



“华为杯”第十四届中国研究生 数学建模竞赛

学 校 四川大学

参赛队号 10610009

队员姓名 1. 刘潇潇

2. 莫丽丽

3. 冯青

参赛密码 _____

(由组委会填写)



“华为杯”第十四届中国研究生 数学建模竞赛

题目 多波次导弹发射中的规划问题

摘 要：

高技术条件下的现代化战争，机动路线制定的好坏决定着导弹暴露时间长短。要实现机动快、暴露时间短,就必须要有合理的机动方案,其中机动路线如何选择是机动作战决策的一个重要课题^[1-3]。本文利用 Excel, Matlab^[4]和 Python 对数据进行处理,并利用 Lingo 软件对整数规划模型进行求解,主要研究了多波次导弹发射中的规划问题,包括具体的机动路线规划以及发射点的选择,同时为不同类型的发射装置分配合理的转载地域,以达到整体暴露时间最短的目标。

对于问题一,本文认为第一波次齐射的重要性要远大于第二波次,因为只有第一阶段快速的向敌方发射导弹,达到攻其不备的效果,才能占得先机,实现齐射效果最大化,为接下来的转载作业以及第二波次的发射赢得更多的时间,所以本文将本问题分为两阶段求解,并在优化第一波次时不考虑第二波次。本文首先构建相连两点间的邻接距离矩阵 J' , 计算 A、B、C 三种发射装置的时间矩阵 $T_i (i = a, b, c)$, 其次利用 Dijkstra 算法, 根据 T_i 依次求出三种发射装置分别从 D1 和 D2 出发到达各个发射点 F 的最短时间以及最短时间路径。在该问题的两波次齐射任务中, 以全部车辆行驶时间总和最小为目标构建整数规划模型, 其中 24 条路径中的最长时间路径为关键路径, 以此为基准调整 24 台车载发射装置的出发时间, 完成第一波次齐射任务具体发射点位分配及机动路线方案的制定。同样

的, 求出从 6 个转载地域到各个发射点 F 的最短时间以及最短时间路径, 以第一波次发射点到 6 个转载地域的时间加上 6 个转载地域到第二波次发射点的时间总和最小为目标, 建立整数规划模型。以第一波次发射点到第二波次发射点的最长时间路径为关键路径, 同时将其定为从第一波次发射时刻开始计时的第二波次的齐射时刻, 以此为基准调整 24 台车载发射装置从第一波次发射点的出发时间, 完成第二波次齐射任务具体发射点位分配及机动路线方案的制定。最后, 将两个波次的具体发射点位分配和制定的机动路线方案进行合并, 即可求出完整的机动路线方案。

对于问题二, 由于第一波次发射不受转载地域的影响, 其计算结果和问题一相同, 对于第二阶段, 按照 A、B、C 三种速度分别计算增设的 5 个备选转载地域到 60 个发射点 F 的最短时间和最短时间路径。以第一波次发射点到 8 个转载地域的时间加上 8 个转载地域到第二波次发射点的时间总和最小为目标, 建立整数规划模型, 最终确定临时增设的 2 个转载地域为 J25 和 J34。

对于问题三, 首先计算出第一波次的 24 个发射点和 6 个备选隐蔽待机点到其余 36 个发射点的最短时间和最短时间路径, 最后以第一波次发射时刻开始到第二波次发射结束所经过的时间最小为目标, 建立整数规划模型。计算结果表明应选择 J14 和 J15 作为隐蔽待机点, 其中 J14 容纳 2 台 C 类发射装置, J15 容纳一台 C 类发射装置。

对于问题四, 为了找到道路网络中的重要节点, 保障发射任务的完成, 本文提出了基于度和集聚系数的节点重要性度量方法, 将该方法应用于道路网络, 并以本文为例评估该区域道路网络的节点重要性。结果表明: 道路网络中的节点重要度与通过该节点的度, 集聚系数有关, 最后使用该方法得到了道路网络节点重要度的排序, 求解的结果更贴近实际情况。

对于问题五, 在保证整体暴露时间尽可能短的情况下, 必须考虑适当分散我方车载装置, 同时, 还要尽量缩短单台发射装置的最长暴露时间。我们在问题一第二波次求解的模型基础上增加了一个对转载地域的约束, 即在完成两个波次齐射任务的过程中允许在该点进行转载作业的发射装置的最大数量, 通过求解得到该数值为 5 时可得到最优结果。最后得到 24 台车载发射装置对应的转载地域和第二波次的发射点, 以及整体暴露时长和单台发射装置的暴露时长。

关键词: 多波次导弹发射规划 时间矩阵 整数规划 集聚系数 分散策略

目录

1. 问题重述	1
1.1 问题背景.....	1
1.2 需要解决的问题.....	2
2. 基本假设	3
3. 符号说明	4
4. 问题一	5
4.1 问题分析.....	5
4.2 模型建立及问题求解.....	5
5 问题二	9
5.1 问题分析.....	9
5.2 模型建立及问题求解.....	9
6 问题三	12
6.1 问题分析.....	12
6.2 模型建立及问题求解.....	12
7 问题四	15
7.1 问题分析.....	15
7.2 问题求解.....	15
8 问题五	18
8.1 问题分析.....	18
8.2 模型建立及问题求解.....	18
参考文献	22
附 录	23

1. 问题重述

1.1 问题背景

随着导弹武器系统的不断发展，导弹在未来作战中将发挥越来越重要的作用，导弹作战将是未来战场的主要作战样式之一。

为了提高导弹部队的生存能力和机动能力，常规导弹大都使用车载发射装置，平时在待机地域隐蔽待机，在接受发射任务后，各车载发射装置从待机地域携带导弹沿道路机动到各自指定发射点位实施发射。每台发射装置只能载弹一枚，实施多波次发射时，完成了上一波次发射任务的车载发射装置需要立即机动到转载地域（用于将导弹吊装到发射装置的专门区域）装弹，完成装弹的发射装置再机动至下一波次指定的发射点位实施发射。连续两波次发射时，每个发射点位使用不超过一次。

某部参与作战行动的车载发射装置共有 24 台，依据发射装置的不同大致分为 A、B、C 三类，其中 A、B、C 三类发射装置的数量分别为 6 台、6 台、12 台，执行任务前平均部署在 2 个待机地域（D1，D2）。所属作战区域内有 6 个转载地域（Z01~ Z06）、60 个发射点位（F01~ F60），每一发射点位只能容纳 1 台发射装置。各转载地域最多容纳 2 台发射装置，但不能同时作业，单台转载作业需时 10 分钟。各转载地域弹种类型和数量满足需求。相关道路情况如图 1 所示（道路节点 J01~J62），相关要素的坐标数据如附件 1 所示。图 1 中主干道路（图中红线）是双车道，可以双车通行；其他道路（图中蓝线）均是单车道，只能在各道路节点处会车。A、B、C 三类发射装置在主干道路上的平均行驶速度分别是 70 公里/小时、60 公里/小时、50 公里/小时，在其他道路上的平均行驶速度分别是 45 公里/小时、35 公里/小时、30 公里/小时。

部队接受发射任务后，需要为每台车载发射装置规划每个波次的发射点位及机动路线，要求整体暴露时间（所有发射装置的暴露时间之和）最短。本问题中的“暴露时间”是指各车载发射装置从待机地域出发时刻至第二波次发射时刻为止的时间，其中发射装置位于转载地域内的时间不计入暴露时间内。暂不考虑发射装置在发射点位必要的技术准备时间和发射后发射装置的撤收时间。

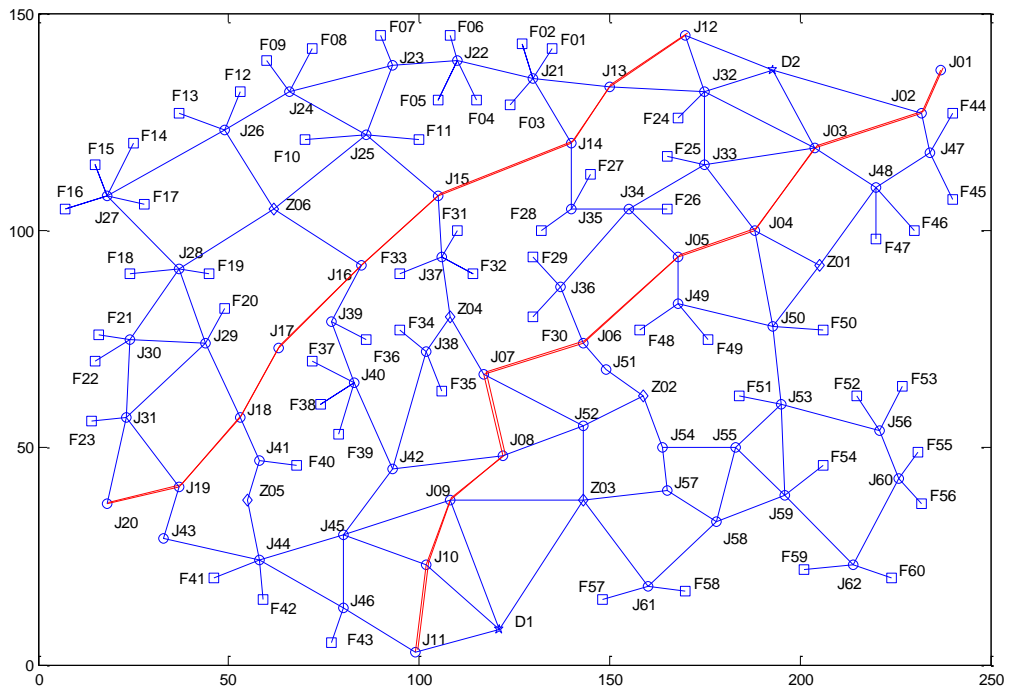


图1 作战区域道路示意图

1.2 需要解决的问题

围绕多波次导弹发射中的任务规划，本文依次解决如下问题：

(1) 为 24 台车载发射装置设计规划出完成两个波次的齐射任务（齐射是指同一波次的导弹同一时刻发射）所需要的具体发射点位分配及机动路线方案，使得完成两个波次发射任务的整体暴露时间最短。

(2) 在道路节点 J25、J34、J36、J42、J49 附近临时增设 2 个转载地域（坐标就取相应节点的坐标）的基础上，以完成问题一中的两个波次发射任务的整体暴露时间最短为目标，求解出可以增设的 2 个临时转载地域。

(3) 在转载地域仍为事先布设的 6 个的前提下，新增 3 台 C 类发射装置用于第二波次的发射，以完成问题一中的两个波次发射任务的整体暴露时间最短为目标，为这 3 台发射装置从节点 J04、J06、J08、J13、J14、J15 中选出最优的隐蔽待机点。

(4) 结合图 1 路网特点，考虑攻防双方的对抗博弈，建立合理的评价指标，量化分析该路网最可能受到敌方攻击破坏的 3 个道路节点。

(5) 在机动方案的拟制中，既要考虑整体暴露时间尽可能短，也要规避敌方的侦察和打击，采用适当分散机动的策略，同时还要缩短单台发射装置的最长暴露时间。综合考虑这些因素，重新讨论问题（1）。

2. 基本假设

由于需要确定车载发射装置的行驶路径和经过各个节点的时刻,在整个求解过程中,假设:

假设 1 第一波次齐射的重要性要远大于第二波次;

假设 2 在待机区域同时出发的车辆,若为相同型号,则默认一前一后同时出发且不考虑两车之间的安全距离;若为不同型号,则认为速度大的车辆优先出发;

假设 3 在道路节点处允许超车;

假设 4 车辆可多次进入转载地域,装弹或隐蔽;

假设 5 不考虑发射装置在发射点位必要的技术准备时间和发射后发射装置的撤收时间;

问题三中,进一步做出以下假设:

假设 6 车载发射装置可在隐蔽节点停留隐蔽,只要满足到达发射点的时刻是第二波次的齐射时刻即可。

3. 符号说明

符号	意义
s	待机区域, $s \in D1, D2$
c	车载发射装置, $c=1,2,3$ 分别表示 A、B、C 三类
f	发射点, $f \in F01, F02, \dots, F60$
x_{scf}	若发射装置 c 从第 s 个待机地域前往发射点 f , 值为 1, 否则为 0
t_{icf}	表示发射装置 c 从第 s 个待机地域前往发射点 f 的最短时间
i	第一波次发射点位, $i=1,2,\dots,24$
j	转载地域, $j \in Z01, Z02, \dots, Z06$
j	问题二: 已布设的转载地域和备选转载地域 (8 个)
k	第二波次备选发射点, $k=1 \dots 36$ 分别表示第二波次发射点的可选位置
f_{zij}	第 i 个发射点到转载地域 j 的最短时间
azf_{jk}	A 类发射装置经过转载地域 j 前往发射点 k 的最短时间
bzf_{jk}	B 类发射装置经过转载地域 j 前往发射点 k 的最短时间
czf_{jk}	C 类发射装置经过转载地域 j 前往发射点 k 的最短时间
x_{ijk}	若从第 i 个发射点经过转载地域 j 前往发射点 k , 值为 1, 否则为 0
y_i	问题二: 若选择道路节点 i 为转载地域, 值为 1, 否则为 0
m	问题三: 新增的 3 台发射装置
n	问题三: 备选隐蔽待机点
if_{nk}	C 类车从第 j 个节点到发射点 k 的最短时间
y_{mnk}	若 m 发射装置在 n 节点隐蔽待机并前往发射点 k , 值为 1, 否则为 0
N	问题五: 转载地域在完成两个波次齐射任务的过程中允许在该点进行转载作业的发射装置的最大数量

4. 问题一

4.1 问题分析

问题一要求实施两个波次的齐射任务，每个波次各发射 24 枚导弹。给出具体发射点位分配及机动路线方案，使得完成两个波次发射任务的整体暴露时间最短。题目中作战区域共 130 个节点且各点坐标已给出，则通过两点间距离公式可求出任意两节点间的距离，但最终目标要以时间为衡量单位，因此本文利用所给三种发射装置的速度，将距离矩阵转换成时间矩阵，用作接下来的规划计算。在实际作战中，导弹发射系统应该兼顾攻防两种情况，既可以快速准确的完成发射任务，也能够起到良好的防御作用。在该问题的两个波次的齐射任务中，本文认为第一波次的发射对整体暴露时间的影响程度要大于第二波次，因为只有在第一阶段快速的向敌方发射导弹，达到攻其不备的效果，才能占得先机，为接下来的转载作业以及第二波次的发射赢得更多的时间，所以本文在选择第一波次的发射点时，优先考虑的是与待机区域 D1、D2 的距离，进一步地，选择与第一波次发射点相近的转载地域进行转载作业，最后第二波次发射点的选择也是基于与转载地域之间的距离。

另外，本文在最后调整 24 台车载发射装置的出发时刻以及经过各个道路节点的到达时刻和离开时刻时考虑了实际情况中有可能在非主干道路上会发生的车会问题和追击问题，通过调整时间避免两车相撞的情况发生。比如，C 车和 A 车都会经过 J54—J55 连通的道路（单车道），根据 Lingo 求解出的结果，C 车会比 A 车从 J54 较早出发，到达 J55 点的时刻却晚于 A 车，这说明在 C 车行驶过程中会被 A 车超车，但是单车道限制了超车情况的发生，此时需要调整 A 车和 C 车在 J54、J55 的到达时刻和离开时刻。若驶离 J55 节点后，A 车和 C 车仍将在相同路径上行驶，调整的方法是控制二者到达 J55 点的时间相同，即 C 车将以 A 车的到达时刻到达 J55，进而调整 C 车从 J54 出发的时间，并依次向前调整 C 车的时间；若驶离 J55 节点后，A 车和 C 车将在不同路径上行驶，调整的方法是控制二者驶离 J54 点的时间相同，即 A 车将以 C 车的离开时刻驶离 J54，进而调整 A 车从 J55 出发的时间，并依次向后调整 A 车的时间。

4.2 模型建立及问题求解

本文将问题一分成两个阶段进行分析，具体求解过程如下：

1. 第一波次发射点的确定

步骤 1：根据坐标计算出作战区域任意两点之间的距离得到距离矩阵 J ，并根据任意两点间是否相连构建 0-1 邻接矩阵 M ，其中 0 表示两点间无线段（道路）连接，1 表示两点间有线段相连，不考虑通过多点相连的情况。 J 与 M 相乘得到图中相连两点间的距离矩阵 $J'=J*M$ 。

步骤 2：根据 A、B、C 三类发射装置的行驶速度以及距离矩阵 J' ，得到 A、B 和 C 三类发射装置时间矩阵 T_a 、 T_b 和 T_c 。注意三类装置在双车道及单车道上的行驶速度不同，计算时间时需按照道路类型选择相应的行驶速度。

步骤 3：利用 Dijkstra 算法，根据 T_a 、 T_b 和 T_c 依次求出 A、B、C 三种发射装置分别从 D1 和 D2 出发到达各个发射点 F 的最短时间以及最短时间路径，此时共有 360 条最短时间路径

步骤 4：以全部车辆行驶时间和最小为目标构建整数规划模型，求解最优的路径选择及发射装置分配方案。整数规划模型^[5]构建如下：

$$\begin{aligned} \min T &= x_{scf} t_{icf} \\ s.t. &\left\{ \begin{aligned} \sum_{f=1}^{60} x_{scf} &= 3, c=1, 2, \forall s & (1) \\ \sum_{f=1}^{60} x_{scf} &= 6, k=3, \forall s & (2) \\ \sum_{s=1}^2 \sum_{c=1}^3 x_{scf} &\leq 1, \forall f & (3) \\ x_{scf} &= 0 \text{ or } 1 & (4) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

其中， s 表示待机地域 D1、D2； $c=1$ 表示 A 类车载发射装置， $c=2$ 表示 B 类车载发射装置， $c=3$ 表示 C 类车载发射装置； f 表示作战地域中的 60 个发射点； $x_{scf}=1$ 表示发射装置 c 从第 s 个待机地域前往发射点 f ，否则为 0； t_{icf} 表示发射装置 c 从第 s 个待机地域前往发射点 f 的最短时间。

目标函数表示从 0 时刻开始到完成第一波次齐射任务所需的总时间最短；约束条件(1)确保了从每个待机地域出发的 A 类和 B 类车载发射装置的数量均为 3；约束条件(2)确保了从每个待机地域出发的 C 类车载发射装置的数量为 6；约束条件(3)确保了每一发射点位只能容纳 1 台发射装置；约束条件(4)将变量 x_{scf} 设置为 0-1 变量。

将该数学模型利用 Lingo 软件^[6]进行求解，找到以下 24 个发射点，以及对应的发射装置类型：

表一 第一波次的发射点（问题一）

发射车编号	待机区域编号	发射点
A01	D1	F31
A02	D1	F32
A03	D1	F33
A04	D2	F01
A05	D2	F26
A06	D2	F48
B01	D1	F29
B02	D1	F30
B03	D1	F35
B04	D2	F02
B05	D2	F03
B06	D2	F49
C01	D1	F34
C02	D1	F41
C03	D1	F42
C04	D1	F43

C05	D1	F57
C06	D1	F58
C07	D2	F24
C08	D2	F25
C09	D2	F44
C10	D2	F45
C11	D2	F46
C12	D2	F47

步骤 5: 为了确保该阶段所有装置的整体暴露时间最小, 以步骤 4 中模型求解得到的 24 条路径中的最长时间路径为关键路径, 同时将该最长时间定为从 0 时刻开始计时的第一波次的齐射时刻, 以此为基准调整 24 台车载发射装置的出发时间, 并根据时间矩阵 $T_i (i = a, b, c)$ 求出每条路径所经过节点的到达时刻和离开时刻, 完成第一波次齐射任务具体发射点位分配及机动路线方案的制定。

2. 第二波次发射点的确定

同第一阶段类似, 首先依据时间矩阵 $T_i (i = a, b, c)$, 利用 Dijkstra 算法依次求出三种速度情况下从 6 个转载地域到各个发射点 F 的最短时间以及最短时间路径。由于第一波次的 24 个发射点以及对应的车辆类型已经确定, 在第二阶段的问题求解时可以以第一波次发射点到 6 个转载地域的时间加上 6 个转载地域到第二波次发射点的时间总和最小为目标, 建立整数规划模型并通过 Lingo 软件进行求解。具体模型如下:

$$\min T = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{36} (fz_{ij} + azf_{jk})x_{ijk} + \sum_{i=7}^{12} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{36} (fz_{ij} + bzf_{jk})x_{ijk} + \sum_{i=13}^{24} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{36} (fz_{ij} + czf_{jk})x_{ijk}$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{36} x_{ijk} = 1, \forall i & (1) \\ \sum_{i=1}^{24} \sum_{k=1}^{36} x_{ijk} \geq 2, \forall j & (2) \\ \sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^6 x_{ijk} \leq 1, \forall k & (3) \\ \sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{36} x_{ijk} = 24 & (4) \\ x_{ijk} = 0 \text{ or } 1 & (5) \end{cases}$$

其中, i 表示第一波次发射点位; j 表示 6 个转载地域; k 表示除去第一波次的 24 个发射点后, 剩余的 36 个可供第二波次选择的发射点; fz_{ij} 表示第 i 个发射点到转载地域 j 的最短时间; azf_{jk} 表示 A 类发射装置经过转载地域 j 前往发射点 k 的最短时间, bzf_{jk} 表示 B 类发射装置经过转载地域 j 前往发射点 k 的最短时间,

c_{zfk} 表示 C 类发射装置经过转载地域 j 前往发射点 k 的最短时间, $x_{ijk} = 1$ 表示从第 i 个发射点经过转载地域 j 前往发射点 k , 否则为 0。

目标函数表示 3 类车在第二阶段所需要的总时间最短; 约束条件(1)确保了实施第二波次齐射任务时, 选择的 24 个发射点位中的每一个发射点位只能容纳 1 台发射装置; 约束条件(2)确保了每个转载地域都至少有两台车载发射装置前往进行转载作业; 约束条件(3)确保了实施两个波次齐射任务时每个发射点位使用不超过一次; 约束条件(4)确定了实施第二波次齐射任务的行动方案; 约束条件(5)将变量 x_{ijk} 设置为 0-1 变量。

通过该计算结果可以确定 24 辆车载发射装置对应的转载地域和第二波次的发射点, 具体路径见下表:

表二 转载地域和第二波次的发射点 (问题一)

发射车编号	待机区域编号	第一波次发射点	转载地域	第二波次发射点
A01	D1	F31	Z04	F39
A02	D1	F32	Z04	F38
A03	D1	F33	Z04	F37
A04	D2	F01	Z06	F18
A05	D2	F26	Z02	F59
A06	D2	F48	Z01	F56
B01	D1	F29	Z04	F36
B02	D1	F30	Z02	F27
B03	D1	F35	Z04	F10
B04	D2	F02	Z06	F19
B05	D2	F03	Z06	F13
B06	D2	F49	Z01	F55
C01	D1	F34	Z04	F11
C02	D1	F41	Z05	F40
C03	D1	F42	Z05	F23
C04	D1	F43	Z05	F20
C05	D1	F57	Z03	F54
C06	D1	F58	Z03	F60
C07	D2	F24	Z06	F12
C08	D2	F25	Z01	F50
C09	D2	F44	Z01	F51
C10	D2	F45	Z01	F52
C11	D2	F46	Z01	F53
C12	D2	F47	Z01	F28

为保证该阶段暴露时间的整体暴露时间最小, 以上表计算出 24 条路径中从第一波次发射点到第二波次发射点的最长时间路径为关键路径, 同时将该最长时间定为从第一波次发射时刻开始计时的第二波次的齐射时刻, 以此为基准调整

24 台车载发射装置从第一波次发射点的出发时间，并根据时间矩阵 T_i 求出每条路径所经过的转载地域和道路节点的到达时刻和离开时刻，完成第二波次齐射任务具体发射点位分配及机动路线方案的制定。

最后，将两个波次的具体发射点位分配和制定的机动路线方案进行合并，就可得出完成两个波次发射任务的整体暴露时间为 8638.8 分钟（143.98 小时），其中从开始到完成第一波次发射任务的整体暴露时间为 2989.2 分钟（49.82 小时），从第二波次开始时刻到完成第二波次发射任务的整体暴露时间为 5649.6 分钟（94.16 小时）。具体的机动路线方案详见文件 E10610009.xls。

5 问题二

5.1 问题分析

转载地域的合理布设是问题的“瓶颈”之一。问题二在除去已布设的 6 个转载地域外，可选择在道路节点 J25、J34、J36、J42、J49 附近临时增设 2 个转载地域，因此，应该如何布设临时转载地域，使得完成两个波次发射任务的整体暴露时间最短？解题的基本思路和问题一大致相同，也分为两个阶段进行分析，其中第一阶段不受转载地域的影响，其计算结果和问题一相同，重点需求解第二阶段转载地域的选择以及第二波次发射点的选择。

5.2 模型建立及问题求解

首先考虑第二阶段中转载地域的选择，由于本题中增设了 5 个备选转载地域，可将其节点编号对应为转载地域编号：J25-Z07，J34-Z08，J36-Z09，J42-Z10，J49-Z11。然后按照问题一中的方法，计算出增设的 5 个备选转载地域按照 A、B、C 三种速度分别到 60 个发射点 F 的最短时间和最短时间路径。接下来，可以以第一波次发射点到 8 个转载地域的时间加上 8 个转载地域到第二波次发射点的时间总和最小为目标，建立整数规划模型并通过 Lingo 软件进行求解。具体模型如下：

$$\min T = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^{11} \sum_{k=1}^{36} (fz_{ij} + azf_{jk})x_{ijk} + \sum_{i=7}^{12} \sum_{j=1}^{11} \sum_{k=1}^{36} (fz_{ij} + bzf_{jk})x_{ijk} + \sum_{i=13}^{24} \sum_{j=1}^{11} \sum_{k=1}^{36} (fz_{ij} + czf_{jk})x_{ijk}$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{11} \sum_{k=1}^{36} x_{ijk} = 1, \forall i & (1) \\ \sum_{i=1}^{24} \sum_{k=1}^{36} x_{ijk} \geq 2, \forall j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 & (2) \\ \sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^{11} x_{ijk} \leq 1, \forall k & (3) \\ \sum_{i=1}^{24} \sum_{k=1}^{36} x_{ijk} \leq 864y_j, \forall j = 7, 8, 9, 10, 11 & (4) \\ \sum_{j=7}^{11} y_j = 2 & (5) \\ \sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{36} x_{ijk} = 24 & (6) \\ x_{ijk} = 0 \text{ or } 1 & (7) \\ y_j = 1 \text{ or } 0 & (8) \end{cases}$$

其中, i 表示第一波次发射点位; $j=1, 2, \dots, 6$ 表示已布设的转载地域, $j=7, 8, \dots, 11$ 表示新增加的备选转载地域; k 表示除去第一波次的 24 个发射点后, 剩余的 36 个可供第二波次选择的发射点; fz_{ij} 表示第 i 个发射点到转载地域 j 的最短时间; azf_{jk} 表示 A 类发射装置经过转载地域 j 前往发射点 k 的最短时间, bzf_{jk} 表示 B 类发射装置经过转载地域 j 前往发射点 k 的最短时间, czf_{jk} 表示 C 类发射装置经过转载地域 j 前往发射点 k 的最短时间, $x_{ijk} = 1$ 表示从第 i 个发射点经过转载地

域 j 前往发射点 k , 否则为 0; $y_j = 1$ 表示选择道路节点 i 为转载地域, 否则为 0。

目标函数表示 3 类车在第二阶段所需要的总时间最短; 约束条件(1)确保了实施第二波次齐射任务时, 选择的 24 个发射点位中的每一个发射点位只能容纳 1 台发射装置; 约束条件(2)确保了已布设的 6 个转载地域都至少有两台前往车载发射装置前往进行转载作业; 约束条件(3) 确保了实施两个波次齐射任务时每个发射点位使用不超过一次; 约束条件(4)表示是否选择该转载地域; 约束条件(5) 确保了从备选转载地域中只临时增设 2 个转载地域; 约束条件(6)确定了实施第二波次齐射任务的行动方案; 约束条件(7)将变量 x_{ijk} 设置为 0-1 变量; 约束条件(8)将变量 y_j 设置为 0-1 变量。

通过该计算结果可看出, 临时增设的 2 个转载地域为 Z07 和 Z08, 即 J25 和 J34, 同时也可确定 24 台车载发射装置对应的转载地域和第二波次的发射点, 具体路径见下表:

表三 转载地域和第二波次的发射点（问题二）

发射车编号	待机区域编号	第一波次发射点	转载地域	第二波次发射点
A01	D1	F31	Z06	F12
A02	D1	F32	Z07 (J25)	F09
A03	D1	F33	Z06	F13
A04	D2	F01	Z07 (J25)	F07
A05	D2	F26	Z08 (J34)	F04
A06	D2	F48	Z08 (J34)	F05
B01	D1	F29	Z02	F59
B02	D1	F30	Z02	F55
B03	D1	F35	Z04	F36
B04	D2	F02	Z07 (J25)	F10
B05	D2	F03	Z07 (J25)	F11
B06	D2	F49	Z08 (J34)	F06
C01	D1	F34	Z04	F38
C02	D1	F41	Z05	F40
C03	D1	F42	Z05	F20
C04	D1	F43	Z05	F23
C05	D1	F57	Z03	F54
C06	D1	F58	Z03	F60
C07	D2	F24	Z08 (J34)	F27
C08	D2	F25	Z08 (J34)	F28
C09	D2	F44	Z01	F50
C10	D2	F45	Z01	F51
C11	D2	F46	Z01	F53
C12	D2	F47	Z01	F52

其中第一波次的具体发射点位分配和制定的机动路线与问题一的结果相同，完成两个波次发射任务的整体暴露时间为 4524.0 分钟（75.40 小时），其中从开始到完成第一波次发射任务的整体暴露时间为 2989.2 分钟（49.82 小时），从第二波次开始时刻到完成第二波次发射任务的整体暴露时间为 1534.8 分钟（25.58 小时）。

6 问题三

6.1 问题分析

该问题多增加了 3 台 C 类发射装置用于第二波次的发射, 由于被替代的 3 台 C 类发射装置返回待机地域的时间并不计入暴露时间, 同时新增加的 3 台 C 类发射装置可不经转载地域直接到达发射点, 因此考虑在 A 类和 B 类发射装置保持不变的基础上, 从原有的 12 台 C 类发射装置中选出 9 台, 再加上新增加的 3 台 C 类发射装置, 采用组合优化的思想求解出最优结果。其中, 根据本文设定的假设, 新增加的 3 台 C 类发射装置可在隐蔽点停留隐蔽, 只要满足到达发射点的时刻是第二波次的齐射时刻即可。

6.2 模型建立及问题求解

首先依据时间矩阵 $T_i (i = a, b, c)$ 计算出第一波次的 24 个发射点到其余 36 个发射点的最短时间和最短时间路径, 接下来计算出 6 个备选隐蔽待机点到其余 36 个发射点的最短时间和最短时间路径, 最后以第一波次发射时刻开始到第二波次发射结束所经过的时间最小为目标, 建立整数规划模型并通过 Lingo 软件进行求解。具体模型如下:

$$\begin{aligned}
\min T = & \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{36} (fz_{ij} + azf_{jk})x_{ijk} + \sum_{i=7}^{12} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{36} (fz_{ij} + bzf_{jk})x_{ijk} + \sum_{i=13}^{24} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{36} (fz_{ij} + czf_{jk})x_{ijk} \\
& + \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^6 \sum_{k=1}^{36} if_{nk} y_{mnk} \\
s.t. & \left\{ \begin{aligned}
& \sum_{n=1}^6 \sum_{k=1}^{36} y_{mnk} = 1, \quad \forall m & (1) \\
& \sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^6 x_{ijk} + \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^6 y_{mnk} \leq 1, \quad \forall k & (2) \\
& \sum_{m=1}^3 \sum_{k=1}^{36} y_{mnk} \leq 2, \quad \forall n & (3) \\
& \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{36} x_{ijk} = 1, \quad i = 1 \dots 12 & (4) \\
& \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{36} x_{ijk} \leq 1, \quad i = 13 \dots 24 & (5) \\
& \sum_{i=1}^{24} \sum_{k=1}^{36} x_{ijk} \geq 2, \quad \forall j & (6) \\
& \sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^6 x_{ijk} \leq 1, \quad \forall k & (7) \\
& \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{36} x_{ijk} = 12 & (8) \\
& \sum_{i=13}^{24} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{36} x_{ijk} = 9 & (9) \\
& x_{ijk} = 0 \text{ or } 1 & (10) \\
& y_{mnk} = 0 \text{ or } 1 & (11)
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

其中， i 表示第一波次发射点位； j 表示 6 个转载地域； k 表示除去第一波次的 24 个发射点后，剩余的 36 个可供第二波次选择的发射点； m 表示新增的 3 台发射装置； n 表示 6 个备选隐蔽待机点； fz_{ij} 表示第 i 个发射点到转载地域 j 的最短时间； if_{nk} 表示 C 类车从第 j 个节点到发射点 k 的最短时间； azf_{jk} 表示 A 类发射装置经过转载地域 j 前往发射点 k 的最短时间， bzf_{jk} 表示 B 类发射装置经过转载地域 j 前往发射点 k 的最短时间， czf_{jk} 表示 C 类发射装置经过转载地域 j 前往发射点 k 的最短时间， $x_{ijk} = 1$ 表示从第 i 个发射点经过转载地域 j 前往发射点 k ,

否则为 0； $y_{mnk}=1$ 表示新增的 m 发射装置在 n 节点隐蔽待机并前往发射点 k ，否则为 0。

目标函数表示 3 类车在第二阶段所需要的总时间最短；约束条件(1)确保了新增的 3 台 C 类发射装置从出发到发射点的路径各不相同；约束条件(2)确保了实施两个波次齐射任务时选出的发射点中的每一个发射点位只能容纳 1 台发射装置；约束条件(3)确保了每一隐蔽待机点至多容纳 2 台发射装置；约束条件(4)确保了 A 类和 B 类发射装置不会被新增的 3 台 C 类发射装置替换；约束条件(5)确保了从 0 时刻出发的 12 辆 C 类车在实施第二波次齐射任务时只剩下 9 台；约束条件(6)确保了每个转载地域都至少有两台车载发射装置前往进行转载作业；约束条件(7)确保了完成第二波次发射任务的发射点中每一个发射点位只能容纳 1 台发射装置；约束条件(8)确保了 A 类和 B 类车载装置的路径唯一；约束条件(9)确保了从 0 时刻出发的 12 台 C 类发射装置在 12 条到达第二波次发射点的路径中只选择 9 条；约束条件(10)将变量 x_{ijk} 设置为 0-1 变量；约束条件(11)将变量 y_{mnk} 设置为 0-1 变量。

通过该计算结果可看出，若要满足整体暴露时间最短，应选择 J14 和 J15 作为隐蔽待机点，其中 J14 容纳 2 台 C 类发射装置，J15 容纳一台 C 类发射装置，同时也可确定 21 台车载发射装置对应的转载地域和第二波次的发射点，以及新增的 3 台 C 类发射装置（红色标出）在第二波次的发射点位，具体路径见下表：

表四 隐蔽待机点和第二波次的发射点（问题三）

发射车编号	待机区域编号	第一波次发射点	转载地域/隐蔽待机点	第二波次发射点
A01	D1	F31	Z04	F39
A02	D1	F32	Z04	F38
A03	D1	F33	Z04	F37
A04	D2	F01	Z06	F18
A05	D2	F26	Z06	F19
A06	D2	F48	Z01	F56
B01	D1	F29	Z02	F59
B02	D1	F30	Z02	F55
B03	D1	F35	Z04	F36
B04	D2	F02	Z06	F13
B05	D2	F03	Z06	F12
B06	D2	F49	Z01	F53
C01	D1	F34	Z04	F10
C02	D1	F41	Z05	F40
C03	D1	F42	Z05	F23
C04	D1	F43	Z05	F20
C05	D1	F57	Z03	F54
C06	D1	F58	Z03	F60
C07	D2	F24	J14	F28

C08	D2	F25	Z01	F52
C09	D2	F44	J14	F27
C10	D2	F45	J15	F11
C11	D2	F46	Z01	F51
C12	D2	F47	Z01	F50

第一波次的具体发射点位分配和制定的机动路线与问题一结果相同，完成两个波次发射任务的整体暴露时间为 8484.0 分钟（141.40 小时），其中从开始到完成第一波次发射任务的整体暴露时间为 2989.2 分钟（49.82 小时），从第二波次开始时刻到完成第二波次发射任务的整体暴露时间为 5512.8 分钟（91.88 小时）。

7 问题四

7.1 问题分析

道路节点受到攻击破坏会延迟甚至阻碍发射装置按时到达指定发射点位，同时还要考虑攻防双方的对抗博弈，综合多种因素对道路节点建立合理的评价指标。结合图形及实际情况，我们认为：敌方不知道我方区域内的待机地域、转载地域、道路节点及发射点的具体信息，但敌方可结合战役情况推断地图上度为 1 的节点为发射点，其他节点全部为道路节点。因此，我们考虑攻防双方的对抗博弈采用度、集聚系数等其他因素作为衡量道路节点重要性的评价指标，量化分析得到此道路网络中最可能受到敌方攻击破坏，也就是我方最应该加强防御的 3 个道路节点。

7.2 问题求解

1. 理论基础与方法

假设网络 $G=(V, E)$ 是由 $|V|=N$ 个节点和 $|E|=M$ 条边所组成的一个无向网络。度指标描述了一个节点的邻居节点的个数，表示为：

$$k_i = \sum_{j \in G} \delta_{ij}$$

其中， i 与 j 有连接时 $\delta_{ij} = 1$ ，否则 $\delta_{ij} = 0$ 。度指标体现了该节点与周围节点之间建立直接联系的能力，但不能反映该节点的邻居节点的连边情况。集聚系数描述了网络中节点的邻居之间互为邻居的比例，表示为：

$$c_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)}$$

其中 e_i 表示节点 i 与其任意两个邻居节点之间所形成的三角形的个数。与度指标相反，集聚系数虽然在一定程度上能够反映邻居节点的连边情况，但不能反映邻居节点的规模。于是我们利用节点邻居信息，并考虑集聚系数，提出一种新的节点重要性评价指标 p_i ，表示为：

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^N f_j^2} + \frac{g_i}{\sum_{j=1}^N g_{ji}^2}$$

其中 f 为节点 i 自身度与其邻居度之和，表示为：

$$f_i = k_i + \sum_{w \in \Gamma_i} k_w$$

其中 k_w 表示节点 w 的度， Γ_i 表示节点 i 的邻居节点集合。函数 g_i 表示为：

$$g_i = \frac{\max_{j=1}^N \left\{ \frac{c_j}{f_j} \right\} - \frac{c_i}{f_i}}{\max_{j=1}^N \left\{ \frac{c_j}{f_j} \right\} - \min_{j=1}^N \left\{ \frac{c_j}{f_j} \right\}}$$

其中 c_i 为节点 i 的集聚系数。集聚系数仅能反映邻居节点之间的紧密程度，而不能反映邻居节点的规模，因此我们对结果进行如上面公式所示的归一化处理。由于 f_i 反映的是节点自身度和邻居的度信息， g_i 反映的是节点邻居之间的紧密程度，采用同趋化函数 $u(x) = x/\sum x^2$ 同时对 f_i 和 g_i 进行处理，使得 p_i 正确反映 f_i 和 g_i 不同作用力的综合结果^[7]。

2. 求解结果

在本研究中，通过上述公式计算可得下表：

表七 节点重要性排序

节点	P 值	排序
J03	0.270137	1
Z06	0.239706	2
J32	0.229873	3
J13	0.228165	4
J15	0.228165	5
D2	0.228165	6
J28	0.222927	7
J05	0.222395	8
J14	0.222395	9
J42	0.222395	10

由表中可得，重要度排序较高（前 10 位）的节点分布在两条主干道路上及其周围，这两条道路在城市中心地段，车流量较大，承载了较大的交通流量。题中需要结合图的路网特点，考虑攻防双方的对抗博弈，建立合理的评价指标，最后经过量化分析得到该路网最可能受到敌方攻击破坏的 3 个道路节点是 J03，Z06，J32。

3. 其他思路

上述基于度和集聚系数的节点重要性度量方法未考虑交通网络中节点之间边的距离等问题，在交通网络中，作为节点的路口的重要性可从它连通的道路数和任意两点之间的最短路径中经过该点的总路径数来体现。前者是对节点重要性的客观评价，连接的道路越多说明节点越重要；后者将会影响交通流的流向，通过该节点的最短路径数量越多，反映在交通上的结果是通过该节点的车辆数就越多，节点越重要。然而，道路交通网络的边是有权重的，需要在加权网络下对节点的重要度进行评估。加权网络与无权网络的区别在于加权网络中边的权值不同，即相邻节点间的边重要性不同。对于道路网络，边的权重越大，说明该边所连接的两个节点之间的通行阻抗越大，即道路较长或车流密度较大。事实上边的权值越大说明该节点在网络中承担较大流量，在网络中越重要。为了解决这个矛盾，使用点权来代替节点的度。定义点权为与该点相邻的边的权值的倒数之和，即^[8]

$$s_i = \sum 1/w_{ij}$$

其中， s_i 表示点权， w_{ij} 表示 i 点到所有与其相连的 j 点的权重。因此我们在此基础上引入权重因素，由于本研究主要侧重于最短暴露时间，我们可取边权重因素为通行时间。基于此，我们创造性的提出基于改进的度和集聚系数的节点重要性度量方法的道路网路节点重要度估计公式：

$$NI_i = p_i * s_i$$

其中 NI_i 表示节点重要度。该定义考虑了边权值对节点重要度的影响，在交通网络模型中，道路权值越大，说明两节点之间物理距离大或者道路交通流量大。由于节点承担了较大的交通流量，说明该节点较为重要。

8 问题五

8.1 问题分析

经过对问题五的分析可以发现，整体暴露时间仍旧是优化的主要目标。我们认为敌方在信息不对称的情况下，会针对道路网中具有较多度，即通路较多，且单位时间内能到达的发射点数量较多的道路节点进行打击，因此，分散我方的车载装置，使其避免在同一片区聚集，减少装置路径之间的重叠性，对于规避敌方的侦查和打击是十分必要的；基于此，在保证整体暴露时间尽可能短的情况下，必须考虑适当分散我方车载装置，同时，还要尽量缩短单台发射装置的最长暴露时间。

8.2 模型建立及问题求解

为建立解决该问题的模型，我们在问题一第二波次求解的模型基础上增加了一个对转载区域允许最大转载装置数量的约束。根据问题一第二波次发射点的求解结果，可知到达转载区域 Z1 的装置数共有 7 台，数量较多，因此 Z1 附近车辆密度较大，而转载区域允许最大转载装置数量的约束可以避免这种情况，达到分散的目的。模型建立如下：

$$\min T = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{36} (fz_{ij} + azf_{jk})x_{ijk} + \sum_{i=7}^{12} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{36} (fz_{ij} + bzf_{jk})x_{ijk} + \sum_{i=13}^{24} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{36} (fz_{ij} + czf_{jk})x_{ijk}$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{36} x_{ijk} = 1, \forall i & (1) \\ \sum_{i=1}^{24} \sum_{k=1}^{36} x_{ijk} \geq 2, \forall j & (2) \\ \sum_{i=1}^{24} \sum_{k=1}^{36} x_{ijk} \leq N, \forall j, N = 4, 5, 6, 7 & (3) \\ \sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^6 x_{ijk} \leq 1, \forall k & (4) \\ \sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^{36} x_{ijk} = 24 & (5) \\ x_{ijk} = 0 \text{ or } 1 & (6) \end{cases}$$

其中， i 表示第一波次发射点位； j 表示 6 个转载地域； k 表示除去第一波次的 24 个发射点后，剩余的 36 个可供第二波次选择的发射点； fz_{ij} 表示第 i 个发射点到转载地域 j 的最短时间； azf_{jk} 表示 A 类发射装置经过转载地域 j 前往发射点 k 的最短时间， bzf_{jk} 表示 B 类发射装置经过转载地域 j 前往发射点 k 的最短时间， czf_{jk} 表示 C 类发射装置经过转载地域 j 前往发射点 k 的最短时间， $x_{ijk} = 1$ 表示从第 i 个发射点经过转载地域 j 前往发射点 k ，否则为 0； N 表示转载地域在完成两个波次齐射任务的过程中允许在该点进行转载作业的发射装置的最大数量。

目标函数表示 3 类车在第二阶段所需要的总时间最短；约束条件(1) 确保了

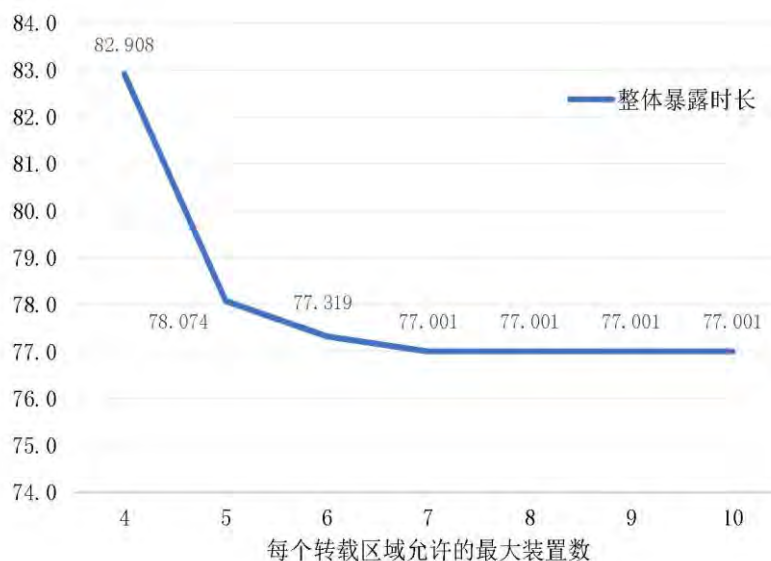
实施第二波次齐射任务时，选择的 24 个发射点位中的每一个发射点位只能容纳 1 台发射装置；约束条件(2) 确保了每个转载地域都至少有两台车载发射装置前往进行转载作业；约束条件(3)确保了转载地域在完成两个波次齐射任务的过程中允许在该点进行转载作业的发射装置的最大数量，并进行灵敏度分析；约束条件(4)确保了完成第二波次发射任务的发射点中每一个发射点位只能容纳 1 台发射装置；约束条件(5) 确定了实施第二波次齐射任务的行动方案；约束条件(6) 将变量 x_{ijk} 设置为 0-1 变量。

利用 Lingo 求解上述规划模型，可得当 $N=4,5,6,7$ 时，模型所选择的 24 条最优路径中的整体暴露时长及关键路径的暴露时长如下表：

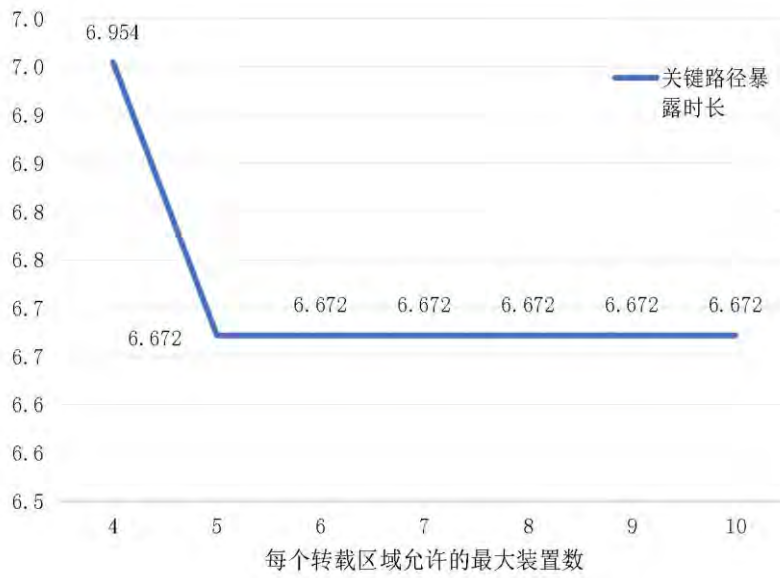
表五 不同 N 对应的暴露时长（单位：分钟）

N	4	5	6	7
整体暴露时长	4974.5	4684.4	4639.1	4620.1
关键路径暴露时长	417.2	400.3	400.3	400.3

当 $N \geq 7$ 时， N 取任何值的情况下，模型求解出的结果都相同，这说明约束(3) 已不起作用，绘制出的折线图如下：



图二 不同 N 值对应的整体暴露时长



图三 不同 N 值对应的关键路径暴露时长

通过上述灵敏度分析，可以看出：随着 N 值的增大，整体暴露时长和关键路径的暴露时长都将减小，而当 N 的值从 4 增大到 5 时，两者在图中都表现出了一个较大的下跌，这说明在 $N=4$ 时，暴露时长有较大的降低空间；当 N 的值由 5 逐渐增大时，整体暴露时长先缓慢下降至 $N=7$ 时不变，关键路径暴露时长则从 $N=5$ 开始就不发生任何变化。综上，应选择 $N=5$ 为最优值，即每个转载地域在完成两个波次齐射任务的过程中允许在该点进行转载作业的发射装置的最大数量为 5 台，此时两个波次齐射任务的整体暴露时长为 4684.4 分钟。在该条件下，24 台车载发射装置在两个波次齐射任务中的行驶路径及相应的暴露时长如下表所示：

表六 两个波次齐射任务的路径规划及单台发射装置最短暴露时长（单位：分钟）

发射车编号	待机区域编号	第一波次发射点	转载地域	第二波次发射点	第一波次单台发射装置最短暴露时长	第二波次单台发射装置最短暴露时长	单台发射装置两个波次的最短暴露时长的总和
A01	D1	F31	Z04	F37	124.7	125.7	250.4
A02	D1	F32	Z04	F38	127.0	125.6	252.6
A03	D1	F33	Z04	F10	127.0	124.9	255.6
A04	D2	F01	Z06	F18	127.0	179.5	270.2
A05	D2	F26	Z06	F9	127.0	209.8	300.5
A06	D2	F48	Z02	F56	127.0	211.0	308.1
B01	D1	F29	Z02	F59	127.0	223.7	385.1
B02	D1	F30	Z02	F28	127.0	213.7	375.0
B03	D1	F35	Z04	F36	127.0	151.0	305.0
B04	D2	F02	Z06	F19	127.0	216.4	330.6
B05	D2	F03	Z06	F13	127.0	213.1	327.2
B06	D2	F49	Z02	F27	127.0	242.4	362.6
C01	D1	F34	Z04	F11	127.0	168.8	347.3
C02	D1	F41	Z05	F40	127.0	93.0	255.6
C03	D1	F42	Z05	F23	127.0	175.9	331.2
C04	D1	F43	Z05	F20	127.0	193.6	298.7
C05	D1	F57	Z03	F54	127.0	213.3	365.0
C06	D1	F58	Z03	F60	127.0	253.3	400.3
C07	D2	F24	Z06	F12	127.0	280.2	336.0
C08	D2	F25	Z01	F52	127.0	244.1	335.9
C09	D2	F44	Z01	F51	127.0	196.2	313.4
C10	D2	F45	Z01	F50	127.0	167.1	287.8
C11	D2	F46	Z01	F53	127.0	224.9	332.1
C12	D2	F47	Z01	F55	127.0	237.1	340.0

参考文献

- [1] 季青梅, 辛文芳. 多波次导弹火力打击任务研究 [J]. 信息技术与信息化, (z1):122-128, 2017, .
- [2] 王桐, 杨萍, 欧阳海波. 基于马尔可夫链的多波次导弹作战研究[J]. 战术导弹技术, (4):20-22, 2011.
- [3] 卜广志, 张斌, 师帅. 战术导弹对机场跑道多波次打击时的瞄准点选择方法 [J]. 火力与指挥控制, (11):64-66, 2014.
- [4] 尚月强, 杨一都. Matlab 及其在数学建模中的应用[J]. 贵州师范大学学报: 自然科学版, 23(1):77-81, 2005.
- [5] 运筹学(第4版)《运筹学》教材编写组 清华大学出版社
- [6] 谢金星, 薛毅. 优化建模与 LINDO/LINGO 软件[M]. 清华大学出版社, 2006.
- [7] 洪增林, 刘冰砚, 张亚培. 复杂网络在交通网络节点重要度评估中的应用 [J]. 西安工业大学学报, (5):404-410, 2014.
- [8] 任卓明. 复杂网络中的节点重要性度量研究[D]. 上海理工大学, 2013.

附 录

1. 计算最短时间矩阵的 MATLAB 程序:

```
function [m,p]=zuiduan(w,start)
```

% w是由图1中相连两点之间的时间构成的矩阵, start表示最短路径的起点, p表示最短路径, m表示每条最短路径的最短时间

```
m=[];
p={};
for j=9:68
    t=j-8;
    terminal=j;
    [min,path]=dijkstra(w,start,terminal);
    m=[m;min];
    p{t}=path(1,:);
end
end
```

2. Dijkstra 算法的 MATLAB 程序

```
function [min,path]=dijkstra(w,start,terminal)
```

% w是由图1中相连两点之间的时间构成的矩阵, start表示最短路径的起点, terminal表示最短路径的终点, path表示最短路径, min表示每条最短路径的最短时间

```
w(find(w==0))=inf;
n=size(w,1); label(start)=0; f(start)=start;
for i=1:n
    if i~=start
        label(i)=inf;
    end, end
s(1)=start; u=start;
while length(s)<n
    for i=1:n
        ins=0;
        for j=1:length(s)
            if i==s(j)
                ins=1;
            end, end
        if ins==0
            v=i;
            if label(v)>(label(u)+w(u,v))
                label(v)=(label(u)+w(u,v)); f(v)=u;
            end, end, end
    end, end, end
v1=0;
k=inf;
for i=1:n
    ins=0;
```

```

for j=1:length(s)
    if i==s(j)
        ins=1;
    end, end
if ins==0
    v=i;
    if k>label(v)
        k=label(v); v1=v;
    end, end, end
s(length(s)+1)=v1;
u=v1;
end
min=label(terminal); path(1)=terminal;
i=1;
while path(i)~=start
    path(i+1)=f(path(i));
    i=i+1 ;
end
path(i)=start;
L=length(path);
path=path(L:-1:1);

```

3. 问题一第一阶段的 Lingo 求解程序

```

min=@sum(d1(k):a*x+b*y+c*z+d*o+e*p+f*q);
!各类车从不同待机区域前往各发射点的时间和, abc 分别 abc 类车从 D1 出发前往各发射点
最短时间向量, def 同样;
@sum(d1(k):1*x)=3; !a 从 D1 出发 3 台;
@sum(d1(k):1*y)=3; !b 从 D1 出发 3 台;
@sum(d1(k):1*z)=6; !c 从 D1 出发 3 台;
@sum(d1(k):1*o)=3; !a 从 D2 出发 3 台;
@sum(d1(k):1*p)=3; !b 从 D2 出发 3 台;
@sum(d1(k):1*q)=6; !c 从 D2 出发 3 台;
@for(d1(k):@sum(d1(k):x(k)+y(k)+z(k)+o(k)+p(k)+q(k))<=1);!所有发射点只能有一辆车;
@for(d1(i):@bin(x(i));@bin(y(i));@bin(z(i));@bin(o(i));@bin(p(i));@bin(q(i))); !定义 0-1 变量;
End

```

4. 问题一第二阶段的 Lingo 求解程序

```

min=@sum(sfzef(i,j,k) | i #ge# 1 #and# i #le# 6 :(fz(i,j)+azf(j,k))*x(i,j,k))
+@sum(sfzef(i,j,k) | i #ge# 7 #and# i #le# 12 :(fz(i,j)+bzf(j,k))*x(i,j,k))
+@sum(sfzef(i,j,k) | i #ge# 13 #and# i #le# 24 :(fz(i,j)+czf(j,k))*x(i,j,k));
!i 从 1-6 表示 a 类车, 7-12 表示 b 类车, 13-24 表示 c 类车;
@for(sf(i):@sum(zef(j,k):x(i,j,k))=1); !起点为 1;
@for(ef(k):@sum(sfz(i,j):x(i,j,k))<=1); !终点不超过 1;
@for(z(j):@sum(sfef(i,k):x(i,j,k))>=2); !每个转载区域至少去二台;
@sum(sfzef(i,j,k):x(i,j,k))=24; !总路线为 24 条;
@for(sf(i):@for(z(j):@for(ef(k):@bin(x(i,j,k))))); !定义 0-1 变量;

```

End

5. 问题二第二阶段的 Lingo 求解程序

```
min=@sum(sfzef(i,j,k) | i #ge# 1 #and# i #le# 6 :(fz(i,j)+azf(j,k))*x(i,j,k))
+@sum(sfzef(i,j,k) | i #ge# 7 #and# i #le# 12 :(fz(i,j)+bzf(j,k))*x(i,j,k))
+@sum(sfzef(i,j,k) | i #ge# 13 #and# i #le# 24 :(fz(i,j)+czf(j,k))*x(i,j,k));
!i 从 1-6 表示 a 类车, 7-12 表示 b 类车, 13-24 表示 c 类车;
@for(sf(i):@sum(zef(j,k):x(i,j,k))=1);      !起点为 1;
@for(ef(k):@sum(sfz(i,j):x(i,j,k))<=1);    !终点不超过 1;
@for(z(j) | j #ge# 1 #and# j #le# 6 :@sum(sfef(i,k):x(i,j,k))>=2); !转载区域 1-6 至少去二台;
@for(z(j) | j #ge# 7 #and# j #le# 11 :@sum(sfef(i,k):x(i,j,k))<=y(j)*864);!是否选择备选节点
为转载区域;
@sum(z(j) | j #ge# 7 #and# j #le# 11 :y(j))=2; !备选节点选 2 个作为转载区域;
@sum(sfzef(i,j,k):x(i,j,k))=24;  !总路线为 24 条;
@for(sf(i):@for(z(j):@for(ef(k):@bin(x(i,j,k)))));
@for(z(j) | j #ge# 7 #and# j #le# 11 :@bin(y(j))); !定义 0-1 变量;
end
```

6. 问题三第二阶段的 Lingo 求解程序

```
min=@sum(sfzef(i,j,k) | i #ge# 1 #and# i #le# 6 :(fz(i,j)+azf(j,k))*x(i,j,k))
+@sum(sfzef(i,j,k) | i #ge# 7 #and# i #le# 12 :(fz(i,j)+bzf(j,k))*x(i,j,k))
+@sum(sfzef(i,j,k) | i #ge# 13 #and# i #le# 24 :(fz(i,j)+czf(j,k))*x(i,j,k))
+@sum(ccheyf(m,n,k):jf(n,k)*y(m,n,k));
!i 从 1-6 表示 a 类车, 7-12 表示 b 类车, 13-24 表示 c 类车, m,n,k 表示换车的车 m 在 n
节点去发射点 k;
@for(cche(m) :@sum(ybjdef(n,k):y(m,n,k))=1); !后换车起点为 1;
@for(ef(k):@sum(sfz(i,j):x(i,j,k))+@sum(ccheybjd(m,n):y(m,n,k))<=1); !前后一起终点不超
过 1;
@for(ybjd(n):@sum(ccheef(m,k):y(m,n,k))<=2); !后换车每个节点隐蔽车不超过 2 个;
@for(sf(i) | i #ge# 1 #and# i #le# 12 :@sum(zef(j,k):x(i,j,k))=1);!原 a,b 车起点为 1;
@for(sf(i) | i #ge# 13 #and# i #le# 24 :@sum(zef(j,k):x(i,j,k))<=1);!c 车起点不超过 1;
@for(ef(k):@sum(sfz(i,j):x(i,j,k))<=1);!终点不超过 1;
@for(z(j):@sum(sfef(i,k) | i #ge# 1 #and# i #le# 24 :x(i,j,k))>=2);!每个转载区域至少去 2 台;
@sum(sfzef(i,j,k) | i #ge# 1 #and# i #le# 12 :x(i,j,k))=12;  !原 a,b 车前十二个全发;
@sum(sfzef(i,j,k) | i #ge# 13 #and# i #le# 24 :x(i,j,k))=9;  !原 c 车后十二个发 9 个;
@for(sf(i):@for(z(j):@for(ef(k):@bin(x(i,j,k)))));
@for(cche(m):@for(ybjd(n):@for(ef(k):@bin(y(m,n,k))))); !定义 0-1 变量;
End
```

7. 问题五第二阶段的 Lingo 求解程序

```
min=@sum(sfzef(i,j,k) | i #ge# 1 #and# i #le# 6 :(fz(i,j)+azf(j,k))*x(i,j,k))
+@sum(sfzef(i,j,k) | i #ge# 7 #and# i #le# 12 :(fz(i,j)+bzf(j,k))*x(i,j,k))
+@sum(sfzef(i,j,k) | i #ge# 13 #and# i #le# 24 :(fz(i,j)+czf(j,k))*x(i,j,k));
!i 从 1-6 表示 a 类车, 7-12 表示 b 类车, 13-24 表示 c 类车;
@for(sf(i):@sum(zef(j,k):x(i,j,k))=1);      !起点为 1;
@for(ef(k):@sum(sfz(i,j):x(i,j,k))<=1);    !终点不超过 1;
@for(z(j):@sum(sfef(i,k):x(i,j,k))>=2);    !每个转载区域至少去 2 台;
```

```

!灵敏度分析;
@for(z(j):@sum(sfef(i,k):x(i,j,k))<=4);      !每个转载区域至多去 4 台;
!@for(z(j):@sum(sfef(i,k):x(i,j,k))<=5);    !每个转载区域至多去 5 台;
!@for(z(j):@sum(sfef(i,k):x(i,j,k))<=6);    !每个转载区域至多去 6 台;
!@for(z(j):@sum(sfef(i,k):x(i,j,k))<=7);    !每个转载区域至多去 7 台;
@sum(sfzef(i,j,k):x(i,j,k))=24;              !总路线为 24 条;
@for(sf(i):@for(z(j):@for(ef(k):@bin(x(i,j,k))))); !定义 0-1 变量;
end

```