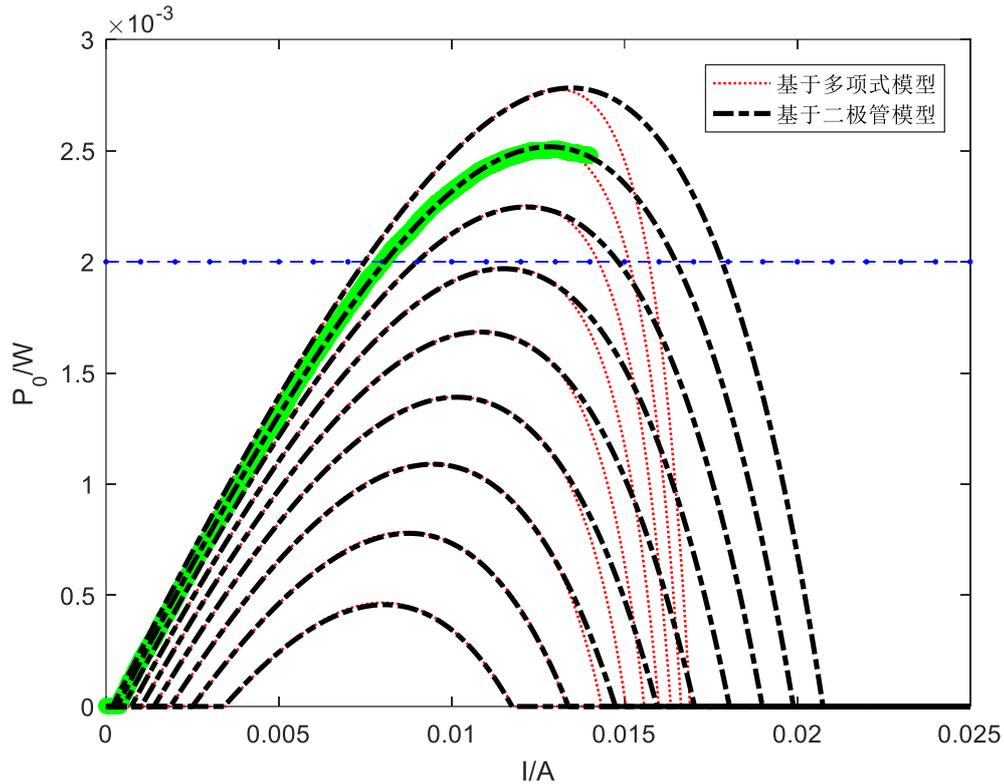


图 13 改进的模型与原有模型得到的曲线对比分析  
(图中曲线从上到下依次为 10℃、20℃、…、90℃)

#### 5.4 总结

经对比分析发现，基于多项式拟合的 V-I 数据计算得到的 L-I 曲线（见图 5），随着电流值的增大达到反转点后输出光功率与文献给出的计算结果相比较，存在下降过快的现象，这一现象也可以由 20℃ 下的 L-I 曲线与实测数据的对比发现。此现象揭示了建立的数学模型的精度不足，在 V-I 拟合过程中没有考虑温度对 V-I 的影响，也没有考虑 V-I 关系曲线中随着电流值增大电压值增大的趋势等问题。问题一中（公式 14）采用的 V-I 关系数学模型中，采用了  $V$  为  $I$  的 5 阶多项式的关系。这一模型对包含实测数据的电流区间部分符合较好，但是在外推的电流区间，拟合曲线呈现快速上升趋势，这不符合 V-I 的物理规律。正是由于这一原因，导致在外推电流区间内的电压  $V$  计算偏差较大，使得计算得到的 L-I 曲线下降过快。本文采用了改进的 V-I 模型，针对拟合 V-I 曲线的走势明显偏离了实测数据原有的变化规律的问题，引入了二极管参数模型。因为根据 VCSEL 激光器的结构，V-I 关系用一个电阻与一个二极管串联描述最为恰当。通过模型计算可知，20℃ 下的 L-I 曲线与实测数据相比，更加符合实测值，并且与文献中给出的曲线在趋势上更为接近，特别是在 14mA 电流附近。改进前，在大于 14mA 的电流外推区间上，L-I 曲线变化过快，存在“骤降”现象；使用二极管 V-I 关系模型改进后，L-I 曲线在大于 14mA 的电流外推区间上的变化比改进前平缓，更加符合实际的物理规律。

另外，在 10℃~90℃ 温度范围内，L-I 曲线的最大值点都在 14mA 之前。因此，虽然问题一中采用的多项式 V-I 关系模型在电流外推区间欠准确，但是对于不同温度下激光器的最大输出光功率  $P_{\max}(T)$  的计算是没有问题的。进而，问题一中，求得满足阈值光功率  $P_{th}$  为 2mW 的阈值温度  $T_{th}=38.2^{\circ}\text{C}$ ，这一结果同样也是准确的。

### 六、问题三模型的建立与求解

#### 6.1 基于速率方程的带宽模型建立

### 6.1.1 建模思想

VCSEL 器件的特性可以用一组非线性速率方程来描述，将偏置电流和注入激光器的外部驱动电流代入文献<sup>[2]</sup>中的激光器速率方程后，

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \frac{\eta_i(I - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N}{\tau_n} - \frac{G_0(N - N_0)S}{1 + \varepsilon S} \\ \frac{dS}{dt} = -\frac{S}{\tau_p} + \frac{\beta N}{\tau_n} + \frac{G_0(N - N_0)S}{1 + \varepsilon S} \end{cases} \quad (21)$$

VCSEL 输出的光功率与光子数成正比，假定比例因子为  $k$

$$P_0 = kS \quad (22)$$

式 (7) - (8) 中符号定义如下：

$N$ ：载流子数；

$t$ ：时间；

$\eta_i$ ：注入效率；或转换效率；

$q$ ：电子电量， $1.6 \times 10^{-19}$  库伦；

$N_0$ ：透明载流子数；

$I$ ：注入的外部驱动电流；

$I_{off}(T)$ ：与温度相关的偏置电流；

$\tau_n$ ：载流子复合寿命；

$\tau_p$ ：光子寿命；

$G_0$ ：增益系数；

$S$ ：光子数；

$\beta$ ：受激辐射耦合系数；

$\varepsilon$ ：增益压缩因子。

VCSEL 的小信号响应建模的思想如下：

(1) 求出稳态下的电流  $I_s$ 、载流子数  $N_s$ 、光子数  $S_s$ ；稳态，即无驱动信号情况下，激光器中的电流为直流信号，此时电流是稳定的，载流子数、光子数也都是稳定的；

(2) 加载小信号（小信号为信号幅度非常小的信号，不同频率处的信号幅度不同，因此小信号是与频率相关的小幅度信号），可以假定小信号引入了与频率相关的电流、载流子数、光子数，数学表达可以写成： $i(f)$ ， $n(f)$ ， $s(f)$ ；

(3) 给 VCSEL 加载上小信号后，原来速率方程中的电流、载流子数、光子数则表示为稳态下的值与小信号下引入信号变化的值的和。

$$\begin{cases} I(t) = I_s + i(f)e^{j2\pi ft} \\ N(t) = N_s + n(f)e^{j2\pi ft} \\ S(t) = S_s + s(f)e^{j2\pi ft} \end{cases} \quad (23)$$

其中， $i(f)$ ， $n(f)$ ， $s(f)$  是足够小的小信号。

### 6.1.2 VCSEL 的小信号频率响应模型建立

附录一给出了基于速率方程的带宽模型推导过程，这里给出该数学模型建模结果：

(1) 计算载流子数  $N_s$  的数学模型

载流子数  $N_s$  采用公式 (24) 计算得到：

$$N_s = \frac{P_0 / (k\tau_p) + G_0 N_0 P_0 / (k + \varepsilon P_0)}{\beta / \tau_n + G_0 P_0 / (k + \varepsilon P_0)} \quad (24)$$

(2) 激光器发光驱动电流  $I_{cur}$  的数学模型

采用式 (25) 从理论上计算出激光器的发光驱动电流  $I_{cur}$  :

$$I_{cur} = \frac{q}{\eta_i} \left( \frac{N_s}{\tau_n} + \frac{G_0 (N_s - N_0) P_0}{k + \varepsilon P_0} \right) + I_{th0} + I_{off}(T) \quad (25)$$

(3) 激光器稳态工作的光子数  $S_s$  的数学模型

采用式 (26) 从理论上计算出激光器稳态工作时的光子数  $S_s$  :

$$S_s = \frac{\eta_i (I - I_{th0} - I_{off}(T)) / q - N_s / \tau_n}{G_0 (N_s - N_0)} \quad (26)$$

(4) 激光器理论输出光功率  $P_s$  的数学模型

激光器输出光功率与光子数成正比, 比例因子为  $k$ , 那么根据理论计算出的光子数  $S_s$  可以计算出理论上的出光功率

$$P_s = k S_s \quad (27)$$

(5) VCSEL 的小信号响应模型建立

激光器的小信号响应模型为:

$$\begin{cases} H(f) \equiv \frac{h(f)}{h(0)} = \frac{Z}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \\ Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 P_s}{k + \varepsilon P_s} - \frac{G_0 (N_s - N_0)}{(1 + \varepsilon P_s / k)^2} \\ Z = \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 P_s}{\tau_p (k + \varepsilon P_s)} - \frac{(1 - \beta) G_0 (N_s - N_0)}{\tau_n (1 + \varepsilon P_s / k)^2} \end{cases} \quad (28)$$

建立了上述的 VCSEL 激光器小信号幅频响应参数模型, 接下来将分析参数构成及其提取方法, 并画出不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线, 讨论各项参数对激光器带宽的影响。

## 6.2 参数提取方法及带宽响应曲线

题目提供了  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ 、 $I = 7.5\text{mA}$  条件下的频率  $f$  以及小信号响应  $H_{dB}(f)$ , 如图 14 所示, 这里的  $H_{dB}(f)$  即以 dB 为单位的  $H(f)$ 。为简化描述, 下文中的小信号响应值都使用  $H(f)$  表示, 均认为已经转换到 dB 单位制。

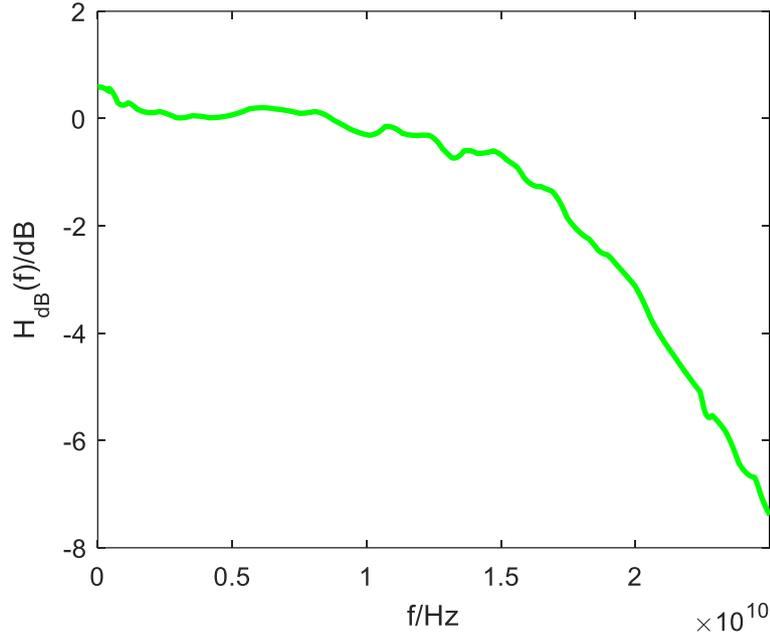


图 14 器件频率响应实测值

公式 (28) 为 VCSEL 的小信号响应数学表达式。在该表达式中存在许多的参数，需要利用题目提供的上述数据，采用非线性最优化获取最佳的参数值，使得在相同的温度和偏置电流影响下，按照公式 (28) 模型计算得到的响应  $H(f)$  与实测的响应应该具有一致性。

由数学模型可知，待定的参数共有 8 个，表 5 给出了这些参数的优化初始值。

表 5 小信号模型初值设置的参考值

参数	参考初值	单位
$\eta_i$	0.7	-
$\beta$	1E-5	-
$\tau_n$	9.6E-9	s
$k$	1.5E-8	W
$G_0$	1.8E6	s-1
$N_0$	4.97E5	-
$\tau_p$	3.8E-12	s
$\varepsilon$	4.7E-8	-

设题目所给的数据共有  $M$  对， $f_i$  和  $H(f_i)$  分别为所给  $f$  和  $H(f)$  数据中的第  $i$  个数据。根据 VCSEL 的小信号响应模型中三个约束条件（模型计算的驱动电流  $I_{cur}$  与实测驱动电流值  $I$  相减为第 1 个误差约束关系，模型计算的激光器出光功率  $P_s$  与实测激光器光功率  $P_0$  相减为第 2 个误差约束，模型计算出的小信号响应  $H_s(f)$ （由式 (28) 计算）与实测的小信号响应值  $H(f)$  相减为第 3 个误差约束），设计如下优化的目标函数：

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = k_1 \frac{(I - I_{cur})^2}{I^2} + k_2 \frac{(P_0 - P_s)^2}{P_0^2} + k_3 \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left[ \frac{(H(f_i) - H_s(f_i))^2}{H(f_i)^2} \right] \quad (29)$$

其中， $\mathbf{x}$  为 8 个待定参数组成的向量： $\mathbf{x} = [\eta_i \ \beta \ \tau_n \ k \ G_0 \ N_0 \ \tau_p \ \varepsilon]$ 。

$f(\mathbf{x})$  中的三项分别与三个约束条件相关，而  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$  为三个条件的权重调节系数，根据三个约束条件的重要性以及收敛速度设置。利用问题二中建立的模型，已经确定了参数  $I_{in0}$ ，在给定  $T_0$  和  $I$  的条件下，容易计算得到  $P_0$  和  $I_{off}(T)$ 。

本题重点要满足的约束条件是模型计算出的小信号响应  $H_s(f)$  与实测的小信号响应值  $H(f)$  的误差约束，共有  $M = 2500$  组数据；对于  $I_{cur}$  与  $I$ 、 $P_s$  与  $P_0$  两个约束条件，其只有一组数据，条件易于满足。因此，为了避免后两个约束条件过快满足对于第一个条件收敛的影响，系数  $k_1$ 、 $k_2$  要设置得相对较小， $k_3$  要相对较大。本题中，设置  $k_1 = k_2 = 1$ ； $k_3 = 4000$ 。

本文使用 MATLAB 中的 `fminsearch` 函数对该模型求解。

求得结果见表 6，优化后目标函数  $f(\mathbf{x})$  中三个约束条件对应误差项的取值为：

$$\begin{aligned} \frac{(I - I_{cur})^2}{I^2} &= 9.37 \times 10^{-8} \\ \frac{(P_0 - P_s)^2}{P_0^2} &= 5.50 \times 10^{-8} \\ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left[ \frac{(H(f_i) - H_s(f_i))^2}{H(f_i)^2} \right] &= 9.99 \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (30)$$

可以看出，即理论计算值与实测结果较为一致，达到了本文参数优化的目的。

表 6 小信号模型参数求解结果

参数	取值	单位
$\eta_i$	0.229535843579394	-
$\beta$	9.74930547730389e-06	-
$\tau_n$	1.35657742521920e-08	s
$k$	1.97291378335878e-08	W
$G_0$	1398983.42729603	s-1
$N_0$	87066.3421503811	-
$\tau_p$	1.16078659387274e-11	s
$\varepsilon$	6.62869006156715e-09	-

将确定好的 8 个参数，代入公式 (28) 的小信号响应模型中，求得的小信号响应与实测数据对比，如图 15 所示。可以看出，两者符合较好，说明模型求解正确。

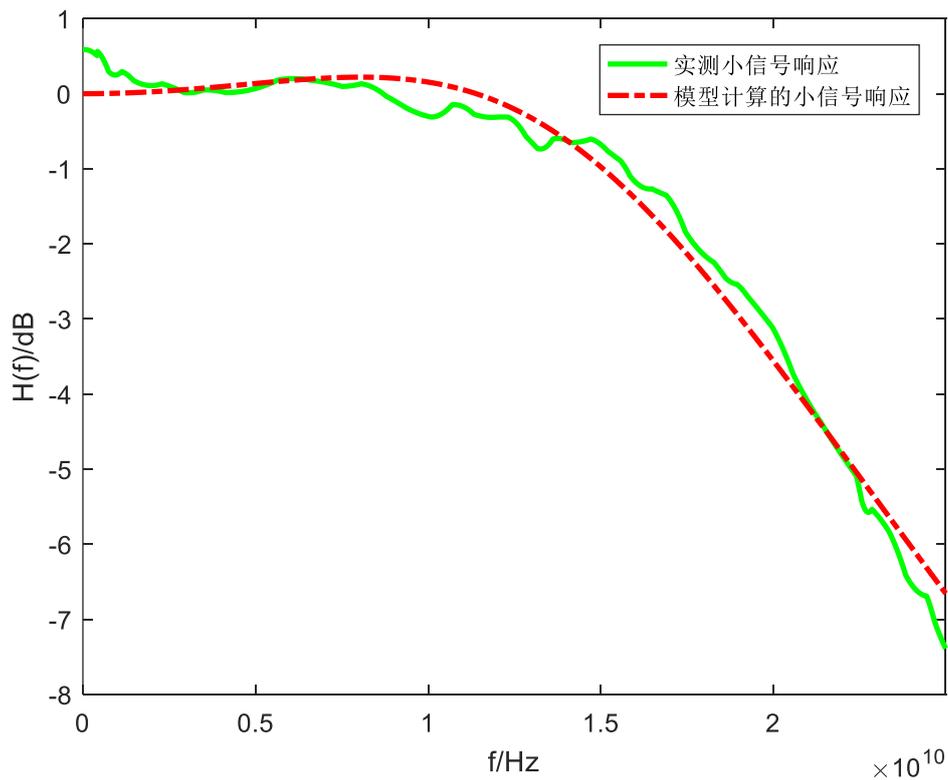
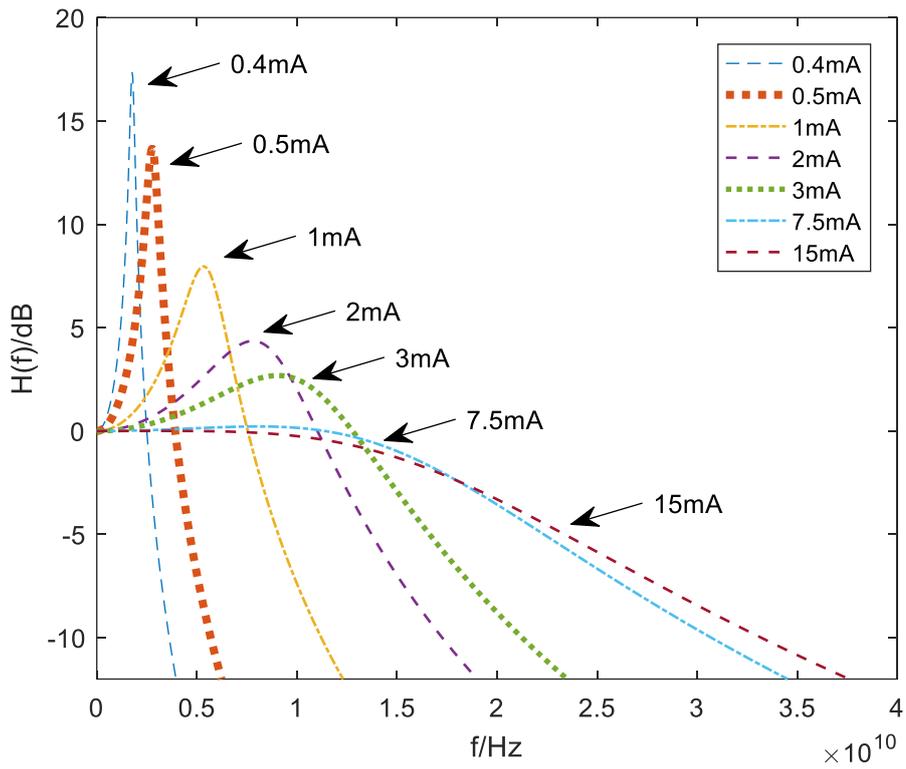


图 15 VCSEL 器件小信号响应对比

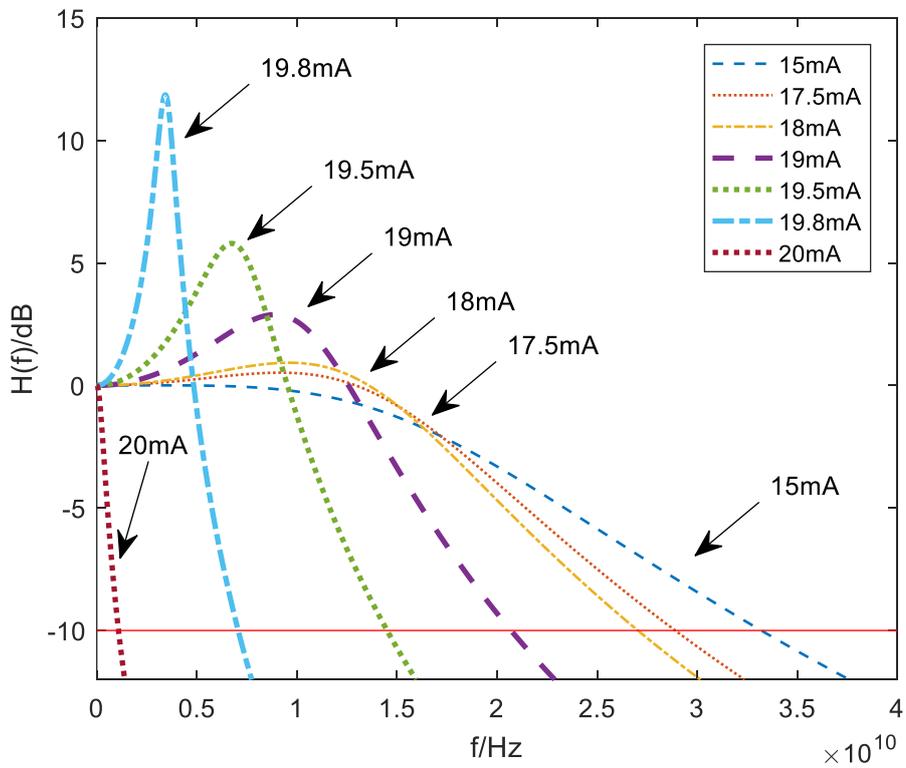
### 6.3 偏置电流以及温度对带宽曲线的影响

图 16 是利用求解的模型参数，计算得到的 20℃ 下，不同电流下的带宽响应曲线图。从图中可以看出随着电流的增大带宽逐渐变宽并且通带逐渐变得平坦，但当电流值增大到某一反转点后，带宽开始变窄。

本文根据理论计算数据获取不同电流下 10dB 带宽值，如图 17 所示，10dB 带宽随驱动电流值增大具有先上升后下降的趋势，这和光输出功率随电流的变化趋势较为相似。



(a) 电流 0.4mA—15mA



(b) 电流 15mA—20mA

图 16 不同驱动电流下带宽响应曲线

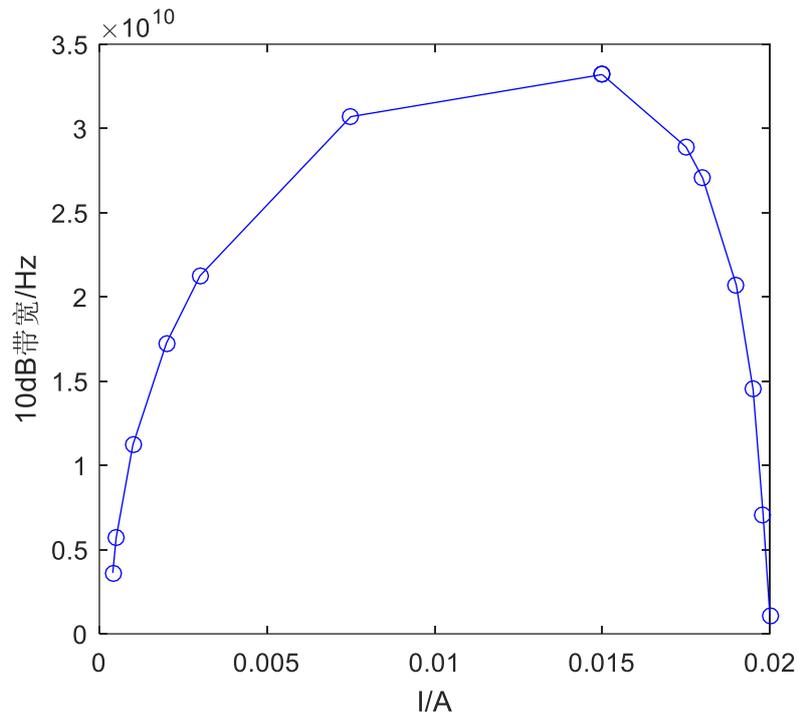


图 17 带宽随电流变化趋势曲线

图 18 是利用求解的模型参数，计算得到的电流为 7.5mA 时，环境温度为 10℃、20℃、…、90℃的带宽响应曲线图。从图中可以得知，随着温度的升高带宽逐渐变窄，并且通带内频率响应变得不再平坦。根据模型计算数据得到了不同温度下的 10dB 带宽值，如图 19 所示，带宽随温度的升高而变窄。

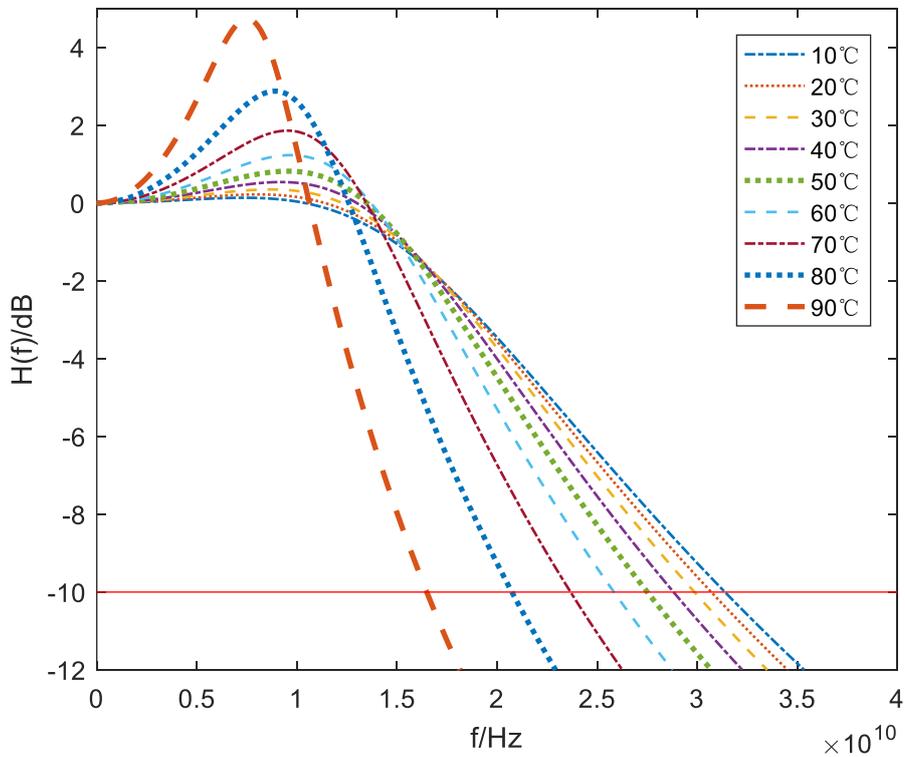


图 18 带宽随温度变化响应曲线

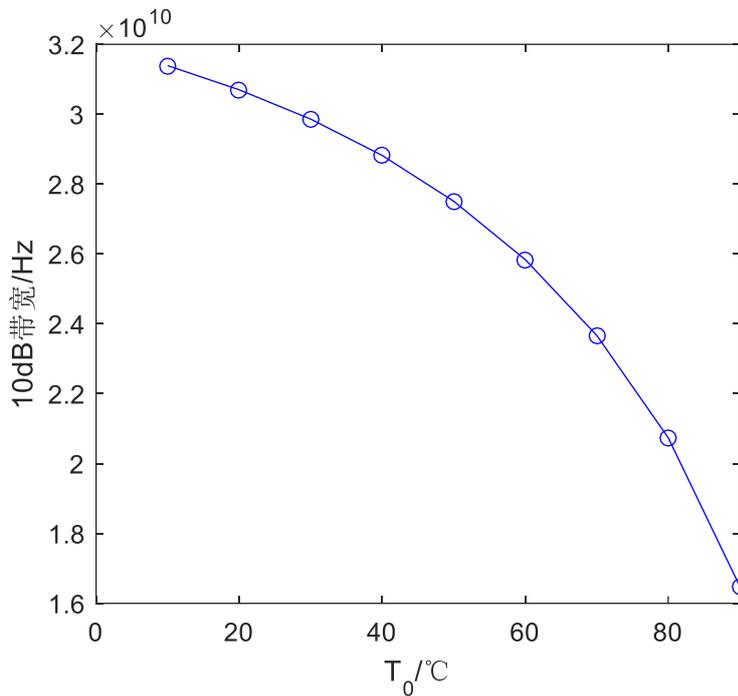


图 19 带宽随温度变化趋势曲线

可以发现，带宽与电流、温度的关系，和输出光功率与电流、温度的关系是一致的。这是因为带宽响应模型就是输入不同频率小信号获得的对应频率点输出信号的幅度（功率）。这也验证了该模型计算结果的正确性。

#### 6.4 宽带宽激光器参数设计方法

##### (1) 带宽随 $\eta_i$ 变化规律

根据建立的小信号响应模型及提取的参数，可以得到带宽响应随  $\eta_i$  变化的规律，如图 20 所示。

计算条件：驱动电流：7.5mA；温度：20°C； $\eta_i$ ：0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,1。

从图 20 中可以看出，随着  $\eta_i$  值的增大，带宽变宽，且逐渐平坦；图 21 是根据模型计算得到的不同  $\eta_i$  对应的 10dB 带宽值，随着  $\eta_i$  值的增大，带宽变宽，且逐渐平坦。

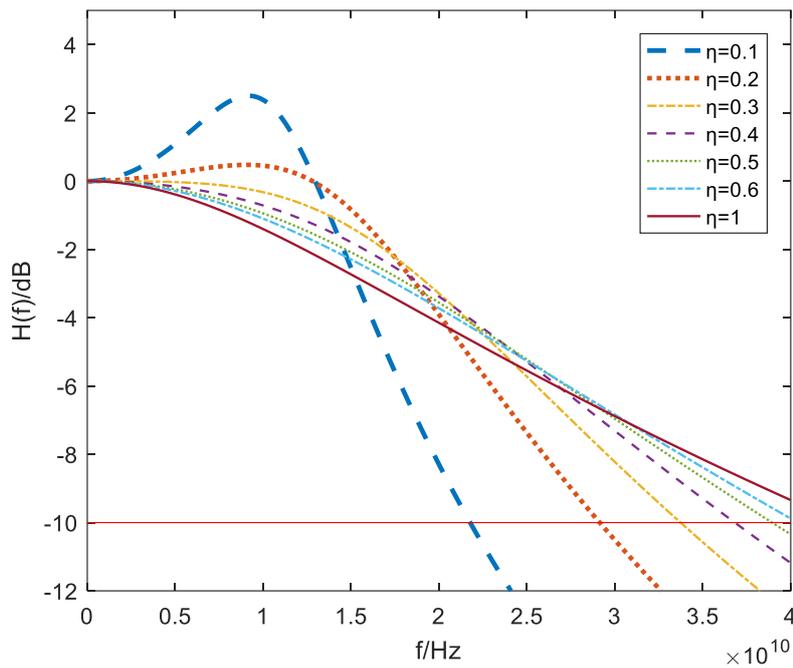


图 20 不同  $\eta_i$  的带宽响应曲线

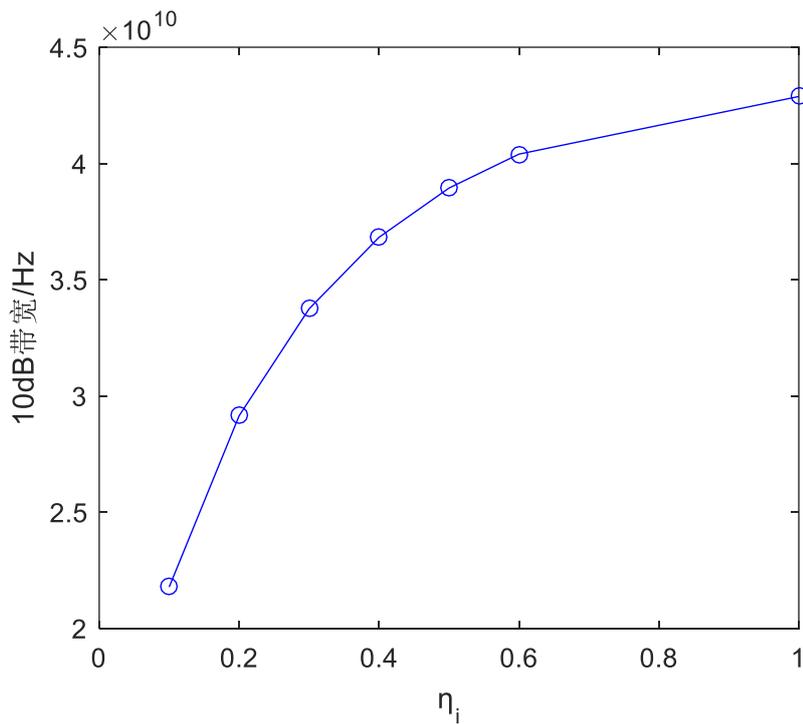


图 21 10dB 带宽随  $\eta_i$  的变化趋势

**理论分析：**激光器是将电能转换成光能的半导体器件，能量转换的过程，也是电子的电能转换为光子的光能的过程。当转换效率提高时，产生的光子数增多，激光器输出功率提高从而使得带宽变宽。

(2) 带宽响应随  $G_0$  的变化

计算条件：驱动电流：7.5mA；温度：20℃； $G_0$ ：1E5 ~ 3E6。

图 22 是带宽随参数  $G_0$  变化的响应曲线；根据理论计算数据得到了不同  $G_0$  值的 10dB

带宽值，图 23 是带宽随参数  $G_0$  变化趋势曲线；从曲线变化趋势可知，随着  $G_0$  值的增大带宽逐渐提高，且通带内响应逐渐平坦。

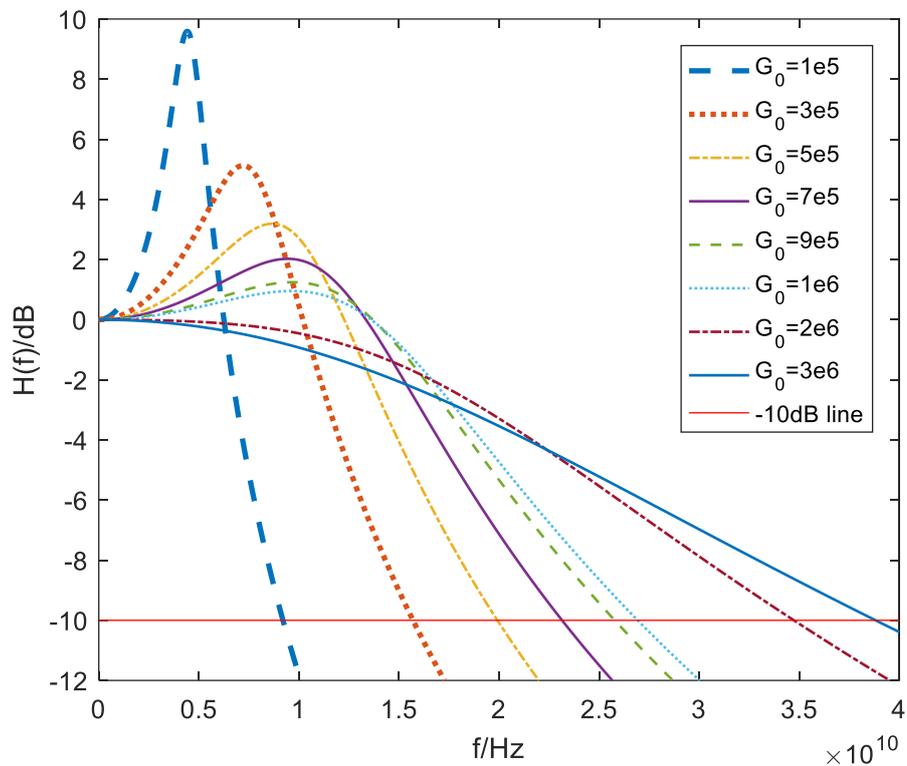


图 22 带宽随参数  $G_0$  变化响应曲线

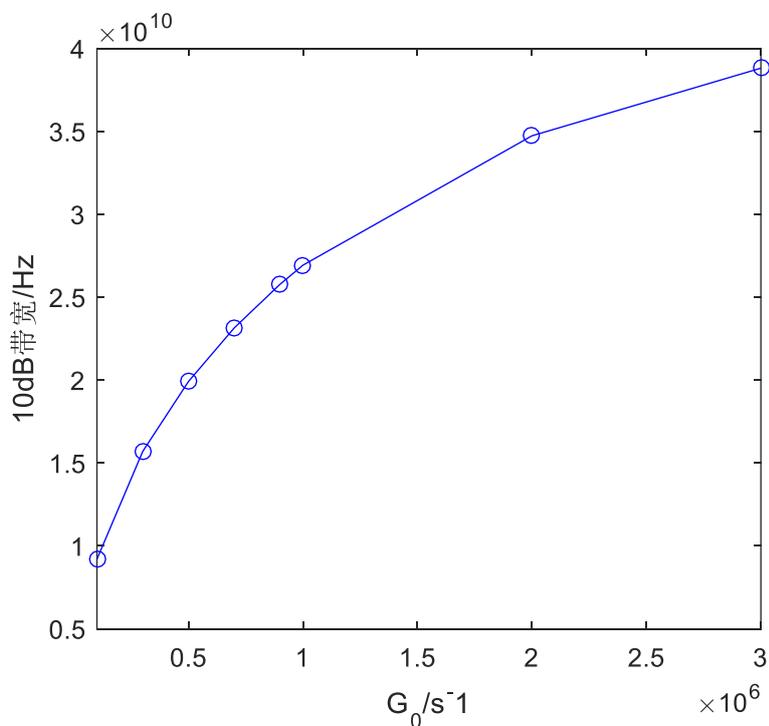


图 23 带宽随参数  $G_0$  变化趋势曲线

(3) 带宽响应随  $\tau_p$  的变化

计算条件：驱动电流：7.5mA；温度：20°C； $\tau_p$ ：1E-12~19E-12。

图 24 是带宽随参数  $\tau_p$  变化的响应曲线；根据模型计算得到了不同  $\tau_p$  值的 10dB 带宽值，图 25 是带宽随参数  $\tau_p$  变化趋势曲线；从曲线变化趋势可知，随着  $\tau_p$  值的增大带宽逐渐变窄，但通带内变得平坦。

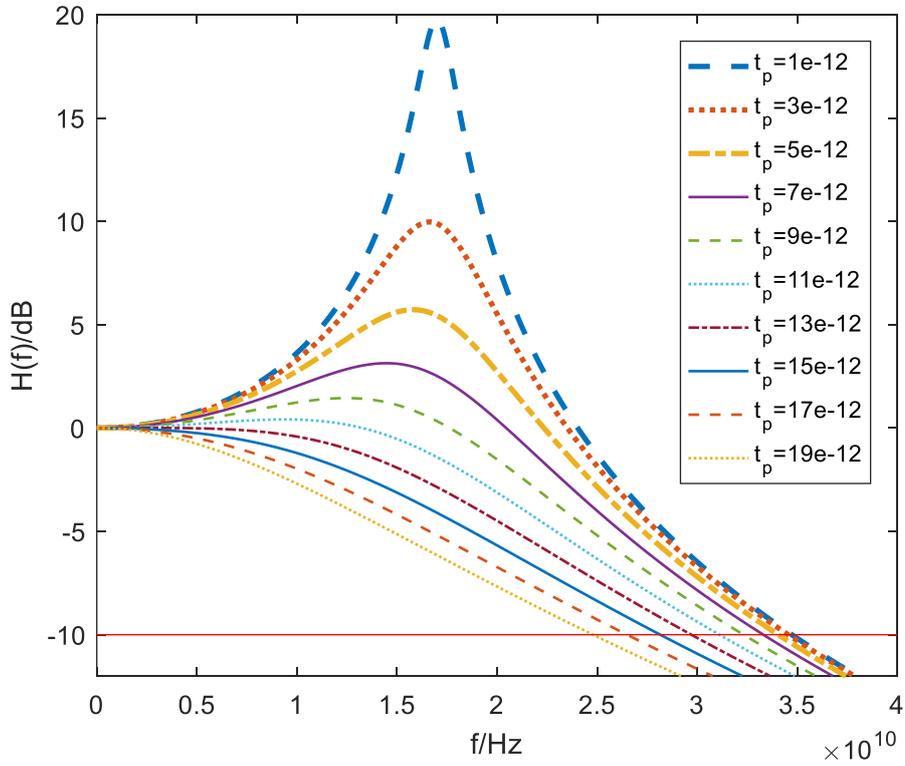


图 24 带宽随参数  $\tau_p$  变化的响应曲线

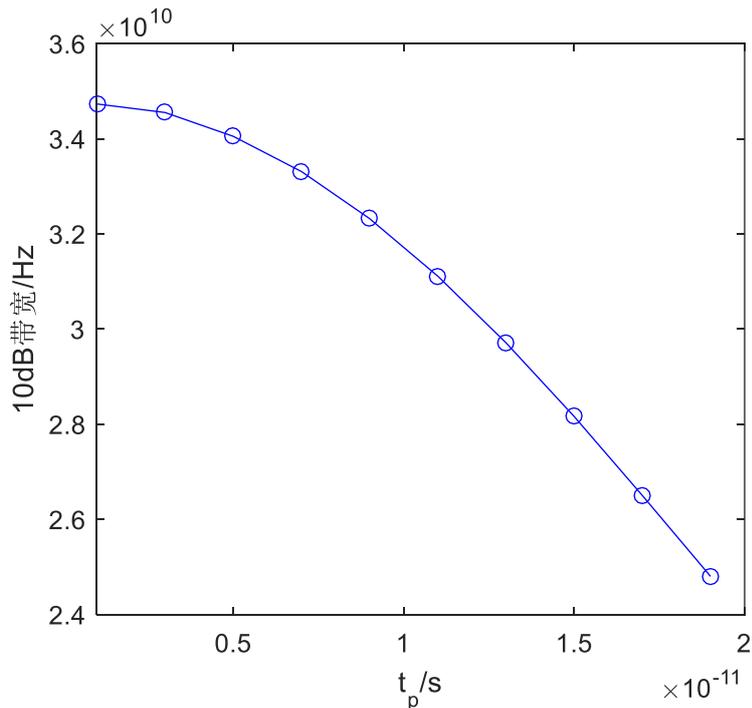


图 25 带宽随参数  $\tau_p$  变化趋势曲线

(4) 总结：提高带宽的方法

- a) 提高转换效率  $\eta_i$ ;
- b) 提高增益系数  $G_0$ ;
- c) 降低光子寿命  $\tau_p$ 。

在 VCSEL 器件的设计方案中，需要综合考虑上述三个参数的合理匹配，以提高激光器的带宽。

### 6.5 带宽曲线平坦的参数设计方法

通过图 20、图 22 和图 24 可知，增大  $\eta_i$  和  $G_0$  可以使  $H(f)$  通带内的凸起程度降低，同时增大带宽；在一定范围内减小  $\tau_p$  可以使  $H(f)$  通带内的峰值凸起程度增加，同时稍微增大带宽。

以调整  $G_0$  和  $\tau_p$  参数为例，可以通过如下方式获得更为平坦的通带特性：先增大  $G_0$  降低通带内凸起程度，同时扩展带宽，然后减小  $\tau_p$  适当补偿过调整凸起，回归到 0dB 附近，让这部分带宽曲线变平坦，同时还能增加带宽。

如图 26 所示，参数调整前，带宽响应如蓝色虚线所示，通带内凸起很高，带宽较窄，参数： $G_0=1E5$ ， $\tau_p=1.16E-11$ ；

**第一步：**调整  $G_0=3E6$ ，带宽响应如红色虚线所示，此时可发现，凸起得到有效抑制但处于过调整状态，带宽得到提高；

**第二步：**调整  $\tau_p=8E-12$ ，带宽响应如黄色虚线所示，此时可发现，凸起的过调整得到有效补偿，通带内变得平坦，且带宽进一步提高。

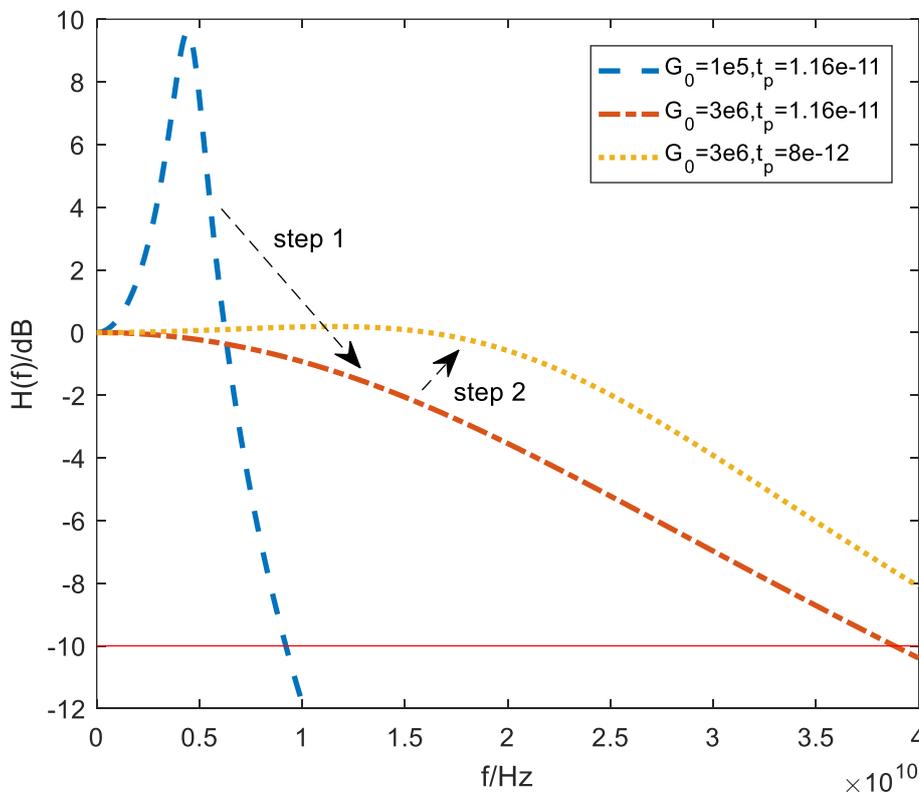


图 26 通带平坦度相关参数调整

### 6.6 总结

对 a) 小题, 首先, 基于速率方程建立了 VCSEL 激光器小信号幅频响应模型, 并根据 VCSEL 的小信号响应模型中三个约束条件(理论上的驱动电流  $I_{cur}$  与实测驱动电流值  $I$  误差约束, 理论上的激光器出光功率  $P_s$  与实测激光器光功率  $P_0$  误差约束, 理论计算出的小信号响应  $H_s(f)$  与实测的小信号响应值  $H(f)$  误差约束), 设计了优化的目标函数。然后, 通过非线性优化确定了模型中的 8 个参数值, 经验证, 小信号响应与实测数据符合较好, 画出了不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线。

对 b) 小题, 首先, 分析不同电流下的带宽响应曲线可知: 随着电流的增大, 带宽首先逐渐变宽, 并且通带逐渐变得平坦; 但当电流值增大到某一反转点后, 带宽又开始逐渐变窄。然后, 分析不同温度下的带宽响应曲线可知: 带宽随温度的升高而减小。可以发现, 带宽与电流、温度的关系, 和输出光功率与电流、温度的关系是一致的。这是因为带宽响应模型就是输入不同频率小信号获得的对应频率点输出信号的幅度(功率), 这也验证了该模型计算结果的正确性。

对 c) 小题, 通过调整参数的取值, 研究了带宽响应曲线随  $\eta_i$ 、 $G_0$  和  $\tau_p$  等参数变化的规律, 发现在环境温度和偏置电流固定时, 增大转换效率  $\eta_i$ 、增益系数  $G_0$ , 减小光子寿命  $\tau_p$ , 均可以获得更宽的带宽。

对 d) 小题, 首先, 通过调整参数的取值, 发现减小转换效率  $\eta_i$ 、增益系数  $G_0$ , 减小光子寿命  $\tau_p$  都会使得激光器在 3dB 范围内的部分频率处幅度可能高于 0 频位置。然后, 重点讨论了  $G_0$  和  $\tau_p$  与通带平坦性的关系, 提出增加通带平坦度的参数设计方案: 先增大  $G_0$  使降低通带内凸起(过调整至无凸起), 同时增加带宽; 然后减小  $\tau_p$  补偿通带内凸起的过调整, 让通带曲线变平坦, 同时进一步增加带宽。

## 七、问题四模型的建立与求解

### 7.1 宽带模型建模方法改进

经过文献调研发现, 采用等效电路模型同样可以得到 VCSEL 激光器的小信号带宽模型, 文献<sup>[6-7]</sup>给出的推导过程如下:

半导体激光器的速率方程为:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \frac{I_A}{\alpha} - \frac{N}{\tau_n} - g_0(N - N_0)(1 - \xi S)S \\ \frac{dS}{dt} = -\frac{S}{\tau_p} + \frac{\Gamma \beta S}{\tau_n} + \Gamma g_0(N - N_0)(1 - \xi S)S \end{cases} \quad (31)$$

式中:

$N$ : 有源区载流子浓度;

$t$ : 时间;

$S$ : 有源区光子密度;

$N_0$ : 平衡载流子浓度;

$I_A$ : 有源区的电流;

$\tau_n$ : 载流子复合寿命;

$\tau_p$ : 光子寿命;

$g_0$ : 光增益系数;

$\alpha$ ：电子电荷与有源区体积的乘积；

$\beta$ ：自发辐射系数；

$\xi$ ：增益压缩因子；

$\Gamma$ ：光限制因子。

上述速率方程是非线性微分方程式，为了便于小信号分析，这里将速率方程的  $I_A$ 、 $N$ 、 $S$  分解为稳态数值和随时间变化的交流小信号变量之和：

$$\begin{aligned} I_A &= I_{A0} + ie^{j\omega t} \\ N &= N_{00} + ne^{j\omega t} \\ S &= S_0 + se^{j\omega t} \end{aligned} \quad (32)$$

式中， $I_{A0}$ 、 $N_{00}$ 、 $S_0$  分别表示注入电流、载流子密度和光子密度的稳态值。

对有源区注入恒定电流时，速率方程可以变为：

$$\frac{I_{A0}}{\alpha} - \frac{N_{00}}{\tau_n} - g_0(N_{00} - N_0)(1 - \xi S_0)S_0 = 0 \quad (33)$$

$$\Gamma g_0(N_{00} - N_0)(1 - \xi S_0)S_0 - \frac{S_0}{\tau_p} + \Gamma \frac{\beta S_0}{\tau_n} = 0 \quad (34)$$

半导体光电子器件中，PN 结电压和载流子密度之间的关系可以用肖特基关系来表征：

$$N = N_0 \left[ \exp\left(\frac{qV_j}{2kT}\right) - 1 \right] \quad (35)$$

式中， $N_0$  为平衡载流子浓度， $V_j$  为结电压， $q$  为电子电荷， $k$  为玻尔兹曼常数。

将结电压也表示为稳态信号和小信号相加的模式：

$$V_j = V_{j0} + v_j e^{j\omega t} \quad (36)$$

式中， $V_{j0}$  为端口电压的稳态数值。

将式 (32) 至式 (36) 代入速率方程，在偏置点附近对速率方程进行傅里叶变换，可以得到变换的小信号速率方程：

$$V_j = i(R_{x1} + R_{x2} + j\omega L_x) \quad (37)$$

$$i = v_j(1/R_1 + j\omega C_d) + i_s \quad (38)$$

其中，

$$i_s = \alpha g_0(N_{00} - N_0)(1 - 2\xi S_0)s \quad (39)$$

$$R_d = \frac{2kT}{qI_{th}} \quad (40)$$

$$R_1 = \frac{R_d}{1 + g_0\tau_n S_0} \quad (41)$$

$$C_d = \frac{\tau_n}{R_d} \quad (42)$$

$$L_x = \frac{\tau_p R_d}{g_0\tau_n S_0} \quad (43)$$

$$R_{x1} = \frac{\xi R_d}{g_0\tau_n} \quad (44)$$

$$R_{x2} = \frac{\Gamma \beta R_d \tau_p I_{th}}{\alpha g_0 \tau_n S_0^2} \quad (45)$$

$$R_2 = R_{x1} + R_{x2} \quad (46)$$

其中,  $I_{th}$  为阈值电流, 表达式为:

$$I_{th} = \frac{\alpha}{\tau_n} \left( \frac{1}{\tau_p \Gamma g_0} + N_0 \right) \quad (47)$$

设  $i$  和  $v_j$  分别为输入端口的注入电流和端口电压, 可以得到图 27 所示的 VCSEL 激光器本征网络小信号等效电路模型。

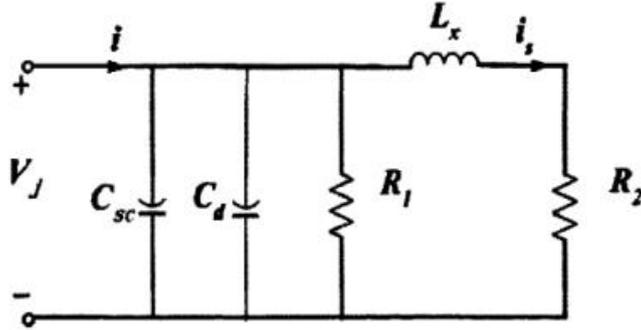


图 27 VCSEL 的本征网络小信号等效电路模型  
由电路分析, 可以导出 VCSEL 等效电路的频率响应表达式为:

$$H_A(\omega) = \frac{i(\omega)}{i_{in}(\omega)} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 - \omega^2 L_x R_1 C_d + j\omega(L_x + R_1 R_2 C_d)} \quad (48)$$

通过文献中给出的参数提取方法可得到器件的参数, 可以使用 Pspice 等软件对 VCSEL 的频率特性进行仿真计算研究。

## 7.2 如何获取更宽的带宽

### 问题分析:

通过第六章模型参数的调整, 讨论了带宽响应曲线随带宽随  $\eta_i$ 、 $G_0$  和  $\tau_p$  等参数变化的规律; 并给出理论分析: 激光器是将电能转换成光能的半导体器件, 当转换效率提高时, 产生的光子数增多, 激光器输出光功率提高从而使得带宽变宽; 固定  $\tau_p$ , 增加  $G_0$  会增加 10dB 带宽, 弛豫共振频率也会增加, 通带内增益由上冲变为平缓, 并低于直流增益; 固定  $G_0$  时, 减小  $\tau_p$  会增加 10dB 带宽, 弛豫共振频率较小变动, 但是通带内增益超过直流增益并上冲现象加剧。

### 关于参数 $G_0$ 、 $\tau_p$ 对带宽响应的理论分析:

此问题需要解决的是在驱动电流和激光器温度恒定条件下, 如何提高激光器的调制带宽。把小信号冲击响应模型推导公式显示如下:

$$(j2\pi f)n(f) = \frac{\eta_i i(f)}{q} - \frac{n(f)}{\tau_n} - \frac{G_0 S_s n(f)}{1 + \epsilon S_s} - \frac{G_0 (N_s - N_0) s(f)}{1 + \epsilon S_s} \quad (49)$$

$$(j2\pi f)s(f) = -\frac{s(f)}{\tau_p} + \frac{\beta n(f)}{\tau_n} + \frac{G_0 (N_s - N_0) s(f)}{1 + \epsilon S_s} + \frac{G_0 S_s n(f)}{1 + \epsilon S_s} \quad (50)$$

从公式中可以做如下定性推理: 当载流子数  $n(f)$  增加时, 由公式 (50) 等号右侧第 2、4 项可知, 光子数  $s(f)$  增加;  $s(f)$  增加时, 由公式 (49) 中等号右侧的第 4 项可

知,  $n(f)$  减少。由此可看出, 载流子  $n(f)$  和光子  $s(f)$  的耦合过程是这两个独立变量之间的相互影响过程。当施加外界激励电流后, 这种相互间的影响会在激光腔体内产生天然的共振现象, 把公式 (49) 和公式 (50) 相乘, 经简化合并处理后可以得到如下表达式:

$$\omega_r^2 = A \frac{G_0}{\tau_p} + B \quad (51)$$

$\omega_r$  为弛豫共振频率,  $A$  和  $B$  是系数项, 此频率决定了激光器的调制带宽范围, 因此我们需要通过调节  $G_0$  和  $\tau_p$  来提高调制带宽。

定量角度分析<sup>[4][5]</sup>如下:

归一化小信号响应:

$$H(f) \equiv \frac{h(f)}{h(0)} = \frac{Z}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \quad (52)$$

$$Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 P_s}{k + \varepsilon P_s} - \frac{G_0 (N_s - N_0)}{(1 + \varepsilon P_s / k)^2} \quad (53)$$

$$Z = \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 P_s}{\tau_p (k + \varepsilon P_s)} - \frac{(1 - \beta) G_0 (N_s - N_0)}{\tau_n (1 + \varepsilon P_s / k)^2} \quad (54)$$

公式 (52) 为经典二阶低通滤波器响应函数频域表达形式, 再次变换公式 (52) 如下:

$$\begin{aligned} H(f) &\equiv \frac{h(f)}{h(0)} = \frac{Z}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \\ \underline{\underline{\omega}} &= 2\pi f \frac{Z}{-\omega^2/Z + \frac{j\omega}{Z/Y} + 1} \\ \underline{\underline{\omega}} &= 2\pi f \frac{1}{-\omega^2/\omega_r^2 + \frac{j\omega}{Q} + 1} \end{aligned} \quad (55)$$

其中  $\omega_r = \sqrt{Z}$  和  $Q = \frac{Z}{\omega_r Y} = \frac{\sqrt{Z}}{Y}$  分别为弛豫共振频率和阻尼系数 (品质因数), 针对

本题所问, 结合公式 (56) 中的参数分析  $\omega_r = \sqrt{Z}$  的取值: 代入模型计算的参数发现公式 (54) 中右侧 3 项的数值量级分别为  $10^{18}$ 、 $10^{21}$ 、 $10^{18}$ , 简化只保留第 2 项, 可得到

$$\omega_r = \sqrt{Z} \cong \sqrt{\frac{G_0 P_s}{\tau_p (k + \varepsilon P_s)}} \approx \sqrt{\frac{G_0 P_s}{\tau_p k}} = \sqrt{S_s} \cdot \sqrt{\frac{G_0}{\tau_p}} \quad (56)$$

由公式 (56) 可知, 提高  $S_s$  的值, 或者增大  $\frac{G_0}{\tau_p}$  的比值可以提高激光器的调制带宽。

$G_0$  和  $\tau_p$  对带宽的影响分别如图 28、图 29 所示:

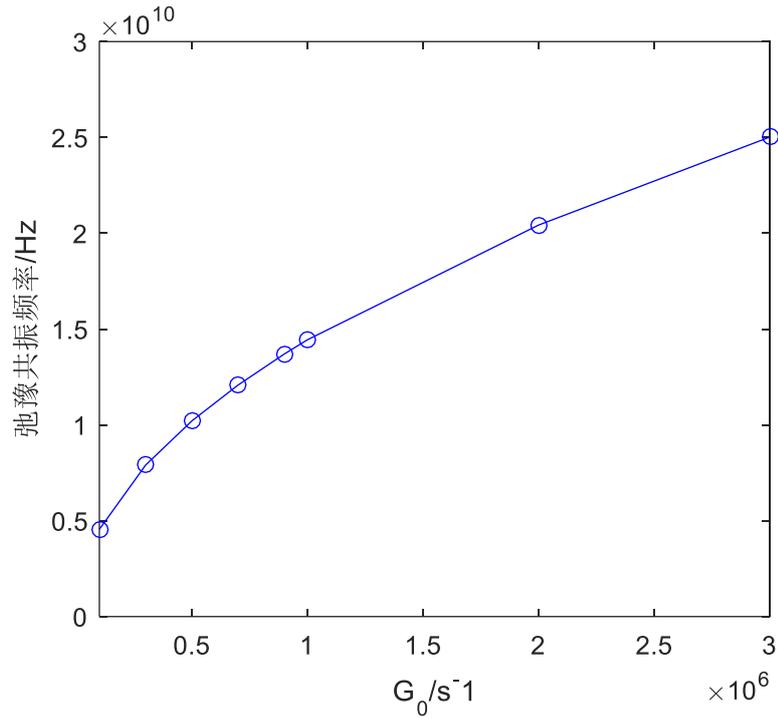


图 28 弛豫共振频率与参数  $G_0$  的关系

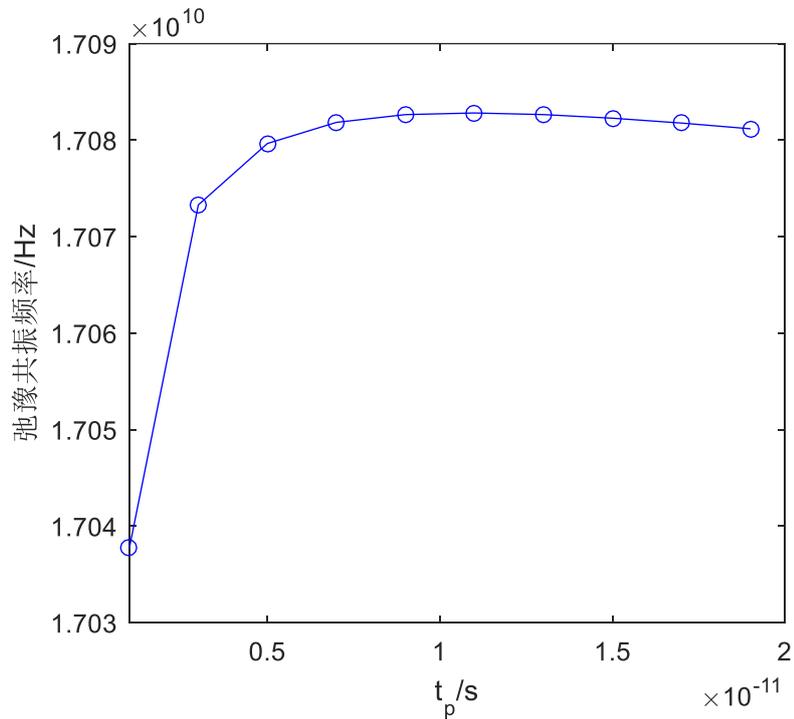


图 29 弛豫共振频率与参数  $\tau_p$  的关系

由二阶低通滤波器品质因数特性可知，当  $\omega = \omega_r$  时， $H(\omega) = Q$ ，即弛豫共振频率点的增益由  $Q$  决定，这也是阻尼因数叫法的来历。结合本题推导可做如下简化：代入模型求得的参数，发现公式 (53) 中等号右侧的 5 项数值量级分别为  $10^{10}$ 、 $10^8$ 、 $10^{10}$ 、 $10^{10}$ ，则：

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 P_s}{k + \varepsilon P_s} - \frac{G_0 (N_s - N_0)}{(1 + \varepsilon P_s / k)^2} \\
&\cong \frac{1}{\tau_p} + \frac{G_0 P_s}{k + \varepsilon P_s} - \frac{G_0 (N_s - N_0)}{(1 + \varepsilon P_s / k)^2} \quad (57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{1}{\tau_p} + G_0 S_s - G_0 (N_s - N_0) = \frac{1}{\tau_p} + G_0 (S_s - (N_s - N_0)) \\
Q &= \frac{Z}{\omega_r Y} = \frac{\sqrt{Z}}{Y} \sim \frac{\sqrt{S_s} \cdot \sqrt{\frac{G_0}{\tau_p}}}{\frac{1}{\tau_p} + G_0 (S_s - (N_s - N_0))} = \frac{\tau_p \sqrt{S_s} \cdot \sqrt{\frac{G_0}{\tau_p}}}{1 + G_0 \tau_p (S_s - (N_s - N_0))} \quad (58) \\
&\approx \frac{\sqrt{\frac{G_0}{\tau_p}}}{C \cdot \sqrt{S_s} G_0} = \frac{\sqrt{\frac{G_0}{\tau_p}}}{C \cdot \sqrt{S_s} G_0} = \frac{1}{C \cdot \sqrt{S_s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau_p} G_0}
\end{aligned}$$

因此公式 (58) 约束下, 当  $G_0$  固定时,  $\tau_p$  减小,  $Q$  增大,  $H(\omega)$  会在弛豫共振频率  $\omega_r$  处出现上冲趋势, 图 30、图 31 给出了品质因数  $Q$  与  $G_0$  和  $\tau_p$  的关系曲线。

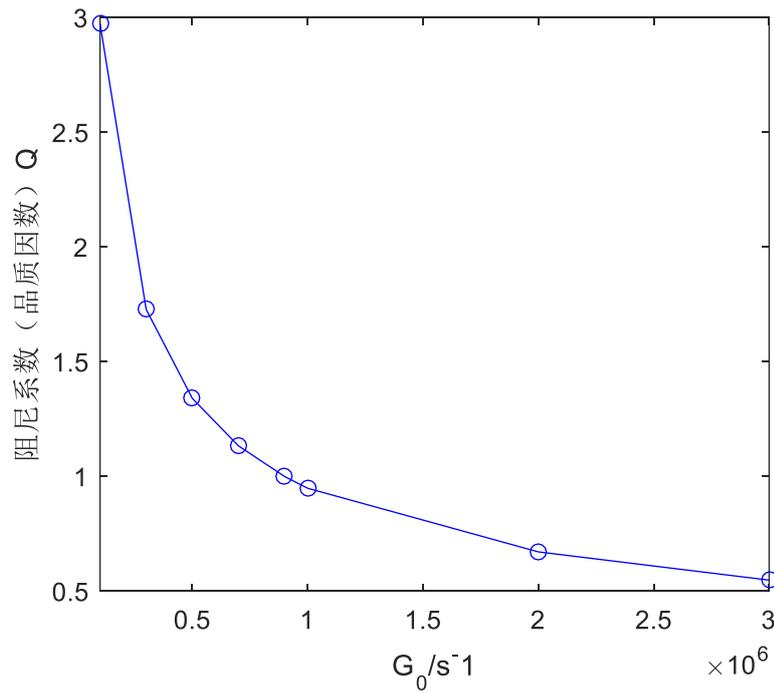


图 30 品质因数与参数  $G_0$  的关系

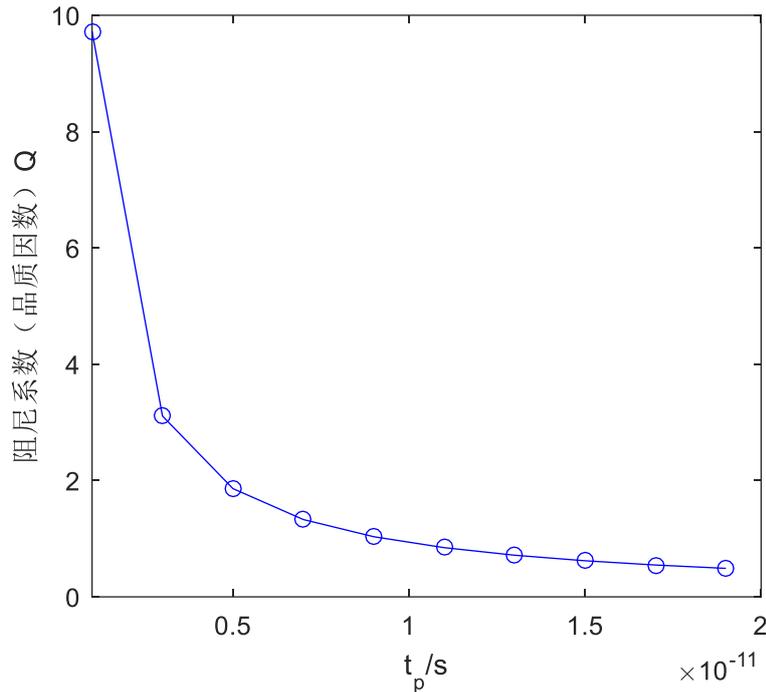


图 31 品质因数与参数  $\tau_p$  的关系

增大带宽的具体措施：

(1) 激光器是将电能转换成光能的半导体器件，当产生的光子数增多时，激光器输出光功率提高从而使得带宽变宽，这可以通过提高转换效率  $\eta_i$  来实现。

(2) 提高增益系数  $G_0$ ：可采用量子阱或应变量子阱结构，有效的减小载流子的增益恢复时间，降低阈值电流，且随着阱数的适当增加，微分增益也相应地提高，从而提高带宽<sup>[8]</sup>。

(3) 降低光子寿命  $\tau_p$ ：可知适当地缩短半导体激光器的腔长，可降低光子寿命而增大谐振频率和提高调制带宽。

(4) 控制激光器的工作温度。设法使激光器冷却，因为随着调制的不断增强，将会使激光器的温度升高，增益系数降低，进而导致激光器其他性能参数发生变化，最终使激光器工作性能变坏，带宽降低，图 19 也从模型计算方面说明了降低激光器工作温度可提高激光器的带宽。

根据理论分析，可知：固定  $\tau_p$ ，增加  $G_0$  会增加 10dB 带宽，弛豫共振频率也会增加，通带内增益由上冲变为平缓，并低于直流增益；固定  $G_0$  时，减小  $\tau_p$  会增加 10dB 带宽，弛豫共振频率较小变动，但是通带内增益超过直流增益并上冲现象加剧。从而，在采用上述手段提高带宽的同时，需要考虑通带内的平坦度。根据问题三的分析可知，为获得更为平坦的器件可以：先增大  $G_0$  使弛豫共振频率峰值降到 0 以下，再减小  $\tau_p$  使弛豫共振频率峰值增加，让这部分带宽曲线变平坦，同时还能增加带宽。

### 7.3 总结

通过文献调研采用等效电路模型推导得到 VCSEL 激光器的小信号带宽模型。推导得到弛豫共振频率数学模型以及阻尼系数（品质因数）数学模型，依据模型参数，从理论上分析了参数  $\eta_i$ 、 $G_0$ 、 $\tau_p$  等对激光器带宽的影响，并给出了四种提高带宽的措施。

## 八、总结

激光器输出的光功率强度与器件的温度相关，当器件温度（受激光器自身发热和环境温度的共同影响）改变后，激光器输出的光功率强度也会相应发生变化。在进行建模时，我们既要准确反映 VCSEL 激光器特性，还要考虑：激光器输出的功率强度与温度的关系——即该激光器可以在多大的外界环境温度范围内使用；VCSEL 的传输带宽越宽，用户上网的网速也就越快。为了适应未来的高速传输网络需求，期望设计出具有更宽带宽的激光器。本文在 VCSEL 激光器建模仿真方面完成了如下工作：

### （1）建立 L-I 模型并解算

根据附件中的 L-I 实测数据，将经验值作为初值代入模型，并设计模型解算算法以获取 L-I 模型参数 $(\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ ；模型解算后得到精确的参数，将其代入模型得到了不同温度下的 L-I 曲线。

### （2）工作温度分析

建立了激光器输出光功率与工作温度的数学模型，从该模型还可以得出，激光器的最大输出光功率 $P_{\max}(T_0)$ 基本随着环境温度 $T_0$ 线性下降，对于激光器工作环境温度的调控工作具有指导意义。也就是说，激光器要想有更高的输出光功率，其周围环境的温度必须控制在合理的较低的水平。

### （3）改进了 L-I 曲线计算数学模型

经对比分析发现，基于多项式拟合的 V-I 数据反演得到的 L-I 曲线，随着电流值的增大达到反转点后输出光功率与文献给出的计算结果相比较，存在下降过快的现象，本文针对拟合 V-I 曲线的走势明显偏离了实测数据原有的变化规律的问题，引入了二极管参数模型，得到了更加精确的 L-I 曲线，使得数据更加符合实际的物理规律。

### （4）带宽模型的建立与分析

建立了激光器小信号幅频响应参数模型，给出了参数构成及其确定方法。依据模型解算获取的新的参数画出不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线。利用建立的小信号带宽模型及参数，分析激光器的温度和激光器的偏置电流对器件带宽曲线的影响，讨论了给定条件下更宽带宽的设计方案，分析了各参数对谐振频率的影响给出参数匹配的方法使得通带内曲线更加平坦。

### （5）带宽模型探索

通过文献调研采用等效电路模型推导得到 VCSEL 激光器的小信号带宽模型。推导出弛豫共振频率数学模型以及阻尼系数（品质因数）数学模型，依据模型参数，从理论上分析了参数 $\eta_i$ 、 $G_0$ 、 $\tau_p$ 等对激光器带宽的影响，并给出了四种提高带宽的措施。

## 附录一 基于速率方程的带宽模型推导

将偏置电流和注入激光器的外部驱动电流代入文献[2]中的激光器速率方程后，

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \frac{\eta_i(I - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N}{\tau_n} - \frac{G_0(N - N_0)S}{1 + \varepsilon S} \\ \frac{dS}{dt} = -\frac{S}{\tau_p} + \frac{\beta N}{\tau_n} + \frac{G_0(N - N_0)S}{1 + \varepsilon S} \end{cases} \quad (1)$$

VCSEL 输出的光功率与光子数成正比，假定比例因子为  $k$

$$P_0 = kS \quad (2)$$

式 (1) - (2) 中符号定义如下：

$N$ ：载流子数；

$t$ ：时间；

$\eta_i$ ：注入效率；或转换效率；

$q$ ：电子电量， $1.6E-19$  库伦；

$N_0$ ：透明载流子数；

$I$ ：注入的外部驱动电流；

$I_{off}(T)$ ：与温度相关的偏置电流；

$\tau_n$ ：载流子复合寿命；

$\tau_p$ ：光子寿命；

$G_0$ ：增益系数；

$S$ ：光子数；

$\beta$ ：受激辐射耦合系数；

$\varepsilon$ ：增益压缩因子。

VCSEL 的小信号响应建模的思路为：

1. 求出稳态下的电流  $I_s$ 、载流子数  $N_s$ 、光子数  $S_s$ ；稳态，即无驱动信号情况下，激光器中的电流为直流信号，此时电流是稳定的，载流子数、光子数也都是稳定的；

2. 加载小信号（小信号为信号幅度非常小的信号，不同频率处的信号幅度不同，因此小信号是与频率相关的小幅度信号），可以假定小信号引入了与频率相关的电流、载流子数、光子数，数学表达可以写成： $i(f)$ ， $n(f)$ ， $s(f)$

3. 给 VCSEL 加载上小信号后，原来速率方程中的电流、载流子数、光子数则表示为稳态下的值与小信号下引入信号变化的值的和。

$$\begin{aligned} I(t) &= I_s + i(f)e^{j2\pi ft} \\ N(t) &= N_s + n(f)e^{j2\pi ft} \\ S(t) &= S_s + s(f)e^{j2\pi ft} \end{aligned} \quad (3)$$

其中， $i(f)$ ， $n(f)$ ， $s(f)$  足够小。

可以根据前面所有材料提到的数学表达式，主要为等式 (1) 和等式 (2)，推导出 VCSEL 的小信号响应模型数学表达式。

下面是小信号响应数学表达式推导的过程：

当外部驱动电流保持恒定，载流子数  $N$  与光子数  $S$  将在一段时间的瞬态后达到稳定状态，此时  $N$  和  $S$  对时间求导为 0（稳态下，载流子和光子数变化为 0），那么等式 (1) 可以写为：

$$\frac{\eta_i(I - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N}{\tau_n} - \frac{G_0(N - N_0)S}{1 + \varepsilon S} = 0 \quad (4)$$

$$-\frac{S}{\tau_p} + \frac{\beta N}{\tau_n} + \frac{G_0(N - N_0)S}{1 + \varepsilon S} = 0 \quad (5)$$

现在研究在已知输出光功率  $P_0$  情况下激光器中载流子的浓度问题。将  $P_o = kS$  关系式带入等式 (5)，此时求出的  $N$  为稳态下载流子浓度，记为  $N_s$ ，等式 (5) 中的第二个等式得到

$$\left. \begin{aligned} -\frac{S}{\tau_p} + \frac{\beta N_s}{\tau_n} + \frac{G_0(N_s - N_0)S}{1 + \varepsilon S} = 0 \\ P_0 = kS \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$-\frac{P_0}{k\tau_p} + \frac{\beta N_s}{\tau_n} + \frac{G_0 N_s P_0}{k + \varepsilon P_0} - \frac{G_0 N_0 P_0}{k + \varepsilon P_0} = 0$$

$$\left( \frac{\beta}{\tau_n} + \frac{G_0 P_0}{k + \varepsilon P_0} \right) N_s = \frac{G_0 N_0 P_0}{k + \varepsilon P_0} + \frac{P_0}{k\tau_p}$$

$$\frac{\beta(k + \varepsilon P_0) + \tau_n G_0 P_0}{\tau_n(k + \varepsilon P_0)} N_s = \frac{k\tau_p G_0 N_0 P_0 + P_0(k + \varepsilon P_0)}{k\tau_p(k + \varepsilon P_0)} \quad (6)$$

$$N_s = \frac{\tau_n}{\beta(k + \varepsilon P_0) + \tau_n G_0 P_0} \cdot \frac{k\tau_p G_0 N_0 P_0 + P_0(k + \varepsilon P_0)}{k\tau_p}$$

$$N_s = \frac{G_0 N_0 P_0 + P_0(k + \varepsilon P_0) / (k\tau_p)}{\beta(k + \varepsilon P_0) / \tau_n + G_0 P_0}$$

$$N_s = \frac{P_0 / (k\tau_p) + G_0 N_0 P_0 / (k + \varepsilon P_0)}{\beta / \tau_n + G_0 P_0 / (k + \varepsilon P_0)}$$

其中， $P_0$  为通过仪器测量到的激光器的实测出光功率， $(k, \tau_p, \tau_n, G_0, N_0, \varepsilon, \beta)$  为参数。根据实测光功率和参数值，从等式 (6) 可以计算出激光器中载流子浓度  $N_s$ 。

根据计算出来的载流子浓度  $N_s$  可以进一步计算激光器中用于转换成光能的激光器驱动电流  $I_{cur}$  和激光器中稳态下理论上可计算处的光子数  $S_s$ 。

将  $P_o = kS$  和等式 (6) 计算出的载流子浓度  $N_s$  带入等式 (4) 中，求出的电流  $I$  即为根据速率方程从理论上所计算出的激光器发光的驱动电流  $I_{cur}$

$$\frac{\eta_i(I_{cur} - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - \frac{G_0(N_s - N_0)P_0}{k + \varepsilon P_0} = 0 \quad (7)$$

$$I_{cur} = \frac{q}{\eta_i} \left( \frac{N_s}{\tau_n} + \frac{G_0(N_s - N_0)P_0}{k + \varepsilon P_0} \right) + I_{th0} + I_{off}(T)$$

根据计算出的稳态下载流子浓度  $N_s$ ，从等式 (4) 可以计算稳态下理论上的光子数  $S_s$

$$\frac{\eta_i(I - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - \frac{G_0(N_s - N_0)S_s}{1 + \varepsilon S_s} = 0 \quad (8)$$

在通常的 VCSEL 激光器中,  $\varepsilon S_s \ll 1$ , 根据等式 (8) 得到理论计算出的激光器稳态工作时的光子数

$$\frac{\eta_i (I - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} = G_0 (N_s - N_0) S_s \quad (9)$$

$$S_s = \frac{\eta_i (I - I_{th0} - I_{off}(T)) / q - N_s / \tau_n}{G_0 (N_s - N_0)}$$

根据前面介绍知道, 激光器输出光功率与光子数成正比, 比例因子为  $k$ , 那么根据理论计算出的光子数  $S_s$  可以计算出理论上的出光功率

$$P_{od} = k S_s \quad (10)$$

至此, 已经计算出了激光器理论的出光功率和理论上的驱动电流的值 ( $P_{od}; I_{cur}$ ), 而通过仪器可以测量出激光器的出光功率, 驱动电流, 电压为: ( $P_0; I; V$ )。

重新梳理一次上述信息, 根据实测激光器光功率  $P_0$  值和参数 ( $k, \tau_p, \tau_n, G_0, N_0, \varepsilon, \beta$ ), 可以计算出载流子浓度  $N_s$ ; 将计算出的载流子浓度  $N_s$  带入等式 (7), 可以得到理论上的驱动电流  $I_{cur}$ , 该理论值与实测驱动电流值相减可以得到第 1 个误差约束关系; 再将计算出的载流子浓度  $N_s$  带入等式 (9) 和等式 (10), 可以得到理论上的激光器出光功率, 将该理论光功率值与实测激光器光功率  $P_0$  相减可以得到第 2 个误差约束; 第 3 个误差约束将由理论计算出的小信号响应与测试的小信号响应值给出。

进一步考虑加载小信号的情况以获得小信号响应的理论表达式。将等式 (3) 带入速率方程等式 (1),

$$\frac{d(N_s + n(f)e^{j2\pi ft})}{dt} = \frac{\eta_i (I_s + i(f)e^{j2\pi ft} - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s + n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} - \frac{G_0 (N_s + n(f)e^{j2\pi ft} - N_0) (S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}{1 + \varepsilon (S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}$$

$$\frac{d(S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}{dt} = -\frac{S_s + s(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_p} + \frac{\beta (N_s + n(f)e^{j2\pi ft})}{\tau_n} + \frac{G_0 (N_s + n(f)e^{j2\pi ft} - N_0) (S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}{1 + \varepsilon (S_s + s(f)e^{j2\pi ft})} \quad (11)$$

稳态方程 (4)、(5) 中载流子浓度和光子数均为稳态理论值  $N_s$  和  $S_s$  时, 等式重写为下面的形式

$$\frac{\eta_i (I_s - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - \frac{G_0 (N_s - N_0) S_s}{1 + \varepsilon S_s} = 0 \quad (12)$$

$$-\frac{S_s}{\tau_p} + \frac{\beta N_s}{\tau_n} + \frac{G_0 (N_s - N_0) S_s}{1 + \varepsilon S_s} = 0 \quad (13)$$

将等式 (12) 和等式 (13) 带入等式 (11) 的第一个式子进行等式化解:

$$\begin{aligned}
\frac{d(N_s + n(f)e^{j2\pi ft})}{dt} &= \frac{\eta_i(I_s + i(f)e^{j2\pi ft} - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s + n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} - \frac{G_0(N_s + n(f)e^{j2\pi ft} - N_0)(S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}{1 + \varepsilon(S_s + s(f)e^{j2\pi ft})} \\
(j2\pi f)n(f)e^{j2\pi ft} &= \frac{\eta_i(I_s - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} + \frac{\eta_i i(f)e^{j2\pi ft}}{q} - \frac{n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} \\
&\quad - G_0 \cdot \frac{(N_s - N_0)S_s + S_s n(f)e^{j2\pi ft} + (N_s - N_0)s(f)e^{j2\pi ft} + n(f)s(f)e^{j2\pi(2f)t}}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)e^{j2\pi ft}} \\
&= \frac{\eta_i(I_s - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - \frac{G_0(N_s - N_0)S_s}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)e^{j2\pi ft}} \\
&\quad - \frac{G_0 n(f)s(f)e^{j2\pi(2f)t}}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)e^{j2\pi ft}} \\
&\quad + \frac{\eta_i i(f)e^{j2\pi ft}}{q} - \frac{n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} - \frac{G_0 S_s n(f)e^{j2\pi ft} + G_0(N_s - N_0)s(f)e^{j2\pi ft}}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)e^{j2\pi ft}}
\end{aligned} \tag{14}$$

增益压缩因子本身较小，它与小信号的乘积  $\varepsilon s(f)$  值较小，现考虑在等式 (14) 中假定可以忽略其影响，即  $\varepsilon s(f) \rightarrow 0$ ；再考虑等式 (14) 中第四项，该项中包含的  $e^{j2\pi(2f)t}$  相比其他项为 2 倍频高次项，高频信号在系统响应中不在考虑范围内，可忽略不考虑。由此，等式 (14) 可简化为：

$$\begin{aligned}
(j2\pi f)n(f)e^{j2\pi ft} &= \frac{\eta_i(I_s - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - \frac{G_0(N_s - N_0)S_s}{1 + \varepsilon S_s} \\
&\quad + \frac{\eta_i i(f)e^{j2\pi ft}}{q} - \frac{n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} - \frac{G_0 S_s n(f)e^{j2\pi ft}}{1 + \varepsilon S_s} - \frac{G_0(N_s - N_0)s(f)e^{j2\pi ft}}{1 + \varepsilon S_s}
\end{aligned} \tag{15}$$

根据等式 (12) 等式 (15) 的前三项为 0，在略掉因子  $e^{j2\pi ft}$  后，等式 (15) 化简为

$$(j2\pi f)n(f) = \frac{\eta_i i(f)}{q} - \frac{n(f)}{\tau_n} - \frac{G_0 S_s n(f)}{1 + \varepsilon S_s} - \frac{G_0(N_s - N_0)s(f)}{1 + \varepsilon S_s} \tag{16}$$

用同样的方法，等式 (11) 的第二个式子可以化简为

$$(j2\pi f)s(f) = -\frac{s(f)}{\tau_p} + \frac{\beta n(f)}{\tau_n} + \frac{G_0(N_s - N_0)s(f)}{1 + \varepsilon S_s} + \frac{G_0 S_s n(f)}{1 + \varepsilon S_s} \tag{17}$$

由等式 (17) 得到

$$n(f) = \frac{j2\pi f + 1/\tau_p - G_0(N_s - N_0)/(1 + \varepsilon S_s)}{\beta/\tau_n + G_0 S_s/(1 + \varepsilon S_s)} s(f) \tag{18}$$

根据前面的描述，信号的响应等于对应频率处输出与输入信号的比值，假定小信号响应为线性频率响应  $h(f)$ ，按照定义表示为小信号带来的输出信号  $p(f)$  与输入信号  $i(f)$  的比值

$$h(f) = \frac{p(f)}{i(f)} = k \frac{s(f)}{i(f)} \tag{19}$$

将等式 (18) 带入等式 (16)，并化简为等式 (19) 的形式

$$h(f) = k \frac{s(f)}{i(f)} = \frac{k\eta_i}{q} \cdot \frac{1}{\frac{[j2\pi f + 1/\tau_p - G_0(N_s - N_0)/(1 + \varepsilon S_s)] \cdot [j2\pi f + 1/\tau_n + G_0 S_s / (1 + \varepsilon S_s)]}{\beta / \tau_n + G_0 S_s / (1 + \varepsilon S_s)} + G_0(N_s - N_0)/(1 + \varepsilon S_s)} \quad (20)$$

通常，我们在通信系统里面的信号响应有如下形式

$$h(f) = \frac{X}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \quad (21)$$

将等式 (20) 写成等式 (21) 的形式，那么，

$$Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 S_s}{1 + \varepsilon S_s} - \frac{G_0(N_s - N_0)}{1 + \varepsilon S_s} \quad (22)$$

$$Z = \left[ \frac{1}{\tau_p} - \frac{G_0(N_s - N_0)}{1 + \varepsilon S_s} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 S_s}{1 + \varepsilon S_s} \right] + \left[ \frac{\beta}{\tau_n} + \frac{G_0 S_s}{1 + \varepsilon S_s} \right] \cdot \frac{G_0(N_s - N_0)}{1 + \varepsilon S_s} \quad (23)$$

$$= \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 S_s}{\tau_p(1 + \varepsilon S_s)} - \frac{(1 - \beta)G_0(N_s - N_0)}{\tau_n(1 + \varepsilon S_s)}$$

将  $P_s = kS_s$  带入等式 (22) 和等式 (23)，将稳态下的光子数  $S_s$  用光功率  $P_s$  表示

$$Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 P_s}{k + \varepsilon P_s} - \frac{kG_0(N_s - N_0)}{k + \varepsilon P_s} \quad (24)$$

$$Z = \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 P_s}{\tau_p(k + \varepsilon P_s)} - \frac{k(1 - \beta)G_0(N_s - N_0)}{\tau_n(k + \varepsilon P_s)} \quad (25)$$

等式 (16) 和等式 (17) 是忽略了  $\varepsilon s(f)$  项得到的，为了进一步提高精度，假定只忽略高阶项，而不忽略  $\varepsilon s(f)$  项，则可以得到：

$$Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 P_s}{k + \varepsilon P_s} - \frac{G_0(N_s - N_0)}{(1 + \varepsilon P_s / k)^2} \quad (26)$$

$$Z = \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 P_s}{\tau_p(k + \varepsilon P_s)} - \frac{(1 - \beta)G_0(N_s - N_0)}{\tau_n(1 + \varepsilon P_s / k)^2} \quad (27)$$

最后，响应函数需要进行归一化处理，因此不必关心刚才等式里面的 X 表达式是什么，在归一化处理时 X 被抵消掉了。归一化小信号响应为

$$H(f) \equiv \frac{h(f)}{h(0)} = \frac{Z}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \quad (28)$$

将上述的 Y 和 Z 带入等式 (28)，即可获得 VCSEL 的小信号响应数学表达式。在该表达式中存在许多的参数，需要采用非线性最优化获取最佳的参数值，使得在相同的温度和偏置电流影响下，按照等式 (28) 输出的响应  $H(f)$  与实测的响应输出一致。

至此，得到了基于速率方程的小信号带宽模型。

## 参考文献

- [1] 刘磊. 垂直腔面发射激光器光输出特性的测试研究[D]. 河北工业大学, 2007.
- [2] Mena P V, Morikuni J J, Kang S M, et al. A simple rate-equation-based thermal VCSEL model[J]. 1999, 17(5):865-872.
- [3] 郑世奇. 基于速率方程的垂直腔面发射激光器数值模拟与特性研究[D]. 北京邮电大学, 2006.
- [4] Coldren L A, Corzine S W, Mašanović M L. Diode Lasers and Photonic Integrated Circuits, Second Edition [M]. Wiley, chapter2, chapter5, 2012.
- [5] Murty M V R, Ray S K, Sale T E, et al. VCSELs for high-speed data networks[J]. Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, 2013, 8639(15):02.
- [6] 欧阳丽. 垂直腔体表面发射激光器等效电路模型的研究[D]. 华东师范大学, 2011.
- [7] 梁锋. 半导体激光器等效电路模型研究[D]. 东南大学, 2008.
- [8] 段慧. 基于速率方程的半导体激光器响应特性研究[D]. 燕山大学, 2010.
- [9] Matt Bruensteiner and George C. Papen. Extraction of VCSEL Rate-Equation Parameters for Low-Bias System Simulation [J]. IEEE JOURNAL OF SELECTED TOPICS IN QUANTUM ELECTRONICS, 5(3):487-494, 1999
- [10] John C. Cartledge, Senior Member, IEEE, and R. C. Srinivasan. Extraction of DFB Laser Rate Equation Parameters for System Simulation Purposes [J]. JOURNAL OF LIGHTWAVE TECHNOLOGY, 15(5):852-860, 1997