



参赛密码 _____
(由组委会填写)



“华为杯”第十四届中国研究生 数学建模竞赛

南京邮电大学
东南大学

学 校 南京邮电大学

参赛队号 K0411

1. 胡涛

队员姓名 2. 王梦涵

3. 潘孙翔

参赛密码 _____

(由组委会填写)



“华为杯”第十四届中国研究生 数学建模竞赛

题目 多波次导弹发射中的规划问题

摘 要：

本文研究了道路网中车载导弹多波次发射的问题，这是一个多目标路径选择问题。首先通过动态规划中分阶段优化方法，以整体暴露时间最小为目标，利用最短路径算法，给出三种不同情况下两波次齐射任务的机动方案。接着，利用博弈论模型，给出道路网中最易受到攻击破坏的节点。最后，以整体暴露时间最小、适当分散且缩短单台发射装置的暴露时间为目标，通过多目标规划，使用分阶段优化的方法，给出两波次齐射任务的机动方案。

针对问题一，以整体暴露时间最短为目标，利用分阶段优化的方法，按齐射波次分为两个阶段。在第一阶段，利用最短路径算法，使得机动路线满足整体暴露时间最短。在第二阶段，在机动路线满足总暴露时间最短的前提下，优化“相遇冲突”和“转载地域拥堵”问题。针对该具体问题，优化机动方案，使途中停留时间最短、转载点隐蔽时间最长、最长行驶时间最短。求出两波次导弹发射的机动方案，整体暴露时间为 8330.0 分钟。得出问题一两波次齐射问题的重要时间信息，详见表 1。

针对问题二，与第一问不同的是，问题二增加了临时转载地域的选择问题。将临时转载点在所有最优路径中被选择的次数作为选择依据，选择出增设的临时转载地为 J34 和 J25。接着，按照问题一的模型与优化思路，得到两波次导弹发射的机动方案，重要时间信息见表 1。

与问题一相比，问题二求得的整体暴露时间减少了 739.1 分钟。定义相对隐蔽时间和相对途中等待时间作为该方案的评价指标，结果表明，相对隐蔽时间增加了 0.48 个百分点，相对途中停留时间减小了 0.78 个百分点，说明增加了 J34

和 J25 作为临时转载点后，机动方案隐蔽性增强。

针对问题三，与问题一不同的是，增设了隐蔽待机点。根据问题一模型，第一阶段模型不变，首先删除机动方案中用时最长的路径，再对剩余的 21 条路径重新进行问题一模型的优化。最后，在不引起道路冲突的情况下，以隐蔽待机点与未经分配的发射点的距离作为选择依据，将最近的可选择隐蔽待机点作为临时隐蔽待机点。最后选择出 J13（2 辆发射装置）和 J15（1 辆发射装置）作为隐蔽发射点。得出机动方案的重要时间信息见表 1。

与前两问相比，问题三的整体暴露时间与第二问相近，比第一问的整体暴露时间减少了 813.6 分钟。这说明，增加临时转载点和隐蔽待机点（替换车辆）虽然对两波齐射过程的改进角度不同，但是问题二和问题三的这两种方案都对机动方案做出了相似程度的改善。

针对问题四，该问题研究道路节点在道路网络中的重要性。分别采用部分信息静态博弈模型和完全信息静态博弈模型来讨论节点在网络中的重要性。

在部分信息静态博弈模型中，给出三种节点重要性的评价指标：度数、聚合度和介数来衡量节点在网络中的重要性，进而得出最易受到攻击破坏的三个节点是：J15、J07、J06。在完全信息静态博弈模型中，将前三问中两波导弹发射过程中最优路径作为已知信息，将经过节点的最优路径次数和流量负载作为重要性的指标，得出网络中最易受到攻击破坏的三个道路节点依次是：J37、J04 和 J07。

针对问题五，问题五与前四问不同的是，从单目标规划转化为了多目标规划问题。采用分阶段优化的方法，首先考虑适当分散，即先将发射点分配给不同转载地域。其次考虑总体暴露时间最短，此步骤可以使用第一问的模型，只是将 60 个发射点减少为 48 个发射点。最后，考虑单台发射装置的最长暴露时间，增加该种发射装置的隐蔽时长，从而达到缩短最长暴露时间的目的。

定义信息熵与道路利用率作为衡量适当分散的评价指标。与问题一相比，问题五中的信息熵增加了 20%，道路利用率增加约 5.1%，说明在该模型机动方案中，发射装置的隐蔽性大大增加，符合题目的分散机动的要求。

表 1 问题一、二、三、五两波次齐射任务的机动方案重要时间信息

	齐射时间点	齐射时间/分钟	整体暴露时间/分钟
问题一	第一波齐射	178.4	2936.6
	第二波齐射	453.7	5393.4
	两波齐射	—	8330.0
问题二	第一波齐射	178.4	2936.6
	第二波齐射	416.9	4654.3
	两波齐射	—	7589.9
问题三	第一波齐射	178.4	2936.6
	第二波齐射	419.1	4579.8
	两波齐射	—	7516.4
问题五	第一波齐射	199.6	3429.4
	第二波齐射	511	5770.9
	两波齐射	—	9200.3

关键词：多波次导弹发射，动态规划，多目标路径选择，分阶段优化，博弈论模型

目录

一、问题重述.....	5
1.1 问题背景.....	5
1.2 需要解决的问题.....	5
二、模型假设.....	5
三、符号说明.....	6
四、问题一.....	7
4.1 问题分析.....	7
4.2 模型建立.....	7
4.2.1 Dijkstra 最短路径算法.....	7
4.2.2 数学模型建立.....	7
4.3 算法流程.....	10
4.4 模型求解及结果分析.....	13
五、问题二.....	18
5.1 问题分析.....	18
5.2 模型建立.....	18
5.3 算法流程.....	18
5.4 模型求解.....	18
5.5 结果分析.....	20
六、问题三.....	23
6.1 问题分析.....	23
6.2 模型建立.....	23
6.3 模型求解.....	24
6.4 结果分析.....	26
七、问题四.....	28
7.1 问题分析.....	28
7.2 部分信息静态博弈模型.....	28
7.2.1 模型建立.....	28
7.2.2 模型求解及结果分析.....	29
7.3 完全信息静态博弈模型:.....	31
7.3.1 模型建立.....	31
7.3.2 模型求解及结果分析.....	32
八、问题五.....	34
8.1 问题分析.....	34
8.2 模型建立.....	34
8.3 算法流程.....	35
8.4 模型求解.....	38
8.5 结果分析.....	39
九、参考文献.....	41
十、附录.....	42
附录 I 数据部分.....	42
附录 II 代码部分.....	47

一、 问题重述

1.1 问题背景

常规导弹在现代战争中发挥重要的作用。为了提高导弹部队的生存能力和机动能力，常规导弹大都使用车载发射装置。

导弹运输时会涉及**道路冲突性、隐蔽性、暴露时间**等多方面因素，导弹的运输规划是一个组合优化问题。每台发射装置只能载弹一枚，实施多波次发射时，完成了上一波次发射任务的车载发射装置需要立即机动到转载地域装弹，完成装弹的发射装置再机动至下一波次指定的发射点位实施发射。

部队接受发射任务后，需要为每台车载发射装置规划每个波次的发射点位及机动路线，要求**整体暴露时间**（所有发射装置的暴露时间之和）最短。

1.2 需要解决的问题

(1) 该部接受到实施两个波次的齐射任务，每个波次各发射 24 枚导弹。给出**具体发射点位分配及机动路线方案**，使得完成两个波次发射任务的**整体暴露时间最短**。统一以第一波次的发射时刻作为第二波次机动的起始时刻。

(2) 除已布设的 6 个转载地域外，可选择在道路节点 J25、J34、J36、J42、J49 附近临时**增设 2 个转载地域**。应该如何布设临时转载地域，使得完成两个波次发射任务的**整体暴露时间最短**。

(3) **新增 3 台 C 类发射装置**用于第二波次发射。这 3 台发射装置可事先选择节点 J04、J06、J08、J13、J14、J15 附近隐蔽待机（坐标就取相应节点的坐标），即这 3 台发射装置装弹后从待机地域机动到隐蔽待机点的时间不计入暴露时间内。每一隐蔽待机点至多容纳 2 台发射装置。待第一波次导弹发射后，这 3 台发射装置机动至发射点位**参与第二波次的齐射**，同时被替代的 3 台 C 类发射装置完成第一波次齐射后择机返回待机地域（返回时间不计入暴露时间）。转载地域仍为事先布设的 6 个的前提下，应该**如何选择隐蔽待机点**，使得完成两个波次发射任务的**整体暴露时间最短**。

(4) 道路节点受到攻击破坏会延迟甚至阻碍发射装置按时到达指定发射点位。考虑攻防双方的**对抗博弈**，**建立合理的评价指标**，**量化分析该路网最可能受到敌方攻击破坏的 3 个道路节点**。

(5) 在机动方案的拟制中，既要考虑整体暴露时间尽可能短，也要规避敌方的侦察和打击，采用**适当分散机动**的策略，同时还要**缩短单台发射装置的最长暴露时间**。综合考虑这些因素，重新讨论问题（1）。

二、 模型假设

为了建模的方便，作出如下一些简化假设：

- 1、不考虑发射装置发射导弹的时间；
- 2、假设每个道路节点能容纳的发射装置数没有上限；
- 3、假设发射装置匀速行驶；
- 4、不考虑发射装置在行驶途中发生故障；
- 5、不考虑因敌方攻击而造成道路有不可逾越的障碍；
- 6、不考虑在转载地域更换需要装弹的发射装置的间隔时间。

三、 符号说明

符号	意义
d_{ij}	节点 i, j 间的连通距离矩阵 ($i, j = 1, 2, \dots, 130$)
T_{ij}^k	第 k 种发射装置在节点 i, j 间的时间邻接矩阵 ($i, j = 1, 2, \dots, 130, k = 1, 2, 3$)
M_{ij}^k	第 k 种发射装置在节点 i, j 间的最短时间 ($i, j = 1, 2, \dots, 130, k = 1, 2, 3$)
$LINE_{ij}^k$	第 k 种发射装置在节点 i, j 间的时间最短路径
η	节点逗留时间
t	发射装置的总暴露时间
L_m	第 m 辆发射装置的行驶路径 ($m = 1, 2, \dots, 24$)
ZT_k	发射装置在第 k 个转载地域的逗留时间 ($k = 1, 2, \dots, 6$)
YT_k	发射装置在第 k 个转载地域的隐蔽时间 ($k = 1, 2, \dots, 6$)
JT_i	发射装置在第 i 个节点处因道路冲突产生的等待时间 ($i = 1, 2, \dots, 62$)
$F1_i$	第 i 个参与第一波齐射的发射装置 ($i = 1, 2, \dots, 24$)
$F2_i$	第 i 个参与第二波齐射的发射装置 ($i = 1, 2, \dots, 24$)
c_1	相对隐蔽时间
c_2	相对途中等待时间
λ_i	连接节点 i 的道路数 ($i = 1, 2, \dots, 62$)
e_i	节点 i 的聚合度 ($i = 1, 2, \dots, 62$)
δ_i	节点 i 的介数 ($i = 1, 2, \dots, 62$)
N_i	经过节点 i 的最优路径个数 ($i = 1, 2, \dots, 62$)
D_i	节点 i 的流量负载 ($i = 1, 2, \dots, 62$)
H	转载地域的信息熵
ρ	道路利用率

四、 问题一

4.1 问题分析

(1) 该部接受到实施两个波次的齐射任务, 每个波次各发射 24 枚导弹。给出**具体发射点位分配及机动路线方案**, 使得完成两个波次发射任务的**整体暴露时间最短**。统一以第一波次的发射时刻作为第二波次机动的起始时刻。

该问题的目的是使得整体暴露时间最短, 即为动态规划问题。发射装置的暴露时间与发射装置的路线、运输的车辆类型、以及路线的路况(单车道影响车速以及车辆行驶方向)相关^{[1]-[2]}。需要注意的是, 发射装置可以在不同时间从待机区域出发。

由于第一波齐射之后, 重新开始机动, 所以可以将**暴露时间分为两部分**, 首先是从待机区域到达第一波齐射点的时间, 这一部分时间是所有发射装置的行驶时间总和。调整所有发射装置的出发时间, 使得所有发射装置同时到达目的地。其次, 第二部分的暴露时间为从第一波齐射点到转载地域再到第二波齐射点的时间减去隐蔽时间。

在第一波齐射后, 由于涉及装载导弹的问题, 单车道上行驶的发射装置会有会车现象引起的**道路冲突问题**。各个转载地域的装弹时间为 10 分钟, 这部分的等待时间也需要额外考虑(不仅仅为 10 分钟)。

到达第一波齐射点的路径规划可利用 **dijkstra 最短路径算法** 得出最短路径。第一波齐射点到第二波齐射点的最短路径(需经过一个转载地域)也可以分步通过最短路径算法得出。最后, 再通过增加道路节点的等待时间解决其中的道路冲突问题。

4.2 模型建立

4.2.1 Dijkstra 最短路径算法

按距 D 从近到远为顺序, 依次求 D 到各个定点的最短路径和距离^{[3]-[4]}。为避免重复并保留每一步的计算信息, 采用标号算法:

Step1: 用带权的邻接矩阵 L 表示有向图, 用 S 表示已找到的从源点 D 出发的最短路径的顶点的集合, 初始状态为空集。 V 表示顶点的集合。令 $l(D) = 0$, 对于 $v \neq D$, 给定 $l(v) = \infty, S_0 = \{D\}, i = 0$;

Step2: 对每个 $v \in \bar{S}_i (\bar{S}_i = V / S_i)$, 用 $\min_{\mu \in S_i} \{l(v), l(u) + w(uv)\}$ 代替 $l(v)$ 。计算 $\min_{v \in \bar{S}_i} \{l(v)\}$

把达到这个最小值的一个顶点记为 μ_{i+1} , 令 $S_{i+1} = S_i \cup \{\mu_{i+1}\}$;

Step3: 若 $i = |V| - 1$, 停止; 若 $i < |V| - 1$, 用 $i + 1$ 代替 i , 转到 Step2。

4.2.2 数学模型建立

这是一个动态规划问题, 我们将整体过程分为两步, 进行分阶段优化。先规划第一波齐射前的最优路径, 再找出经过转载点到第二波齐射点的最优路径, 这也是一个组合网络优化问题。

对所有节点进行编号:

$$p_i = [D_1, D_2, Z_1, \dots, Z_6, J_1, \dots, J_{62}, F_1, \dots, F_{60}] (i = 1, \dots, 130) \quad (4.2.1)$$

根据题中所给的图以及坐标, 可以得出各个点之间的连通距离矩阵 d_{ij} , 其中

每个元素代表 p_i 到 p_j 的直接距离，若 p_i 与 p_j 不直接相连，那么 $d_{ij} = \text{inf}$ 。

设 k 种车的运行速度为 V_k ， V_k 在单车道和双车道上行驶速度不同。可以得出时间邻接矩阵 T_{ij}^k ：

$$T_{ij}^k = \frac{d_{ij}}{V_k} (i, j = 1, \dots, 130, k = 1, 2, 3) \quad (4.2.2)$$

根据 Dijkstra 算法，以时间作为相邻两点之间的“距离”，根据时间邻接矩阵 T_{ij}^k 可以得到

- (1) k 种车 p_i 和 p_j 两个节点之间的最短时间 M_{ij}^k ；
- (2) k 种车 p_i 和 p_j 两个节点之间的时间最短径 $LINE_{ij}^k$ ，每个元素是一个向量。

对节点 D_1 、 D_2 分别求得 $M_{ij}^k (i = 1, 2)$ ，再对 $M_{ij}^k (i = 1, 2)$ 进行排序，得到新的最短时间矩阵 $M1_{ij}^k (i = 1, 2)$ 和时间最短径 $LINE_{ij}^k$ 。

根据最短时间原则，离待机区域最近的发射点用行驶速度最慢的 C 车前往。C 车分配结束后再按同样的方法依次分配 B 车和 A 车，这样可以得到第一波齐射的最短时间以及最短路径。

$$\begin{aligned} \text{C车:} & \begin{cases} M1_{ij}^3 (i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, 6) \\ LINE_{ij}^3 (i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, 6) \end{cases} \\ \text{B车:} & \begin{cases} M1_{ij}^2 (i = 1, 2, j = 7, 8, 9) \\ LINE_{ij}^2 (i = 1, 2, j = 7, 8, 9) \end{cases} \\ \text{A车:} & \begin{cases} M1_{ij}^1 (i = 1, 2, j = 10, 11, 12) \\ LINE_{ij}^1 (i = 1, 2, j = 10, 11, 12) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

考虑第一波最短路径，根据上式第一波一共有 24 条路径，定义 $L1_m (m = 1, 2, \dots, 24)$ ，对应的时间最短路径中 p_i 和 p_j 两个节点之间最短时间为 $T1_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, 24)$ ，每个 $L1_m (m = 1, 2, \dots, 24)$ 中第 m 条时间最短路径的节点数量为 $p_num1_i (i = 1, 2, \dots, 24)$ 。

设对于 $L1_m (m = 1, 2, \dots, 24)$ 中的每个时间最短路径的每个道路节点的逗留时间为 $\eta1_{ij} (i = 1, 2, \dots, 24, j = 1, 2, \dots, p_num1_i)$ 。那么可以得到第一波的发射时刻为：

$$\max \sum_{j=1}^{p_num1_i} T1_{ij} + \sum_{j=1}^{p_num1_i} \eta1_{ij} (i = 1, 2, \dots, 24) \quad (4.2.4)$$

由于从节点 D_1 、 D_2 出发时间不定，所以每个节点的到达时间和出发时间应该根据第一波齐射时间倒推得出，使得最后到达齐射点的时刻为第一波齐射时刻。即第一波的目标函数为：

$$\min t1 = \sum_{i=1}^{24} \left(\sum_{j=1}^{p_num1_i} T1_{ij} + \sum_{j=1}^{p_num1_i} \eta1_{ij} \right) (i = 1, 2, \dots, 24) \quad (4.2.5)$$

设第一波齐射点为 $F1_i (i = 1, 2, \dots, 24)$ ，遍历每个转载地 $Z_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ ，到达第二波可能齐射点 $F2_i (i = 1, 2, \dots, 36)$ ，根据遍历的思想，通过 Dijkstra 最短路径算法确定其经过的转载地路径，得到时间最短矩阵 $MZ_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, 24)$ ，找出所有 F_i

中满足下式的 i, j 来确定第二波最短路径，再将该路径的起始点 $F1_i$ 、 $F2_j$ 删除，重复寻找，直至所有的 $F1_i$ 找到了其最短时间路径。

$$\max(\min MZ_{ij}(j=1,2,\dots,36))(i=1,2\dots,24) \quad (4.2.6)$$

对于得到的第二波 24 条路径，定义 $\mathbf{L2}_m(m=1,2\dots,24)$ ，对应的路径中 p_i 和 p_j 两个节点之间最短时间为 $T2_{ij}(i, j=1,2\dots,24)$ 。

每个节点的逗留时间根据两个因素来确定：一是该节点是否为转载地域，定义转载地域逗留时间为 $ZT_k(k=1,2\dots,6)$ 。二是该节点前后路段是否有道路冲突，定义为 $JT_i(i=1,2\dots,62)$ 。

对于转载地的一个时间段内，该节点内前 2 辆车的等待时间不算暴露时间，我们将这个时间记为隐蔽时间 $YT_k(k=1,2\dots,6)$ ，那么转载地域的暴露时间为 $ZT_k - YT_k(k=1,2\dots,6)$ 。

可以得到途中由于停留而产生的暴露时间定义为途中停留时间：

$$tw = \sum_{i=1}^{62} JT_i + \sum_{k=1}^6 (ZT_k - YT_k) \quad (4.2.7)$$

所以，第二波齐射总的逗留时间为：

$$\eta 2 = \sum_{i=1}^{62} JT_i + \sum_{j=1}^6 (ZT_j - YT_j) \quad (4.2.8)$$

同时总的隐蔽时间为 $\sum_{k=1}^6 YT_k$ 。

为了方便表示，每个 $\mathbf{L2}_m(m=1,2\dots,24)$ 路径的节点数量为 $p_num2_i(i=1,2\dots,24)$ 。设时间最短路径 $\mathbf{L2}_m(m=1,2\dots,24)$ 的每个节点的逗留时间为 $\eta 2_{ij}(i=1,2,\dots,24, j=1,\dots,p_num2_i)$ 。可得第二波的目标函数为：

$$\min t 2 = \sum_{i=1}^{24} \left(\sum_{j=1}^{p_num2_i} T 2_{ij} + \eta 2 \right) \quad (4.2.9)$$

综上所述，整体暴露时间的目标函数为：

$$\begin{aligned} \min t &= t 1 + t 2 \\ &= \sum_{i=1}^{24} \left(\sum_{j=1}^{p_num1_i} T 1_{ij} + \sum_{j=1}^{p_num1_i} \eta 1_{ij} \right) + \sum_{i=1}^{24} \left(\sum_{j=1}^{p_num2_i} T 2_{ij} + \eta 2 \right) \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

$$s.t. \begin{cases} \max \sum_{k=1}^6 YT_k (k=1,2\dots,6) \\ \min \left(\eta 2 + \sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^{p_num1_i} \eta 1_{ij} \right) \\ \min M_{ij}^k \end{cases}$$

其中，三个约束条件对应为：（1）隐蔽时间最长（2）停留时间最短（3）任意两点间时间路径最短。

4.3 算法流程

第一步：数据处理

首先根据题目给出的每个点的(x, y)坐标和 A、B、C 三种类型发射装置的行驶速度生成 0-1 邻接矩阵、距离邻接矩阵和时间邻接矩阵。具体过程由程序实现，实现流程见图 4.3.1。

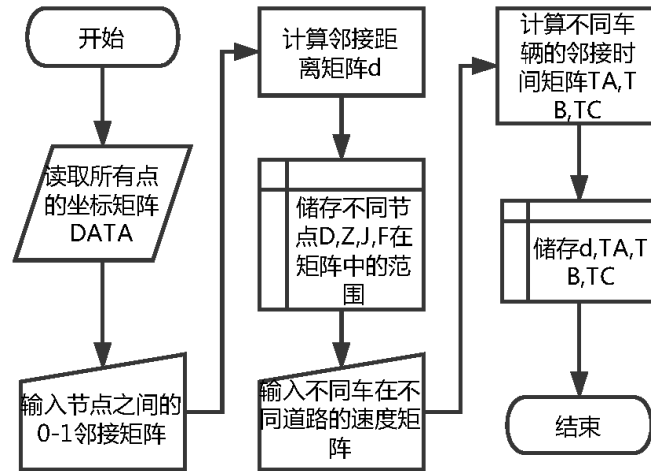


图 4.3.1 数据处理算法流程

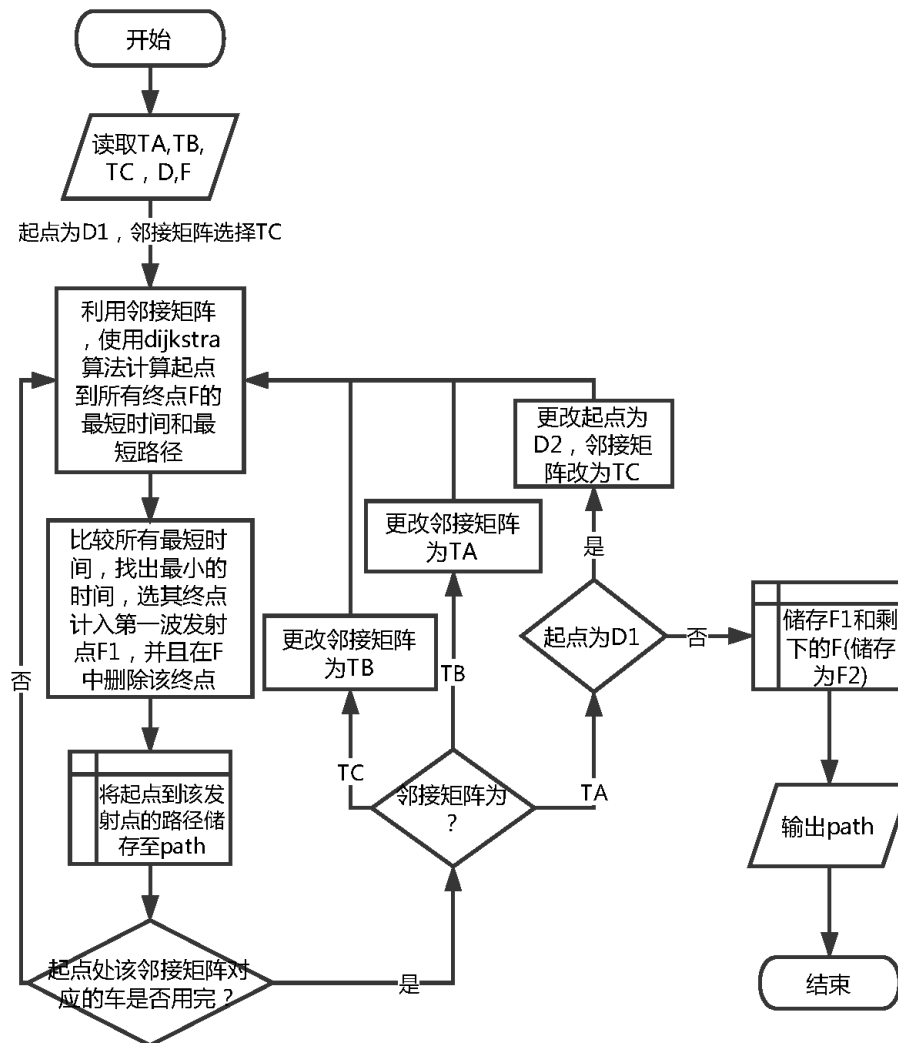


图 4.3.2 待机地域到第一波齐射点位求解的算法流程

第二步：从待机地域到第一波齐射点位的求解

由于第一波中发射装置的行驶路径不存在道路冲突，所以这一部分的求解完全由程序实现。程序的主要设计思想为：利用 dijkstra 算法分别计算出距 D1、D2 最近的 12 个发射点位。距 D 较远的发射点位分配给速度较快的 A 型发射装置，距 D 较近的发射点位分配给速度较慢的 B 型和 C 型发射装置。算法的实现流程见图 4.3.2，具体实现代码见附录 II。

第三步：从第一波齐射点位到第二波齐射点位的程序求解

为了降低程序的复杂度，首先不考虑道路冲突和转载地域的转载时间。遍历求得 F1 到 F2 且经过任意 Z 的最短路径，并以总暴露时间最小为目标进行选择，得到第二波的发射点位 F2 和第一波发射点位 F1 到第二波发射点位 F2 的路径。具体实现的算法流程见图 4.3.3，具体实现代码见附录 II。

第三步：从第一波齐射点位到第二波齐射点位的程序求解

为了降低程序的复杂度，首先不考虑道路冲突和转载地域的转载时间。遍历求得 F1 到 F2 且经过任意 Z 的最短路径，并以总暴露时间最小为目标进行选择，得到第二波的发射点位 F2 和第一波发射点位 F1 到第二波发射点位 F2 的路径。具体实现的算法流程见图 4.3.3，具体实现代码见附录 II。

各转载点位的隐蔽时间计算方法：

每个转载节点不同车的到达、离开时间记录在同一个数轴上，如图 4.3.4 所示。不同的到达和离开时刻将数轴分为数个时间段，若时间段内存在两辆或两辆以上发射装置，该时间段乘二计入隐蔽时间，若时间段内存在一辆发射装置，该时间段直接计入隐蔽时间。具体见图 4.3.4。

图 4.3.4 中显示了转载地隐蔽时间的计算方式。在时间轴上，每辆车的停留时间段用蓝色线段标出。对于每个转载地，可以同时隐蔽两辆发射车，当停留车辆大于两辆时，隐蔽时间也仅仅是时间轴上停留时间的两倍。所以隐蔽时间即为图 4.3.4 中红色线段画出的时间段时间的两倍与仅有一辆发射车在转载地内的时间段之和。

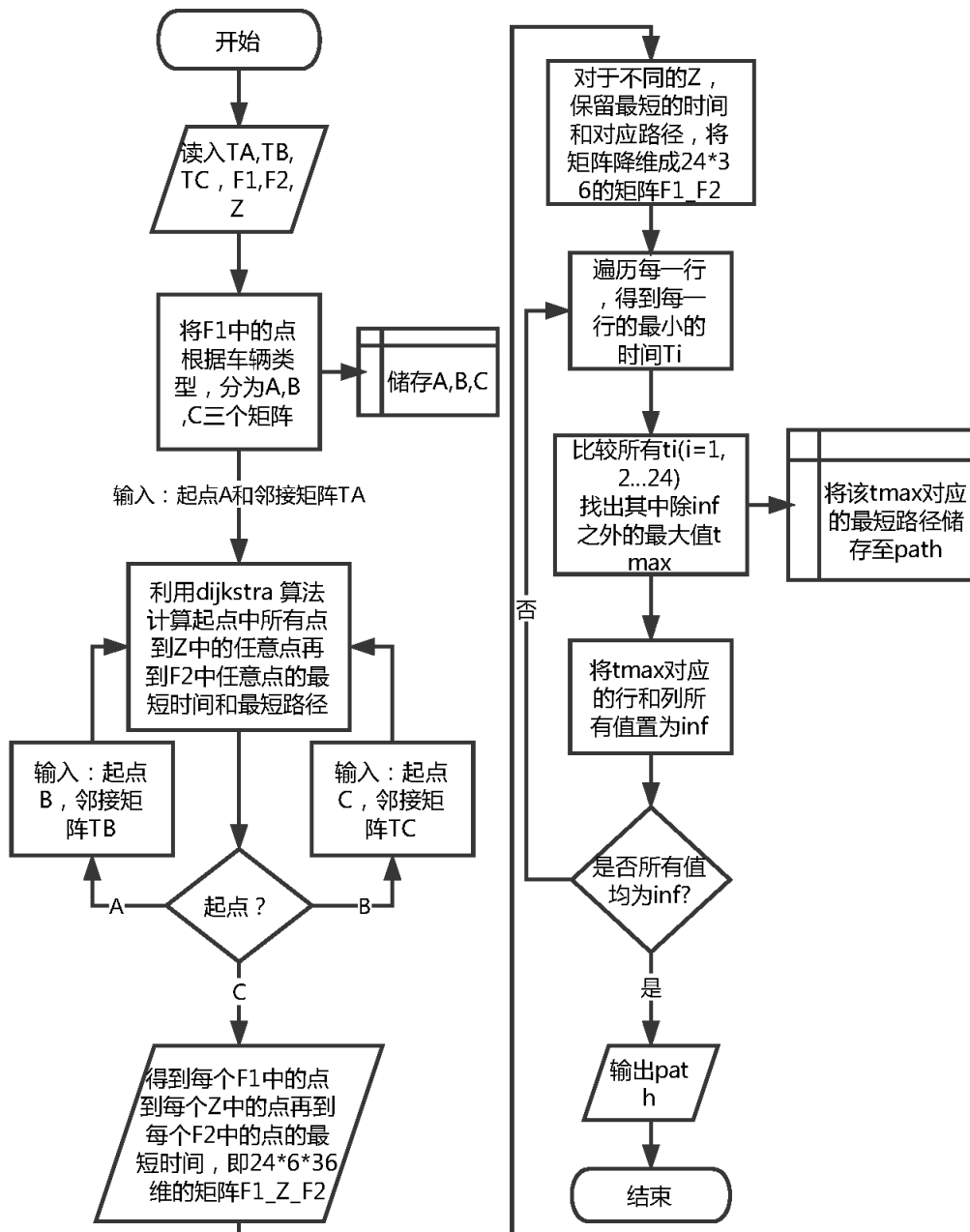


图 4. 3. 3 第一波齐射点位到第二波齐射点位的程序求解的算法流程

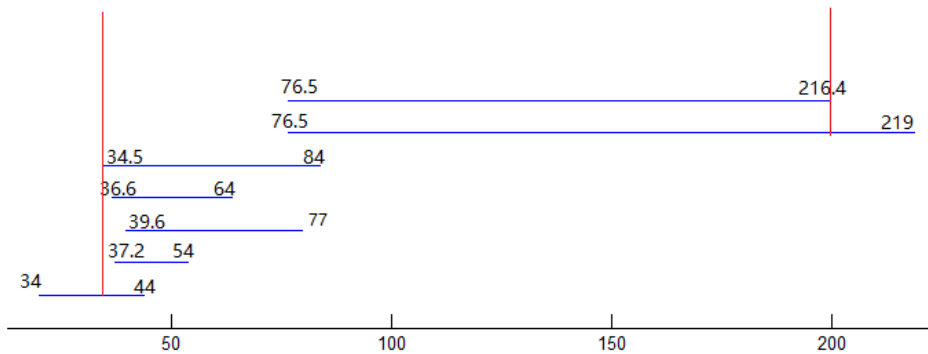


图 4. 3. 4 转载地的隐蔽时间计算方法

4.4 模型求解及结果分析

第一步：从待机区域 D 到第一波齐射点 F1

这一步首先求出距待机点的每个发射点的时间最短径，根据时间可以求出时间最短径的，根据暴露时间最短原则，离待机区域最近的发射点用行驶速度最慢的 C 车前往。C 车分配结束后再按同样的方法依次分配 B 车和 A 车

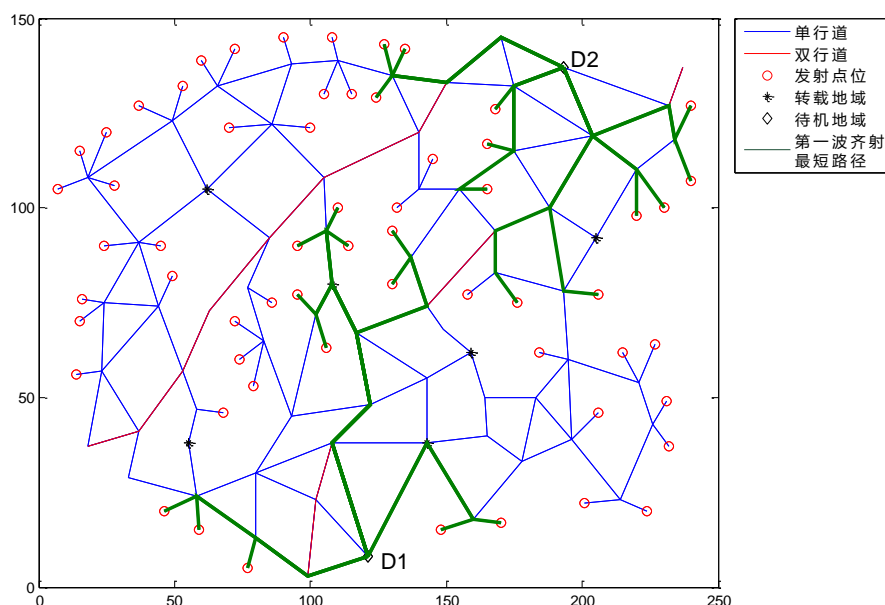


图 4.4.1 第一波齐射点路线

图中墨绿色的粗线代表第一波齐射的最短路径。从图中可以看出，第一波齐射前，所有的运载车途中没有冲突，会车都是在道路节点处，所以道路节点的停留时间为零，这一部分不需要考虑装弹过程，所以只需要以最短路径算法得出最短路径即可。

第一波齐射的出发点、出发时刻以及第一波齐射点具体见表 4.1。最终的路线信息详见附件。

表 4.1 第一波齐射路线信息

车型	C01	C02	C03	C04	C05	C06	C07	C08	C09	C10	C11	C12
出发地	D02	D02	D02	D02	D02	D02	D01	D01	D01	D01	D01	D01
出发时刻	122.6	86.6	75.5	71.2	61.2	60.6	73.3	31.4	26.8	23.1	15.9	0
第一波齐射点	F24	F25	F47	F46	F44	F03	F43	F58	F57	F42	F41	F34
车型	B01	B02	B03	B04	B05	B06	A01	A02	A03	A04	A05	C06
出发地	D02	D02	D02	D01	D01	D01	D02	D02	D02	D01	D01	D01
出发时刻	78.6	78.5	75.8	24.4	21.8	18.9	87.7	81.5	81.3	47.9	47.9	47.7
第一波齐射点	F02	F01	F45	F35	F31	F32	F26	F50	F49	F29	F30	F33

第一波出发时刻和路径的确定即可得到最后的齐射时间，从上表即可得出最终的暴露时间，隐蔽时间为 0，模型建立过程中已经说明。

第一波到达齐射点时间为 178.4min，即**第一波齐射时间为 178.4min**。总暴露时间：2936.6min，隐蔽时间为 0。

第二步：第二波齐射点的确定

根据第一波齐射点，在全局时间最短路径条件下，得到最短的时间径，进而得出第二波齐射点，具体见表 4.2。

表 4.2 两波齐射的发射点及其对应的出发地、车型

车型	C01	C02	C03	C04	C05	C06	C07	C08	C09	C10	C11	C12
出发地	D02	D02	D02	D02	D02	D02	D01	D01	D01	D01	D01	D01
第一波齐射点	F24	F25	F47	F46	F44	F03	F43	F58	F57	F42	F41	F34
第二波齐射点	F51	F27	F52	F28	F48	F12	F40	F60	F54	F23	F20	F11
车型	B01	B02	B03	B04	B05	B06	A01	A02	A03	A04	A05	C06
出发地	D02	D02	D02	D01	D01	D01	D02	D02	D02	D01	D01	D01
第一波齐射点	F02	F01	F45	F35	F31	F32	F26	F50	F49	F29	F30	F33
第二波齐射点	F19	F13	F53	F39	F37	F38	F55	F59	F56	F10	F36	F07

表 4.2 显示了利用程序算出的两波齐射的发射点及其对应的出发地、车型。但是，这是一种理想情况下求解出来的最短径，所以接下来要进行具体分析。

第三步：对冲突节点进行优化

冲突节点可以分为两部分，转载地域和道路冲突。

对于转载地域（转载地拥堵）：当车辆到达转载地时，若转载地内有车辆在进行装弹，那么该车就不能继续装弹。需要额外增加该转载地的逗留时间。

对于道路冲突（相遇冲突）：当两辆车在单向路中存在相遇问题时，其中一辆车需要在上一个节点进行等待。

按照以上分类原则，将 $F1_i$ 的进行分类，具体见下图。

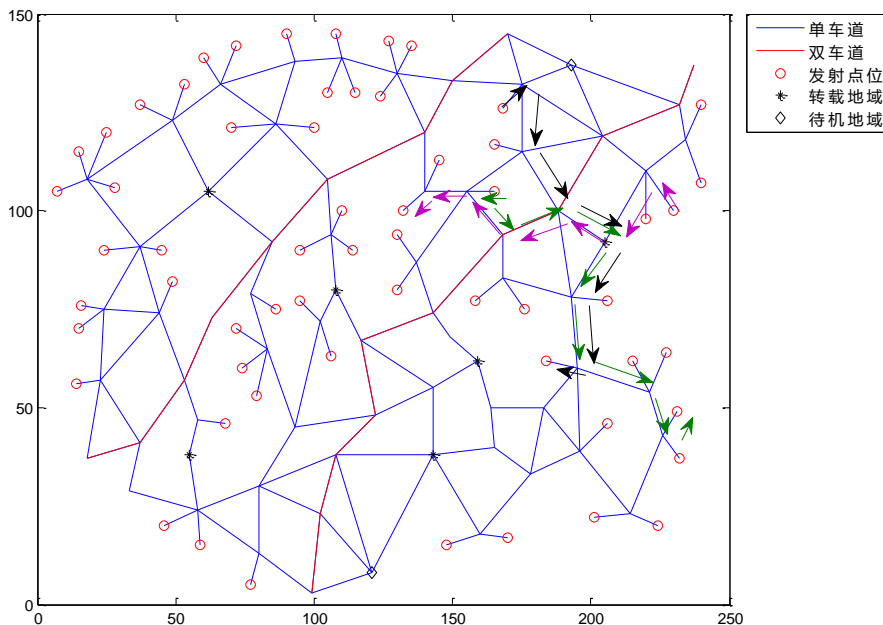


图 4.4.2 道路节点冲突类型示意图

图 4.4.2 中显示了两种冲突，其中黑色与绿色的路线代表“转载地拥堵”，此种拥堵是由于在转载地域换弹时，需要等待前一辆车换弹，从而增加了转载地等待时间；紫色与绿色的路线代表“相遇冲突”此种冲突可以通过在道路节点等待来解决问题，当等待时间过长时，需要换相邻转载地域。

按照上述原则对 $F1_i$ 进行分类，得到如图 4.4.2 所示的区域。

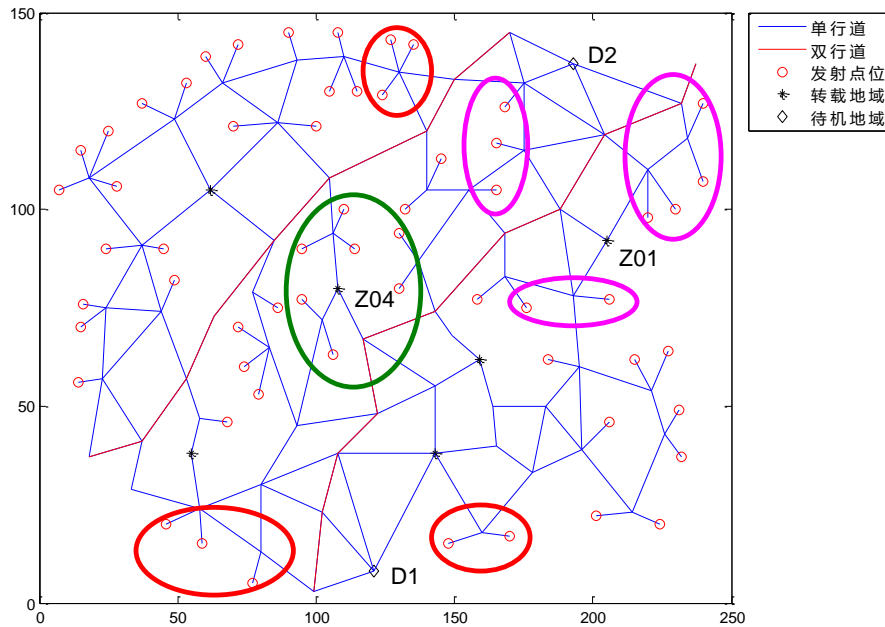


图 4.4.3 道路冲突类型分类

图 4.4.3 显示了道路冲突类型的分类图。图中圈出来的部分为 $F1_i$ ，即第一波齐射点，也是第二波齐射的起点。图中红色区域为无冲突，墨绿色区域和品红色区域为可能发生道路冲突的区域。并且，不同颜色区域之间无道路冲突。从图中可以看出，很多道路冲突会发生在 Z01 和 Z02 区域。这会增加这两个区域的道路冲突以及这两个转载点的等待时间。

对于相遇冲突：在确定了每个道路节点的逗留时间情况下，每个道路节点的到达时刻 $tarv_{ij}(i=24)$ 以及出发时刻 $tlev_{ij}(i=24)$ 可以确定。那么，据此可以得出出现道路冲突的节点，如果对于两条时间最短路径，满足

$$tlev_{ij} > tarv_{m(n+1)} \parallel tarv_{i(j+1)} > tarv_{mn} \quad (4.4.1)$$

那么这两条之间最短路径不存在道路冲突。

对于存在道路冲突的路段的优化方式：

- (1) 优先让有多辆车的一边先通行。
- (2) 若车辆等待时间过长，使其总时长大于绕路时长，则更改路径。

将较为拥堵的路段区域 Z01 和 Z04 区域进行优化，即为图 4.3.2 的品红和墨绿色部分。将较快的 A 车所在的 F29、F30、F26、F49 绕路值无车经过的 Z02，从而缓解了 Z01 和 Z04 的拥堵情况。得出改进的部分路线以及改进后的冲突类型分布图详见图 4.4.4。

图 4.4.4 描述的是人工改进的部分路线，实线路径是原先的路线，虚线路径是改进后的路线。

图 4.4.5 显示的是改进后的道路冲突类型分类。与图 4.4.2 相比，从图 4.4.5 中可以看出 Z04（墨绿色区域）和 Z01（品红区域）的拥堵情况得到了缓解。新增的蓝色区域为改进的路径第一波齐射点区域。

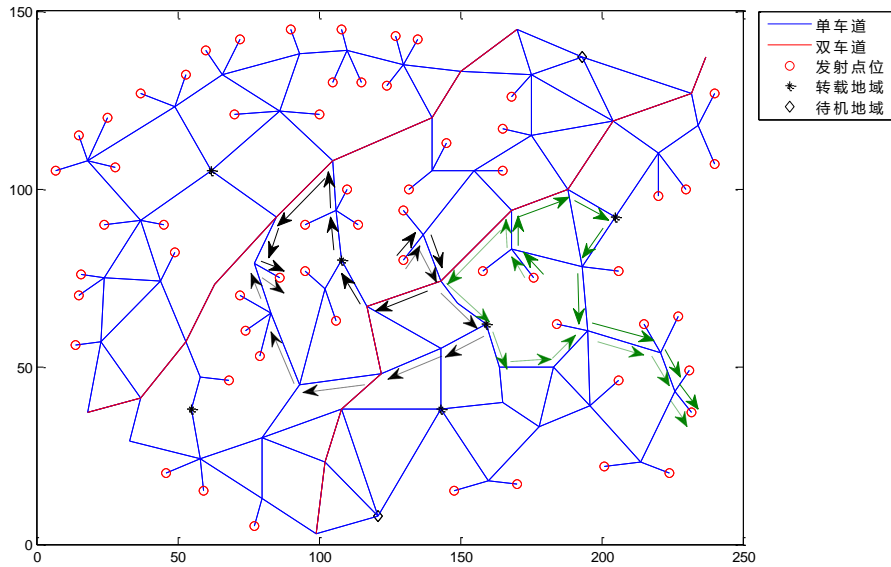


图 4.4.4 人工优化后改进的部分路线

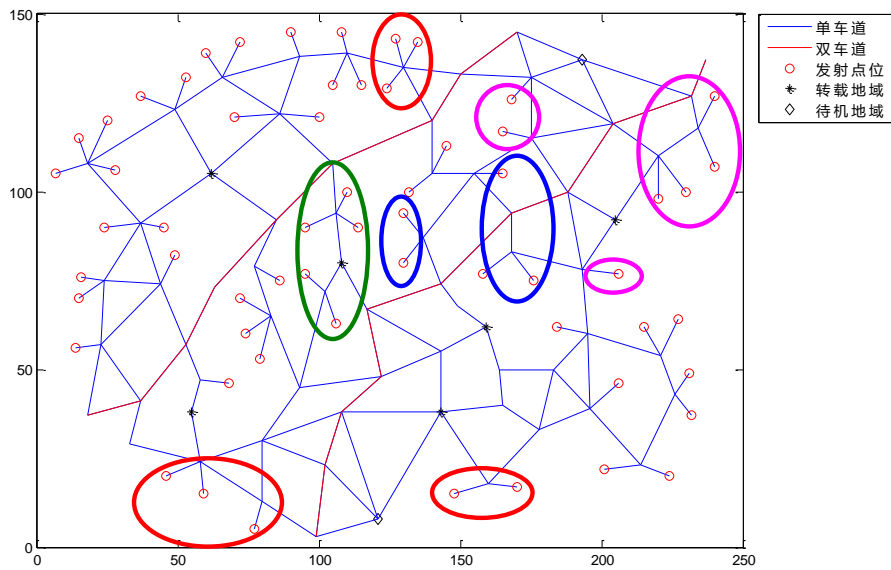


图 4.4.5 改进后的道路冲突类型分类

第四步：增加转载地隐蔽时间

由于隐蔽时间不算在暴露时间内，在不增加第二波齐射时间的前提下，应增加车辆在转载地的停留时间。

(1) 先到达的车辆优先装弹，后到达等待的车辆根据最后到达第二波齐射点时间长短确定先后装弹顺序，时间长的优先装弹。

(2) 由于装载地域内时间不算在总体暴露时间内，因此在保证最后齐射时间点不变的情况下，其中车辆等待时间越长，那么最后的暴露时间最短。

①在不增加最迟发射时间的情况下，尽量等到后一辆车到达转载点位再走，从而减少暴露时间。典型例子（第二问第二波中的 F49、F25），如果继续等待，

会增加最迟发射时间，所以选择在下辆车到达之间提前离开。

②在不引起堵车的情况下，尽可能多地待在转载点位。

③每个装载点最后达到的两辆车在装载点等待至总时间为最长时间再走。

如 F24 在 Z01 节点，在 318.1 分钟离开，但是为了增加隐蔽时间，等待到 358.2 分钟再离开，从而增加了 40.1 分钟的隐蔽时间。

第五步：结果分析

经过减少逗留时间和消除相遇冲突、增加隐蔽时间之后，计算的两波齐射时间主要信息详见表 4.3。

表 4.3 两波齐射时间信息

	齐射时间/min	暴露时间/min	途中停留时间/min	隐蔽时间/min
第一波齐射	178.4	2936.6	0	0
第二波齐射	453.7	5393.4	80.8	1213.8
两波齐射	—	8330.0	80.8	1213.8

表 4.3 给出了两波齐射的齐射时间、各暴露时间、途中停留时间以及隐蔽时间。从表 4.3 中可以看出第二波到达齐射点的最长时间为 453.7min，即第二波齐射时间为 453.7min。第二波暴露时间为 5393.4min。**综合整个过程，总暴露时间：8330.0min，途中停留时间为 80.8min，隐蔽时间为 1213.8min。**两次齐射过后，时间已经不算在暴露时间内。综合整个两波齐射过程，重要的时间节点信息见表 4.3，具体线路信息见附录 1，具体机动方案见附件 1。**平均每辆车的暴露时间为 5.78 小时。**

五、 问题二

5.1 问题分析

(2) 除已布设的 6 个转载地域外, 可选择在道路节点 J25、J34、J36、J42、J49 附近临时增设 2 个转载地域。应该如何布设临时转载地域, 使得完成两个波次发射任务的整体暴露时间最短。

与第一问相比, 第一波齐射的路径以及时间不变, 第二波在选择转载地的时候多了 5 个选择。在第二波选择转载地域时, 首先计算了计算第一波齐射点 $F1_i(i=1,2,..24)$, 到达第二波可能齐射点 $F2_i(i=1,2,..36)$ 的最短路径, 可以求得其中每个路径使用的是哪个转载点, 那么当增加了转载地之后, 将新增转载地加入计算矩阵, 最短时间径中经过新增转载点次数最多的两个节点即为增设的转载地域。

增设转载地域之后, 重新计算第一问, 那么可以求得整体暴露时间。此即为最短的整体暴露时间。

5.2 模型建立

第一问中, 选择转载点时, 首先计算第一波齐射点 $F1_i(i=1,2,..24)$, 遍历每个转载地 $Z_i(i=1,2,..6)$, 到达第二波可能齐射点 $F2_i(i=1,2,..36)$, 通过遍历的思想根据 Dijkstra 最短路径算法确定其经过的转载地路径, 得到时间最短矩阵 $MZ_{ij}(i,j=1,2,..24)$ 。再根据 MZ_{ij} 得到第二波的每个最短时间径。

与第一问类似, 仅 $Z_i(i=1,2,..6)$ 从 6 个变成了 11 个 $Z'_i(i=1,2,..11)$, 这样构成了新的 MZ'_{ij} , 以 MZ'_{ij} 其中最短时间径。

设 $MZ'_{ij}, i=1,2,..24, j=1,2,..36$ 代表 F_i 到 F'_i 所经过的 Z_i 的序号 ($1 \leq MZ'_{ij} \leq 11$), 那么可以得到每个临时转载点使用次数 $Z'_i(i=1,2,..11)$ 。选择其中次数较多的两个转载地作为临时转载地, 重新计算问题一。

5.3 算法流程

问题二中, 第一波齐射点位的求解算法和第一问完全相同。第一波齐射点位到第二波齐射点位的求解算法也和第一问一样, 只增加了一个选择新转载地域的算法。

新增转载地域的选择:

增加新的转载地域并不影响第一波发射点位的选择, 但是第一波发射点位到第二波发射点位的的路径会由于新增转载地域而发生改变。所以依据遍历矩阵 $F1-F2$ 来选择最受欢迎的转载地域。该过程由程序实现, 具体算法实现流程见图 5.3.1。

5.4 模型求解

由于整体的求解思路与问题一相同, 所以给出了增加临时转载地的依据: 转载地的最优路径经过次数, 具体见表 5.1。

表 5.1 新增转载地的最优路径经过次数

转载地域	J34	J36	J42	J49	J25
转载地域经过次数	166	24	40	31	78

表 5.1 给出了第一波齐射点到剩余所有齐射点的最优路径经过的新增转载地的次数。从表中可以看出 J34 和 J25 比其余三个点的最优路径经过次数多，即若增加该节点，可以相对较多的减少最优路径的时间。也就是可以使得第二波齐射的路径时间减少量较多。最终，增设的转载地为 J34 和 J25。

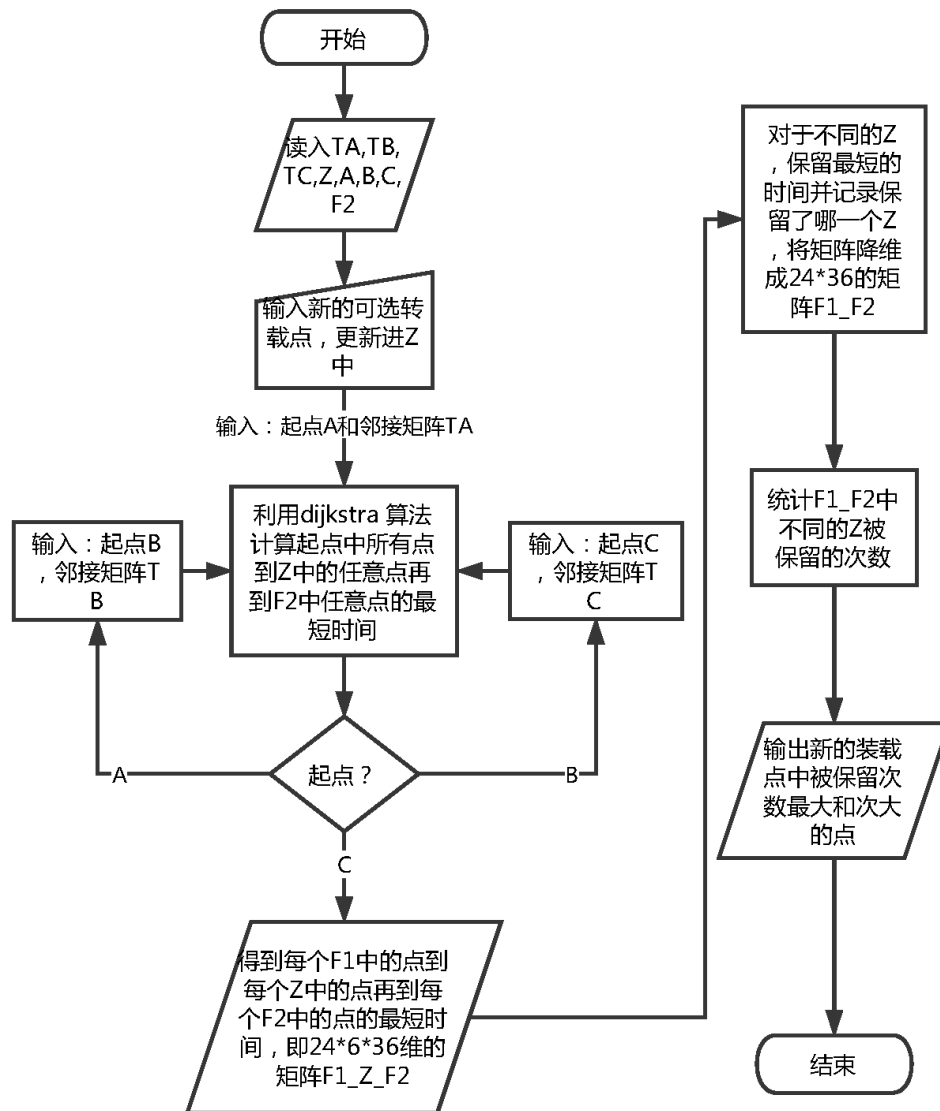


图 5.3.1 新增转载地域的选择的算法流程图

增加了两个节点之后，按照第一问的求解过程，求出增加了转载地之后的整体暴露时间。在对所有最优路径进行消除冲突和增加隐蔽时间的过程中，对可能发生冲突的路径出发节点进行分类，得出图 5.4.1。根据图 5.4.1 可以分析出增加临时转载点对整体暴露时间、转载点冲突、相遇冲突和隐蔽时间的影响。

图 5.4.1 中，不同颜色的区域不会发生道路冲突，区域内部道路可能发生道路冲突。其中，红色区域为不会发生冲突的节点，其余颜色为可能发生冲突的道路节点，每种颜色代表该区域内的第二波节点路径可能互相发生冲突。

从上图可以看出，冲突主要发生在右上区域，与第一问相比，会互相发生冲突的路径明显分散开来，路径的分散会导致道路冲突的等待时间减少，转载地的增加导致开往每个转载地换弹的车辆减少，这样也会减少转载点冲突。

同时，由于路线的分散，会导致相遇冲突的增加，但是转载地冲突仍然是主

要影响因素。由于每个转载地可以同时隐蔽两辆车，所以当每个转载地的装弹车辆数减少之后，在不改变整体的暴露时间的前提下，可以大大增加其隐蔽时间。

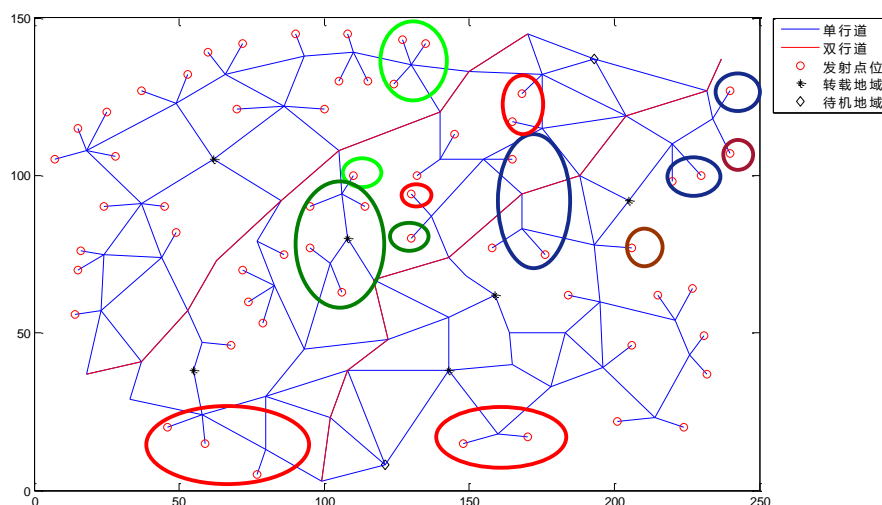


图 5.4.1 可能发生道路冲突分类

5.5 结果分析

图 5.5.1 中显示了增加的两个临时转载地位置分别为 J25 和 J34，即以红圈标出的位置。从图中可以看出，J34 的位置位于第一问中拥堵严重的 Z01 转载地部分，说明 J34 临时转载地的设置缓解了 Z01 的装弹压力和 Z01 附近的道路冲突。而增加的 J25 与 Z06 转载地接近，说明该临时转载地部分替代了原先的 Z06 转载地。这两个临时转载地的加入充分的减少了整体暴露时间。

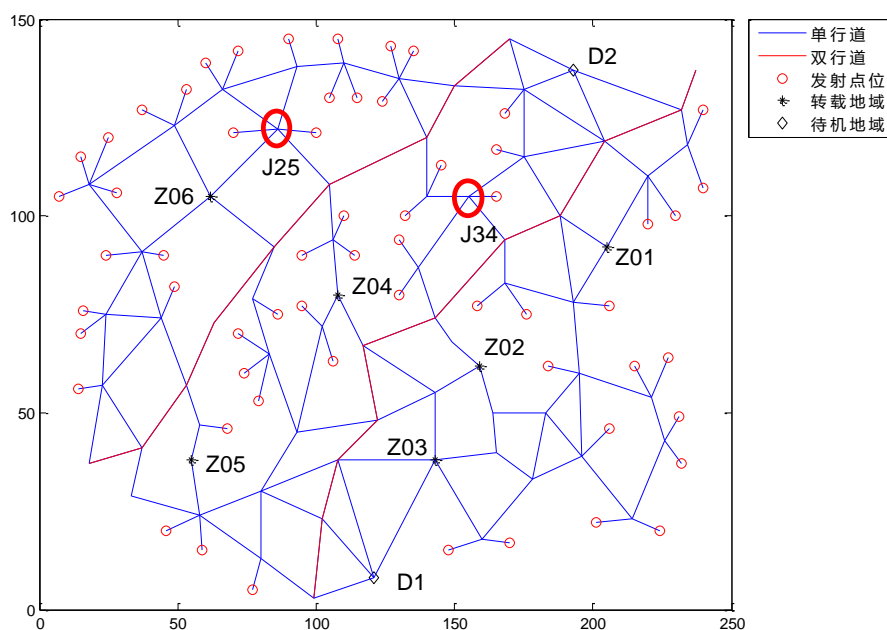


图 5.5.1 增设的两个临时转载地位置

表 5.2 转载地装弹次数

	Z01	Z02	Z03	Z04	Z05	Z06	J25	J34
问题一	6	4	2	5	3	4	0	0
问题二	3	1	2	5	3	0	5	5

表 5.2 统计了问题一与问题二中，增加临时转载地前后的各转载地的装弹次数。从表 5.2 可以看出，增加转载地后，各转载地装弹次数的标准差减少。**Z01 的装弹压力大大减少，而 Z01 的装弹次数过多也正是增加最后齐射时间的关键因素。**问题一中原先 Z06 车需要装弹 4 次，J25 临时转载地的加入替代了该节点的功能，并且同时也增加了整体优化的程度。

图 5.5.2 中显示了问题一和问题二中各转载地装弹次数在总需装弹次数（24 次）中的占比。从图中可以看出，在问题一中，Z01 和 Z06 的占比明显大于其余的转载地，说明这两个地方的装弹压力明显大于其余转载地，这会导致该转载地的装弹地冲突增多，从而增加整体暴露时间。在问题二中，增加了 J25 和 J34 临时转载地后，**J34 缓解了 Z01 的装弹压力，Z01 的占比明显减少；Z06 的装弹任务被 J34 替代。**

同时，从图 5.5.2 可以看出，问题二中各转载地装弹次数占比明显分散，说明了各个转载地的装弹压力趋于平均，这样会明显减少转载地冲突，从而减少等待时间。并且，由于使用了更多的转载地，也会使得每个转载地的隐蔽时间增长。

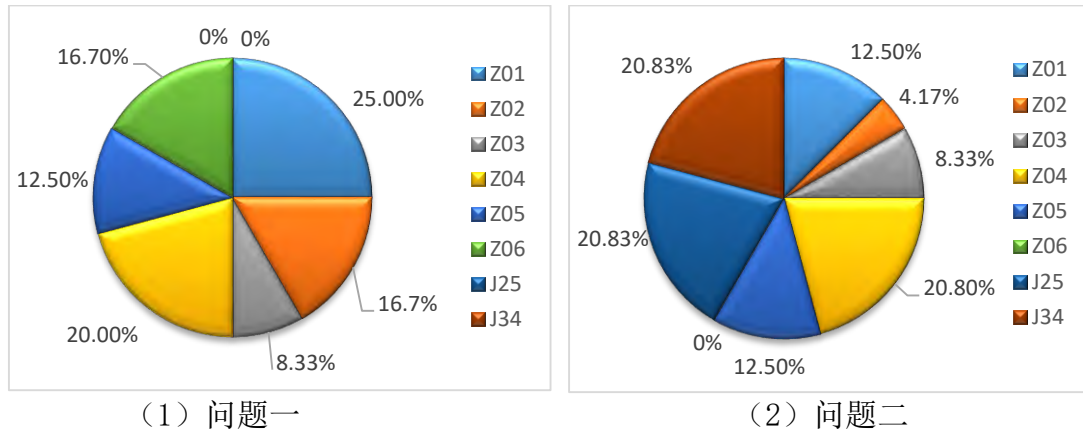


图 5.5.2 各转载地装弹次数占比

表 5.3 增设转载点前后对比

	齐射时间点	齐射时间 /min	暴露时间 /min	途中停留时间 /min	隐蔽时间 /min
问题一	第一波齐射	178.4	2936.6	0	0
	第二波齐射	453.7	5393.4	80.8	1213.8
	两波齐射	—	8330.0	80.8	1213.8
问题二	第一波齐射	178.4	2936.6	0	0
	第二波齐射	416.9	4654.3	33.7	1069.7
	两波齐射	—	7590.9	33.7	1069.7

表 5.3 给出了增设转载地前后的两次齐射任务的主要信息，具体行驶路径见附录 I。从表中可以看出，转载点不影响第一波齐射前的路径规划，所以增设转载地前后的第一波齐射的时间以及第一波总暴露时间不变。与问题一相比，增加

了转载地之后，第二波齐射的暴露时间下降了 739.1 分钟，即下降了 13.7%，**整体的暴露时间下降了 739.1 分钟，8.87%**。

此外，整体的暴露时间降低了，但增加转载地使得隐蔽时间占比增多，所以给出比整体暴露时间更合理的衡量标准：相对隐蔽时间 $c1$

$$c1 = \frac{\sum_{k=1}^6 YT_k}{t2} \times 100\% \quad (5.5.1)$$

在整个两波齐射过程中，隐蔽时间越长越好，暴露时间越短越好，所以隐蔽系数 c 越大说明整个两波齐射过程隐蔽时间优化程度越好，反之则较差。增加转载点前后的隐蔽系数分别 22.50% 和 22.98%，表明增加转载点之后，整个两波齐射过程的优化程度增加，**隐蔽系数增加，整个齐射过程更加有效率。**

途中停留时间从 80.8 分钟减少到 33.7 分钟，**途中停留时间减小了 58.29%**，这也与路径的分散有关，当路径因为去往的转载地不同而分散时，途中因为相遇冲突大大减少。

同样的，对于途中等待时间，给出比途中时间绝对值更合理的衡量标准：相对途中等待时间 $c2$

$$c2 = \frac{tw}{t2} \times 100\% \quad (5.5.2)$$

两波齐射过程中，途中等待时间越短越好。计算得增加转载点前后的相对途中等待时间分别为 1.50% 和 0.72%。第二问的相对途中等待时间明显减小，说明第二问的齐射过程优化程度更高。

最终，增加转载点 J34 和 J25 之后所有节点的到达时刻和出发时刻，具体机动方案见附件。

六、 问题三

6.1 问题分析

3) **新增 3 台 C 类发射装置**用于第二波次发射。这 3 台发射装置可事先选择节点 J04、J06、J08、J13、J14、J15 附近隐蔽待机 (坐标就取相应节点的坐标), 即这 3 台发射装置装弹后从待机地域机动到隐蔽待机点的时间不计入暴露时间内。每一隐蔽待机点至多容纳 2 台发射装置。待第一波次导弹发射后, 这 3 台发射装置机动至发射点位**参与第二波次的齐射**, 同时被替代的 3 台 C 类发射装置完成第一波次齐射后择机返回待机地域 (返回时间不计入暴露时间)。转载地域仍为事先布置的 6 个的前提下, **应该如何选择隐蔽待机点**, 使得完成两个波次发射任务的**整体暴露时间最短**。

与第一问相比, 新增三台 C 类发射装置参与第二次齐射, 被替代的三台 C 类发射装置仅需完成第一波齐射。

问题一中对于 C 类车, 在第一波齐射完机动至第二波齐射点的暴露时间以及行驶路径被节省了。除了这段路本身减少的暴露时间外, 还会减少在行驶过程和转载地换弹时与其他发射装置发生的相遇冲突和转载地冲突。

所以, 在第一波齐射完之后, 选择中间机动时间最长的三辆 C 类发射装置作为被替代的发射装置。然后对剩下的 21 辆车重新进行路径安排。接着, 在不影响第二波齐射时间的前提下, 将所有空余发射点 (15 个) 到所有可选择隐蔽待机点的时间最短径算出, 选择其中暴露时间最短的路径, 最后得到三个隐蔽待机点到第二波齐射点的时间最短径。

6.2 模型建立

首先求出第一波齐射点机动至第二波齐射点的 C 车的最长三条路径。在第一问中, 第一波齐射点机动至第二波齐射点的路径定义如下。

对于 $L3_m (m=1, 2, \dots, 24)$ 每个节点的逗留时间为 $\eta 3_{ij} (i, j=1, \dots, 24)$ 。每个 $L3_m (m=1, 2, \dots, 24)$ 中路径的节点数量为 $p_num 3_i (i=1, 2, \dots, 24)$ 。可得第一波齐射点机动至第二波齐射点的最短时间径为:

$$\sum_{j=1}^{p_num 3_i} T 3_{ij} + \sum_{j=1}^{p_num 3_i} \eta 3_{ij} (i=1, 2, \dots, 24, j=1, 2, \dots, p_num) \quad (6.2.1)$$

对式 (6.2.1) 求出的结果进行排序, 得出 C 车中时间最长的三条路径, 将其删除。再对剩下的 21 个发射点重新进行第二波齐射机动路径的规划。利用第一问的模型, 可以求出 21 条最短时间路径 $T 4_{ij} (i, j=1, 2, \dots, 21)$

接着, 求出所有空余发射点 (15 个) 到所有可选列的最小值:

$$\min M 2_{ij} (j=1, 2, \dots, 6) \quad (6.2.2)$$

式 (6.2.2) 求出的是每个隐蔽待机点到剩余发射点的时间最短径, 由于一个隐蔽待机点可以停两辆 C 类发射机, 所以时间最小的三条路径所对应的起始点即为选择的两个隐蔽待机点和隐蔽待机的 C 类发射车的第二波齐射点。

设这三条时间最短径为 $T 4'_{ij} (i, j=1, 2, 3)$ 。在确定了第二波的 24 条时间最短径之后, 按照第一问的模型求出第二波的总逗留时间 $\eta 4$, 这里的逗留时间已经减去隐蔽时间。

设第一次齐射点至第二波齐射点的路径为 $L 4_m (m=1, 2, \dots, 24)$, 每个 $L 4_m$ 中路

径的节点数量为 $p_num4_i, (i=1,2...24)$ 。可得第一波齐射点机动至第二波齐射点的最短时间为：

$$\sum_{j=1}^{p_num4_i} T4_{ij} + \eta4, (i=1,2,...24, j=1,2...p_num4_i) \quad (6.2.1)$$

这样即可以求出所有发射装置的路径。根据第一问，即可得出整体的暴露时间。

$$t = \sum_{i=1}^{24} \left(\sum_{j=1}^{p_num3_i} T3_{ij} + \sum_{j=1}^{p_num3_i} \eta3_{ij} \right) + \sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^{p_num4_i} T4_{ij} + \eta4 \quad (6.2.2)$$

再将得出来的结果与第一问的结果进行比较，增加了隐蔽待机点会对整个两波齐射过程产生什么样的影响。

6.3 模型求解

第一波所有的车路径不变，删除 C 类发射车第二波齐射机动最长时间最短径。求得最长时间最短径见表 6.1 和图 6.2.1。

表 6.1 C 类发射车第二波齐射机动最长时间最短径

删除路径	删除节点的路径
路径 1	F24-J32-J33-J4-Z1-J50-J53-F51
路径 2	F58-J61-Z3-J57-J58-J59-J62-F60
路径 1	F25-J33-J4-Z1-J4-J5-J34-J35-F27

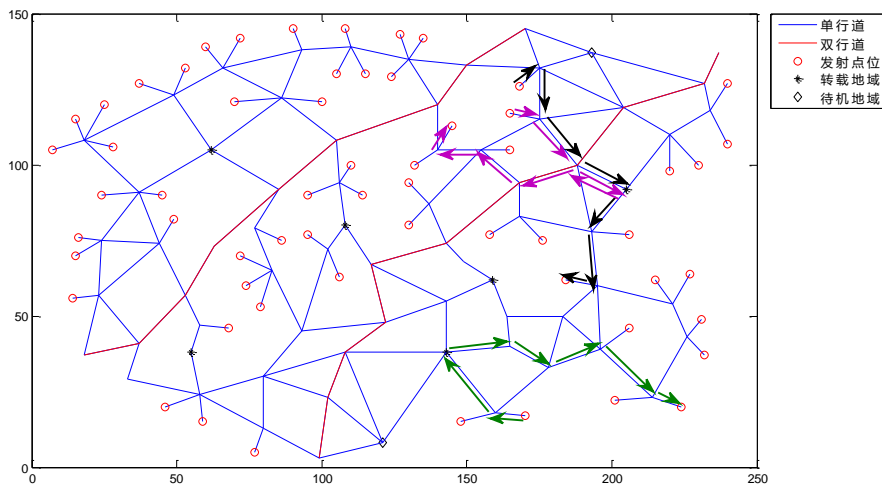


图 6.2.1 C 类发射车第二波齐射机动最长时间最短径

表 6.1 和图 6.2.1 描述了删除的三个 C 类车在第二波齐射机动最长时间最短径。从图中可以看出，其中两条时间最短径在第一问最为拥挤的“右上角”，这样会大大减少相遇冲突和转载地冲突，即相比较第一问隐蔽系数会增加，途中停留时间会减少，整体暴露时间大大减少。还有一条墨绿色路线虽然不在最为拥挤的路段，但是由于需要去 Z03 装弹，导致需要去更远的第二波齐射点，所以时间过长，这条路径也被删除了。

删除了三条最短径之后，求出剩余 21 条路径的时间最短径，与第一问相比，一共有七条时间最短径发生了变化。表 6.2 显示了发生变化的时间最短径在第一波齐射点到第二波齐射点的机动路线。

删除前（第一问）	删除后（第三问）
F44-J47-J48-Z1-J4-J5-J49-F48	F44-J47-J48-Z1-J50-J53-F51
F46-J48-Z1-J4-J5-J34-J35-F28	F46-J48-Z1-J4-J5-J49-F48
F47-J48-Z1-J50-J53-J56-F52	F47-J48-Z1-J4-J5-J34-J35-F27
F45-J47-J48-Z1-J50-J53-J56-F53	J47-J48-Z1-J4-J5-J34-J35-F28
F26-J34-J5-J4-Z1-J50-J53-J56-J60-F55	F26-J34-J5-J4-Z1-J50-J53-J56-F52
F49-J49-J5-J4-Z1-J50-J53-J56-J60-F56	F49-J49-J5-J4-Z1-J50-J53-J56-F53
F50-J50-Z1-J50-J53-J59-J62-F59	J50-Z1-J50-J53-J56-J60-F55

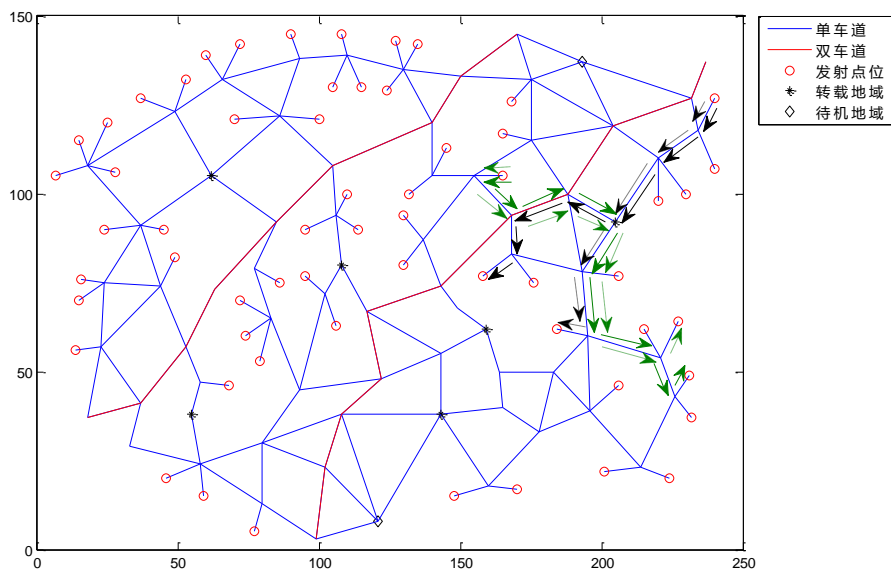


图 6.2.2 删除前后发生变化的部分时间最优路径

如图 6.2.2 所示，实线箭头代表第一问求出的路线，虚线箭头代表第三问求出的路线。黑色箭头代表 F44 出发的路线，这个路线的改变缓解了 Z01-J04 路段的堵车压力。绿色箭头代表 F26 出发的路线，这个路线（目的发射点）的改变缩短了路程时间。所以这种改变可以大大减小转载地冲突和相遇冲突。

表 6.3 隐蔽待机点到第二波齐射点行驶时间排序

序号	隐蔽待机点	第二波发射点	行驶时间/min
1	J14	F06	75.1
2	J13	F06	77.6
3	J14	F04	83.0
4	J14	F05	83.0
5	J13	F04	85.5
6	J13	F05	85.5
7	J15	F09	110.4

求出 21 条时间最短径之后，在不引起道路冲突的情况下，选择距离未经分

配的发射点最近的可选择隐蔽待机点作为临时隐蔽待机点。前七个合适的隐蔽待机点到未被分配的发射点的路线的最短时间见表 6.3。

表 6.3 显示了隐蔽待机点到第二波齐射点的时间最短径的时间。J14 点的路径由于会与其他时间最短径发生冲突，所以不选择 J14 点作为隐蔽待机点。剩下的 J04、J06、J08 距离未被分配的发射点过远，所以未被考虑。每个隐蔽待机点可以隐蔽两辆 C 类发射装置，所以选择 J13-F04，J13-F06 两条路径，接下来的时间最短径为 J15-F09。即选择表 6.3 中三条灰色起止点作为新的路径起止点。

6.4 结果分析

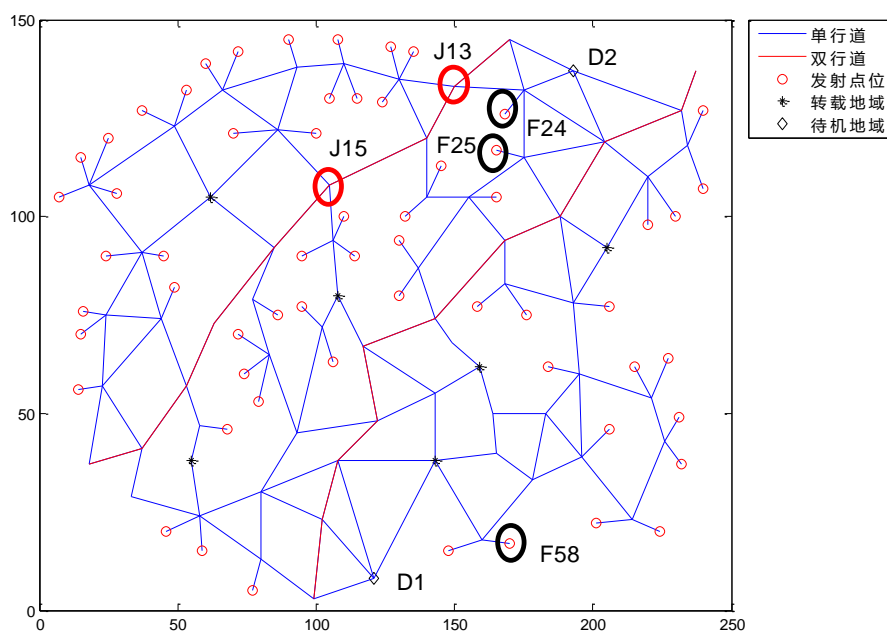


图 6.4.1 隐蔽待机点以及被替代的 C 类发射车返回位置示意图

图 6.4.1 隐蔽待机点的位置以及三辆被替代的 C 类发射车第一波齐射点的位置。从图中可以看出，被替代的三辆 C 类发射装置分为两种情况，一种是靠近 Z01 附近的 F24 和 F25，一种是行驶路程较长的 F58。这说明当这三辆反射装置不需要进行第二波机动时，Z01 的装弹压力会大大减少，Z01 区域的拥堵情况会大大减少。

由于增加了车辆数，所以给出比整体暴露时间更合理的衡量标准：**发射装置平均暴露时间**：

$$\bar{t} = \frac{t}{CN} \quad (6.4.1)$$

其中， t 表示整体暴露时间， CN 表示发射装置数量。得出前三问的发射装置平均暴露时间，见表 6.5。

表 6.5 前三问的发射装置平均暴露时间

	整体暴露时间/min	平均暴露时间/min
问题一	8330.0	347.1
问题二	7589.9	316.2
问题三	7516.4	313.2

表 6.5 中显示了前三问各发射装置的平均暴露时间。从表中可以看出，问题三和问题一相比，整体暴露时间大幅下降，与问题二相比，变化不大。但是由于计算的是整体暴露时间，问题三增加了发射装置，所以**发射装置的平均暴露时间与第一问相比，下降了 30.9min。**

与第一问相同，在确定了行驶路径之后，再对转载点冲突和相遇冲突进行优化。最后得出每辆车在每个节点的到达时刻与出发时刻。具体信息详见附件。对路径中的两种冲突情况进行修正之后，我们给出前三问的两波齐射时间的主要时间信息，具体见表 6.4。

表 6.4 前三问两波齐射主要时间信息对比

	齐射时间点	齐射时间/min	暴露时间/min	平均暴露时间/min
问题一	第一波齐射	178.4	2936.6	347.1
	第二波齐射	453.7	5393.4	
	两波齐射	—	8330.0	
问题二	第一波齐射	178.4	2936.6	316.2
	第二波齐射	416.9	4654.3	
	两波齐射	—	7589.9	
问题三	第一波齐射	178.4	2936.6	313.2
	第二波齐射	419.1	4579.8	
	两波齐射	—	7516.4	

表 6.4 表示了问题三与前两问的主要时间信息，问题三的具体行驶路径见附录 I。从表中可以看出，第三问的暴露时间与第二问相近，**比第一问的整体暴露时间减少了 813.6 分钟，即下降了 9.77%。**

第二问与第三问相比，齐射时间、整体暴露时间、平均暴露时间均无太大差距。说明增加临时转载地和增加隐蔽待机点（替换车辆）虽然对整个两波齐射过程的改善角度不同，一个是通过增加转载点进行分流，一个是取代最长暴露时间的发射装置，但是**问题二和问题三的这两种方案都对机动方案做出了相似程度的改善。**

七、 问题四

7.1 问题分析

(4) 道路节点受到攻击破坏会延迟甚至阻碍发射装置按时到达指定发射点位。考虑攻防双方的**对抗博弈**，**建立合理的评价指标**，**量化分析**该路网最可能受到敌方攻击破坏的**3个道路节点**。

该问题是研究网络节点重要性的问题，重要性越大的节点即为最可能在网络中收到地方攻击破坏。节点在网络中的重要度是衡量节点变化对系统造成影响的大小。可以通过对抗博弈模型来分析。

从对抗博弈模型的两个不同角度分析问题四，一是**部分信息静态博弈模型**，攻击方不知道待机区域的具体位置，对于攻击方来说网络中所有节点的重要性只和节点在网络中的具体位置以及和转载点距离有关。二是**完全信息静态博弈模型**，攻击方知道待机区域的位置，此时节点在网络中的重要性衡量指标也发生改变^[5]。需要具体问题具体分析。

通过前三问中得出的最短路径，将最短路径经过**每个道路节点的频率和节点流量负载**作为衡量节点重要性的新指标。进而得出每个问题中最重要的三个道路节点。

7.2 部分信息静态博弈模型

部分信息静态博弈模型中，攻击方不知道待机区域的位置和发射点的位置，地图上任何区域的节点重要性只和道路网络拓扑结构和与转载点距离有关。利用改进的社会网络分析法确定节点在网络的重要性。

7.2.1 模型建立

首先给定节点在网络中的重要性评价指标^[6]：

指标 1: 节点的度数 λ_i ，表示连接节点 i 的道路数。

指标 2: 节点的网络聚合度 e_i ，表示每个道路节点到其它道路节点时间最短路径之和的倒数，定义为

$$e_i = \frac{1}{\sum_{j \in G} d_{ij}}, (i = 1, 2, \dots) \quad (7.2.1)$$

其中 e_i 为节点 i 的聚合度， d_{ij} 为 i 到 j 的时间最短路径的时间。

指标 3: 节点的介数 δ_i ，表示经过该节点的最短路径的数量与全网最短路径个数的比值。

$$\delta_i = \frac{N_i}{N}, (i = 1, 2, \dots) \quad (7.2.2)$$

其中 N 表示网络中最短路径总数， N_i 表示经过节点 i 的最短路径个数。

表 7.1 评价指标的功能特性

评价指标	功能特性
度数	拥堵蔓延至该节点的可能性
聚合度	该节点失效造成其它节点失效的可能性
介数	网络的核心节点核心干线，行驶的必经处

三个评价指标对节点重要度都呈正相关，即指标值越高，道路节点越重要。分别分析各道路节点在三种评价指标下的重要程度，根据各评价指标值的大小排序，节点重要度最大的三个节点即为该指标下最可能受到攻击的节点。

7.2.2 模型求解及结果分析

据三种评价指标分别给它们最重要的5个道路节点，具体见表7.2。

表 7.2 三种评价指标下重要度最大的五个道路节点

重要顺序	1	2	3	4	5
度数	J03	J04	J45	J05	J06
聚合度	J07	J06	J15	J37	J08
介数	J15	J16	J06	J14	J07

表 7.2 给出三种评价指标下重要度最大的前五个道路节点。从表中可以看出，不同评价指标下，道路节点的重要性都不相同，说明各评价指标具有互不相关性，有些道路节点在不同评价指标下都重要程度都非常高，所以该节点尤其重要。不同指标所表示的功能特性不同，即从不同角度去分析该节点的重要性。

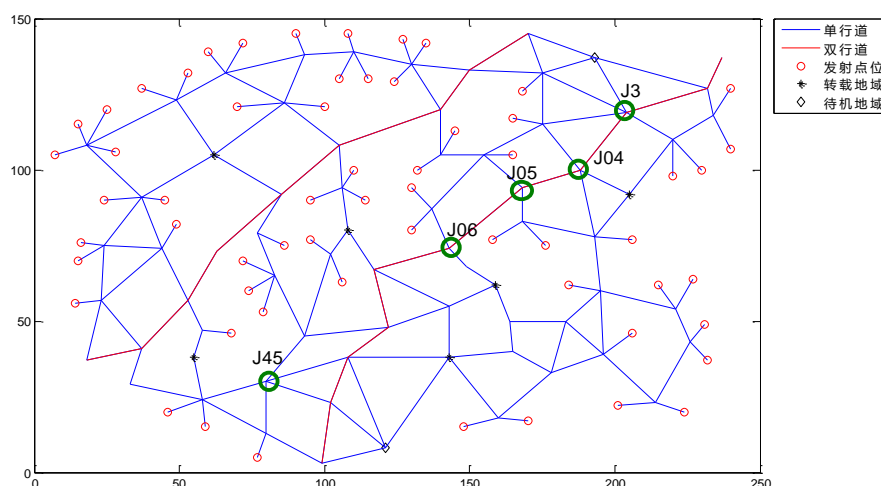


图 7.2.1 度数最大的五个道路节点

图 7.2.1 显示了度数最大的五个道路节点。度数代表拥堵蔓延至该节点的可能性，度数越大说明该节点拥堵的可能性越大。从图中可以看出，该评价指标下，最重要的五个道路节点全部分布在主干道路上。局限性在于仅仅描述了节点的“出入度”问题。该指标可以一定程度地描述每个节点的重要性。

图 7.2.2 显示了聚合度最大的五个道路节点。从图中可以看出，该五个道路节点全部集中于网络的中央。聚合度描述的是该节点失效造成其它节点失效的可能性。说明该节点在整个网络中的重要性，但是只能描述整体的道路连接情况，没有给出偏于中心的道路网的重要性程度。

图 7.2.3 显示的介数最大的五个道路节点。介数是网络的核心节点核心干线，描述大部分最短路径经过的道路节点。从图中可以看出，这些道路节点不仅仅分布在主干道路上（与度数相似），而且分布在道路网络中心（与聚合度类似），所以该评价指标比较符合实际情况。

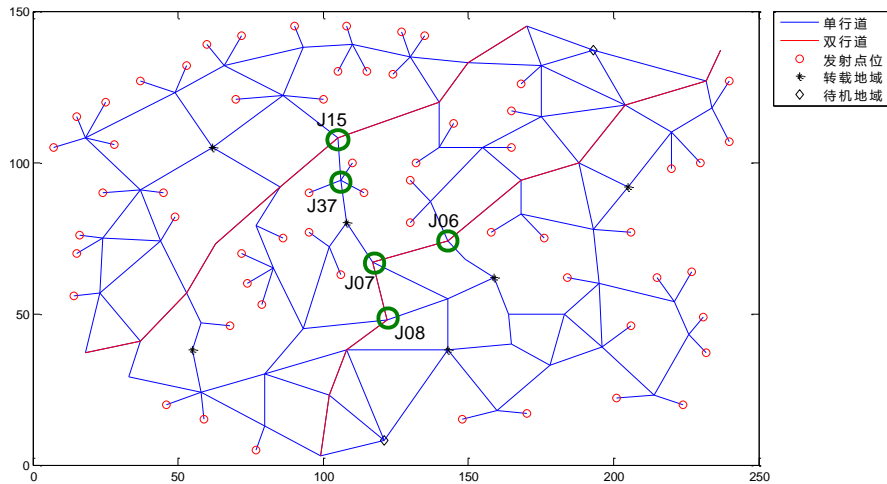


图 7.2.2 聚合度最大的五个道路节点

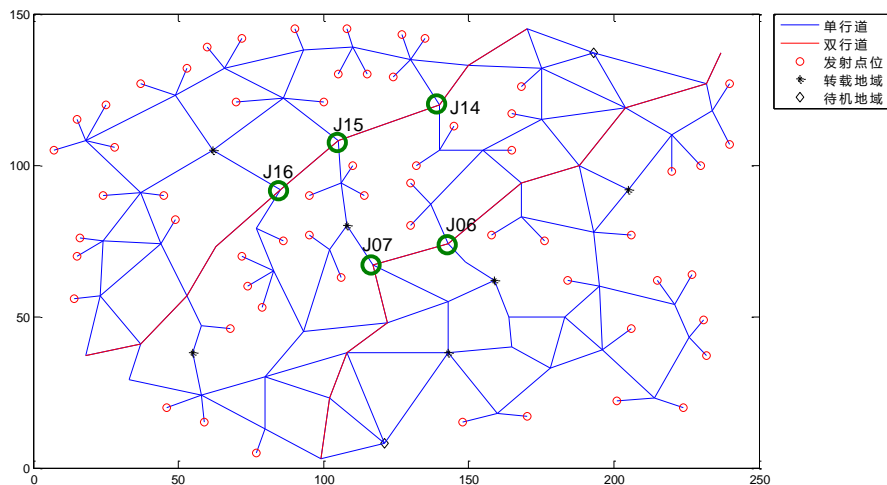


图 7.2.3 介数最大的五个道路节点

综上所述，从三种不同角度分析道路节点在网络中的重要性可以看出，针对不同评价指标给出的重要节点是不同的。有些道路节点在不同的评价指标下，都表现为较高的重要性。所以我们给出**综合评价指标**：

$$Q_i = F(\lambda_i, e_i, \delta_i), i=1,2,3... \quad (7.2.1)$$

三种评价指标下各自**最重要的 5 个道路节点**中各道路节点出现的次数作为**综合评价指标**。根据评价指标按大小排序选出节点重要度最大的三个节点。得出综合评价指标下三个重要节点位于网络的位置，具体见图 7.2.4。

图 7.2.4 表示的综合评价指标下**最重要的三个道路节点 J15, J07, J06**。从图中可以看出，节点 7 处于主干道路上，并且是和另一条主干道路相连的交叉路口点，并且节点 7 和三个转载点距离都较近，是重要的交通枢纽。类似的还有节点 6，它位于主干道路并且和节点 6 直接相连。同时，是节点 15，节点 15 位于另一条主干道路上并且是道路另一侧所有节点和发射点的交通枢纽，即该评价指标可以合理的描述所有道路节点的重要性。

综上所述，在部分信息静态博弈模型中，最可能受到敌方攻击破坏的 3 个道路节点为 J15, J07, J06。

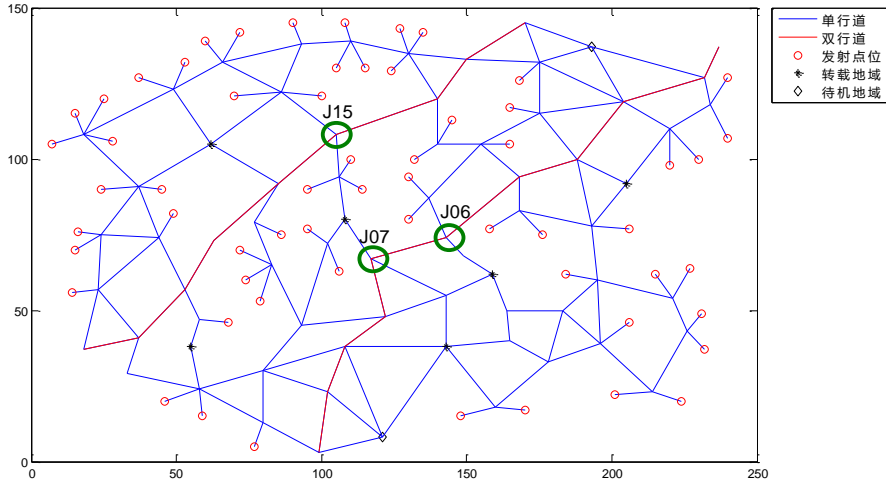


图 7.2.4 综合评价指标

7.3 完全信息静态博弈模型:

假设攻击方知道待机区域、发射点以及转载点的位置,此时节点的重要性不仅与网络拓扑结构有关还与到待机区域和发射点的距离有关。而攻击方可以根据待机区域位置得出同样的最优路径导弹发射路线规划,那么衡量节点重要性的指标就需要发生改变。

7.3.1 模型建立

根据问题一导弹发射最优路线,可以得到两波导弹发射过程中时间最优路径经过每个节点的次数 N_j 以及流量负载 D_j , 即经过节点 j 的最短路径的时间和。将 N_j , D_j 可以作为衡量节点在该道路网络的重要性指标^{[7]-[8]}。

对于时间最短路径, 设 $\mathbf{L5}_m (m=1,2,\dots)$, 对应的路径中 p_i 和 p_j 两个节点之间最短时间为 $T5_{ij} (i, j=1,2,\dots)$ 。对 $\mathbf{L5}_m (m=1,2,\dots, 24)$ 中每条路径的节点数量为 $p_num5_m (m=1,2,\dots)$, 那么可以得到路径 i 的时间 TL_i

$$TL_i = \sum_{j=1}^{p_num5_i} T5_{ij} \quad (7.3.1)$$

定义 0-1 矩阵, 表示最短路径 i 是否经过道路节点 j

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & \mathbf{L5}_i \text{ 经过道路节点 } j \\ 0, & \mathbf{L5}_i \text{ 不经过道路节点 } j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \quad (7.3.2)$$

那么可以得到

$$N_j = \sum_i \varepsilon_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \quad (7.3.3)$$

其中, N_j 表示经过道路节点 j 的路径数。

给出节点 j 流量负载 D_j 的定义:

$$D_j = \sum_i \varepsilon_{ij} TL_i, i, j = 1, 2, 3, \dots \quad (7.3.3)$$

其中, i 的取值范围为最短路径数量, j 的取值范围为道路节点数量。

7.3.2 模型求解及结果分析

根据前三问得到的所有最优路径，统计每一个道路节点经过的路径数，进而得到每一个道路节点经过的路径数，从计算结果中选取评价指标最大的前四个道路节点，具体见表 7.3。

表 7.3 前三问条件下重要度最大的四个道路节点

	评价指标		评价指标最大的四个道路节点			
	N_j	D_j				
问题一	N_j	D_j	J37	J04	J07	J50
	N_j	D_j	J37	J50	J4	J07
问题二	N_j	D_j	J03	J07	J21	J37
	N_j	D_j	J03	J21	J07	J34
问题三	N_j	D_j	J37	J07	J04	J08
	N_j	D_j	J37	J07	J15	J04

根据前三问得出的最优路径得出每一问最重要的四个道路节点，具体在道路网中的位置见图 7.3.1。

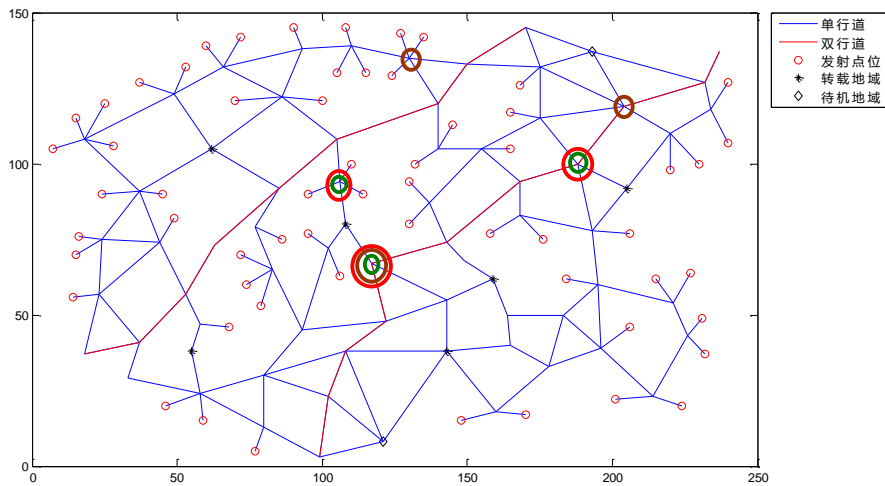


图 7.3.1 前三问中重要度最大的道路节点

图 7.3.1 中显示了三个问题的得出的最重要的道路节点。用三种不同颜色表示三个不同问题得出的重要道路节点。从图中可以看出，虽然每个问题最易受到打击的道路节点不同，但是其中有些道路节点在不同的问题中都表现出较高的重要性。

所以，我们定义出现次数最多的道路节点即为最易受到攻击的道路节点。综合考虑两种评价指标，可以得出问题一、二和三最易受攻击的道路节点，具体见表 7.4。

表 7.4 前三问中最易受到攻击的道路节点

	最易受到攻击的道路节点		
问题一	J37	J04	J07
问题二	J03	J07	J21
问题三	J37	J07	J04

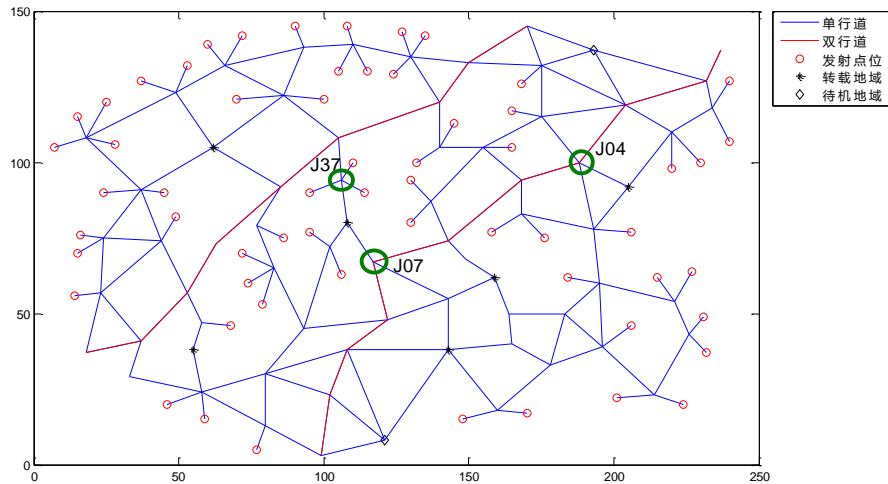


图 7.3.2 前三问中最易受到攻击的道路节点

图 7.3.2 描述了前三问中最易受到攻击的道路节点位置。从图中可以看出 J37、J04 和 J07 在道路网络中占据重要地位。J37 虽然不是主干道路上，但是该节点是道路网络中的中心点，并且是两条主干路的连接点，而且 J37 节点含有三个发射点。所以，不管从网络拓扑考虑还是道路连通性考虑，J37 都是很关键的节点。J4 和 J7 都是主干道路节点而且距离多个转载点距离都很小，使它们在网络中具有重要地位。

综上所述，在完全信息静态博弈模型下中，最有可能受到攻击的三个节点分别是 J37、J04 和 J07。

八、 问题五

8.1 问题分析

(5) 在机动方案的拟制中,既要考虑整体暴露时间尽可能短,也要规避敌方的侦察和打击,采用适当分散机动的策略,同时还要缩短单台发射装置的最长暴露时间。综合考虑这些因素,重新讨论问题(1)。

问题五与前四问不同的是,从单目标规划转化为了多目标规划问题^[9]。采用分步优化的解决方式。

首先考虑适当分散,由于所有发射车都需要前往转载地,所以对所有转载地的发射点进行分配需要使用的发射点。

其次考虑总体最短暴露时间,此步骤可以使用第一问的数据模型,只是将60个发射点减少为48个发射点。

最后考虑单台发射装置的最长暴露时间,将最长暴露时间的发射装置按照“优先隐蔽于转载地”,即增加该种发射装置的隐蔽时长,从而达到缩短最长暴露时间的目的。

8.2 模型建立

第一步:适当分散机动

由于机动是在转载地附近机动,因此先确定距离每个转载地最近的发射点,即确定48个发射点。以最短距离矩阵作为优化值,得出每个转载地附近的8个分配发射点,将这8个分配发射点作为两波齐射的发射点。其中4个为第一波发射点,另外4个作为第二波发射点。

设转载地 i 距离发射点 j 的最短路径为 DZ_{ij} ,其中 $i=1,2\dots6,j=1,2\dots60$ 。对每一行求出其最大的8个转载地(详见算法见算法流程图),记为 $ZF_{ij}(i=1,2\dots6,j=1,2\dots8)$ 。例如, ZF_{12} 表示距离转载地Z01“距离第二近”的发射点。

第二步:总体暴露最短时间

在确定了48个发射点之后,按照第一问的模型,可以分为两个齐射波次,求出时间最短路径。需要注意的是,第一波的每个齐射点在第二波机动时经过的转载地是确定的。

设待机点到所有可能发射点的最短距离为 $DF_{ij}(i=1,2,j=1,2\dots48)$,第一波发射点为 $F1_i(i=1,2\dots24)$,第二波发射点为 $F2_i(i=1,2\dots24)$ 。

对于第一波:由于适当分散机动,所以距离每个待机点时间最短的12个发射点的计算需要整体来考虑。因此需要重新计算第一波的发射点以及发射路线(具体算法见算法流程图)。求出每个待机点的12个发射点之后,按照第一问模型继续求解。

需要注意的是,每个转载地 $ZF_{ij}(i=1,2\dots6,j=1,2\dots8)$ 的4个确定为第一波齐射点之后,剩余的4个即为前4个第一波齐射点的发射车去往的第二波齐射点。

对于第二波:由于第一波的齐射点和其对应的转载地已经确定,所以只需要规划每个转载地内 $F1_i(i=1,2,3,4)$ 到 $F2_i(i=1,2,3,4)$ 的时间最短路径。这部分使用Dijkstra算法即可求出。

设求出的时间最短路径（总时间最短径），定义 $L6_m (m=1, 2, \dots, 24)$ 对 $L6_m (m=1, 2, \dots, 24)$ 中每条路径的节点数量为 $p_num6_m (m=1, 2, \dots, 24)$ 。对应的路径中 p_i 和 p_j 两个节点之间最短时间为 $T6_{ij} (i=1, 2, \dots, 24, j=1, 2, \dots, p_num6_i)$ 。再对其中的转载地冲突和相遇冲突进行优化。

第三步：单台发射装置的最长暴露时间

在优化了转载地冲突和相遇冲突之后，对于最长暴露时间的发射装置，可以通过增加其在转载地的隐蔽时间来减少其暴露时间。这一步即为第一问中隐蔽时间的确定。

设发射装置 j 在每个转载地 i 的隐蔽时间为 $TC_{ij} (i=1, 2, \dots, 6, j=1, 2, \dots, 24)$ 。

对于每辆车，在转载地中的隐蔽时长是可调节的。对于最长暴露时间的发射装置，使其隐蔽时间尽可能长，从而减小最长暴露时间的发射装置。重复上述步骤，由于隐蔽时长是有最大值的，直至最长暴露时间的发射装置的隐蔽时长的增加会导致其他发射装置的暴露时间超过该装置，这样即做到了最大优化程度。

8.3 算法流程

考虑到要使发射装置尽可能的分散，所以选择分散在不同转载地域周围的发射点位。首先，第一波和第二波一共需选择 48 个发射点位，将这 48 个发射点位均匀分配到 6 个转载地域。然后，根据这 48 个发射点位到待机地域 D1、D2 的距离，选择出第一波的 24 个发射点位 F1。再以总暴露时间最短为目标，选择 F1 到 F2 的最优路径。

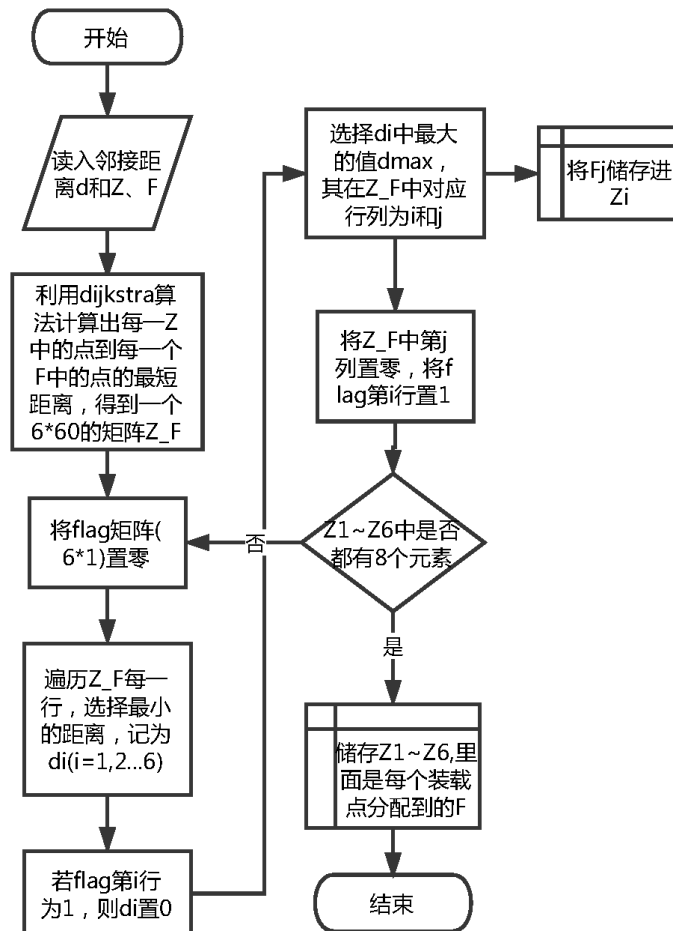


图 8.3.1 确定每个转载地域附近的 8 个发射点位

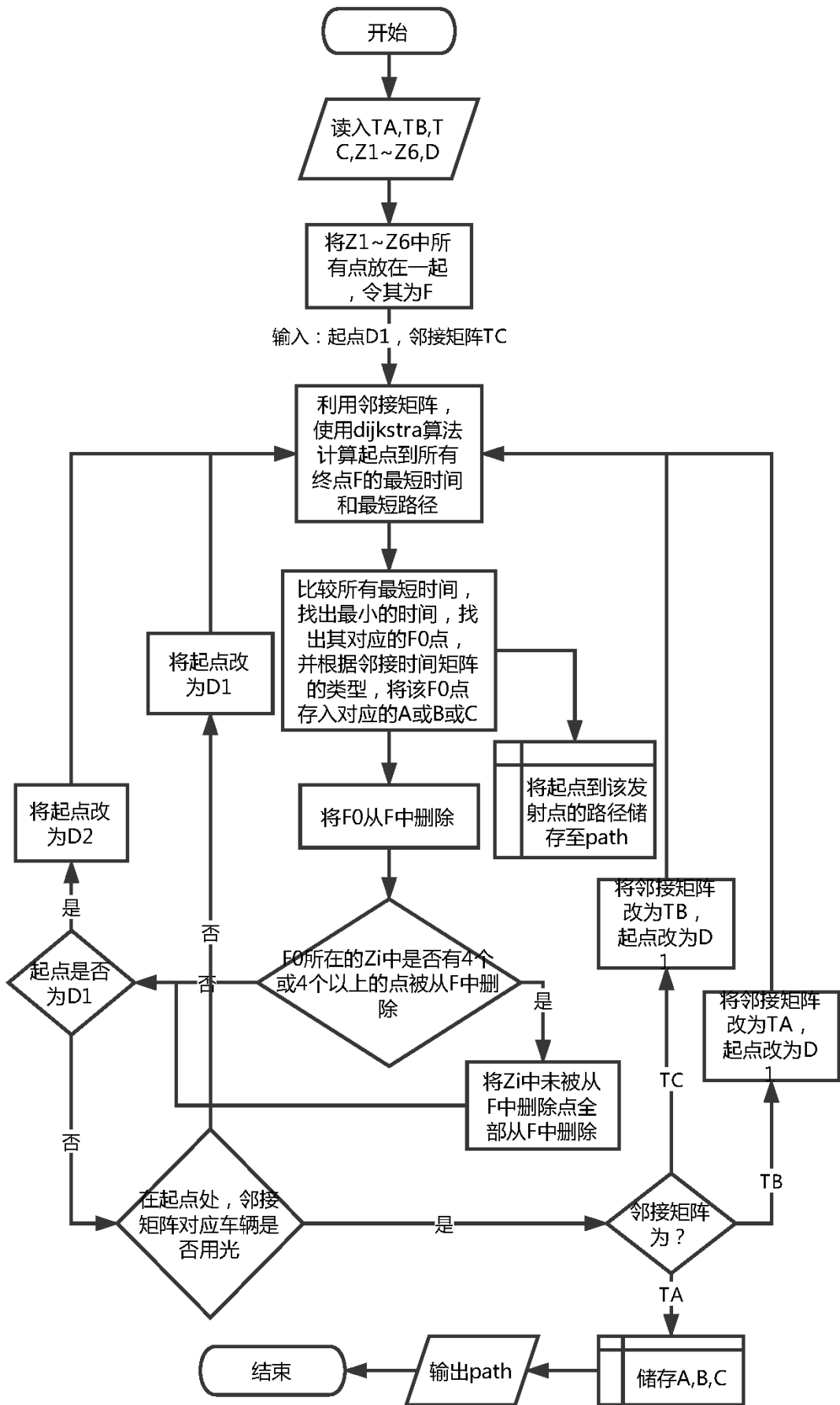


图 8. 3. 2 从待机地域到第一波齐射点位的求解

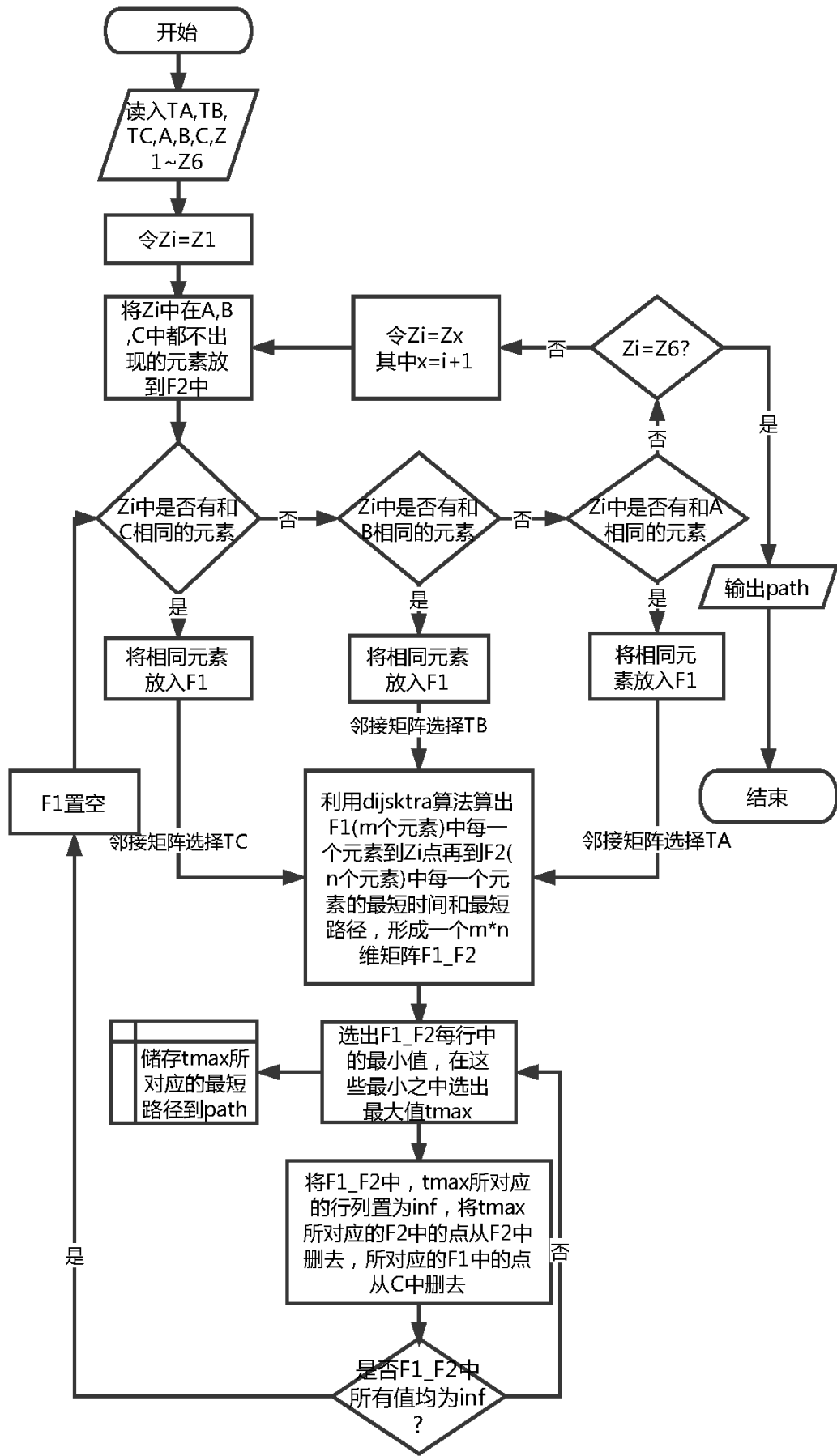


图 8.3.3 从第一波齐射点位到第二波齐射点位的程序求解

第一步：确定每个转载地域附近的 8 个发射点位

先计算出每个转载地域到达 60 个发射点位的最短距离，再在兼顾全局的情况下，尽量使每个转载地域附近的 8 个发射点位到达该转载地域的距离之和最短。这部分由程序实现，算法的具体实现流程见图 8.3.1。

第二步：从待机地域到第一波齐射点位的求解

在 48 个已选择发射点位中，由 D1、D2 轮次选择靠近其的发射点位，以保证 24 个第一波发射点位平均分配在 D1、D2 且总暴露时间最短。这一部分由程序实现，算法的具体实现流程见图 8.3.2。

第三步：从第一波齐射点位到第二波齐射点位的程序求解

为了降低程序的复杂度，首先不考虑道路冲突和转载地域的转载时间。针对每一个转载地域所分配到的 8 个发射点位分别求解。以总暴露时间最短为目标，找出 4 个 F1 到 4 个 F2 的最短路径。算法的具体实现流程见图 8.3.3。

8.4 模型求解

第一步求出每个转载地附近的 8 个分配发射点，将这 8 个分配发射点作为两波齐射的发射点。并在第二步和第三步中分出 8 个分配发射点的第一波齐射点和第二波齐射点。

表 8.1 每个转载地两波的齐射点

转载地	第一波齐射点				第二波齐射点			
Z01	F24	F25	F46	F47	F50	F44	F45	F28
Z02	F26	F27	F49	F48	F52	F51	F30	F29
Z03	F58	F57	F37	F54	F59	F53	F60	F32
Z04	F38	F7	F39	F34	F11	F31	F33	F35
Z05	F43	F42	F41	F40	F23	F22	F21	F20
Z06	F36	F9	F10	F19	F12	F13	F18	F8

表 8.1 显示的每个转载地两波齐射的发射点。道路网络中画出了所有节点，具体见图 8.4.1。

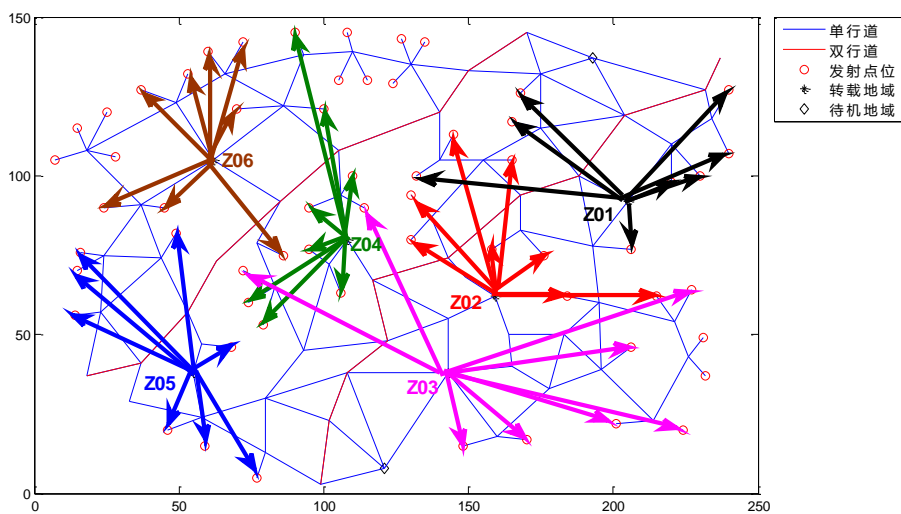


图 8.4.1 每个转载地的分配发射点

图 8.4.1 中以不同颜色表示出了 6 个转载地的分配发射点。从图中可以看

出，分配发射点分布在每个转载地周围。从整个道路网络中可以看出，所有的发射点平均分布在网络中，符合题设条件的分散机动的题设要求。

但是这种分散机动会导致第一波齐射时间的大大推迟，同时也会导致第一波整体的暴露时间大大增加。

接着，利用 8.3 第三步的算法，解出在理想情况下第一波发射点到第二波发射点的最优路径，但是，由于没有考虑堵车和装载地的装载时间问题，所以对得到的结果进行人工优化，整体优化思路与问题一相同，即在不增加第二波发射时间的前提下，调整拥堵、过长路线，最终得到的问题五具体路线见附录 I。

8.5 结果分析

由于问题 5 中要尽可能缩短发射装置的最长暴露时间，让所有发射装置尽可能分散行动，给出两个衡量标准：**转载地信息熵**和**道路利用率**，来衡量发射装置在行动过程中的隐蔽性。

对于道路转载点信息熵（衡量发射装置对所有转载点的使用情况）

路转载点信息熵是用来衡量发射装置在所有转载点的使用情况

设第 i 转载地的装弹次数 NZ_i ，那么道路转载点信息熵 H 为：

$$H = -\sum_i \left(\frac{NZ_i}{24} \cdot \log_2 \frac{NZ_i}{24} \right) \quad (8.5.1)$$

道路利用率 ρ 可以定义为

$$\rho = \frac{\text{道路使用数}}{\text{总道路个数}} \times 100\% \quad (8.5.2)$$

顾名思义，道路利用率是用来衡量该整体发射任务对道路网中道路的利用率。若各发射装置分散机动，那么对道路的利用率也会更高。

问题五每个转载地的信息熵明显平均低于第一问未经人工优化得出的信息熵，说明每个转载地的装弹次数区域均匀，符合分散机动的题设要求。进而计算出两种评价指标转载地信息熵和道路利用率，具体见表 8.2。

表 8.2 问题一和问题五的两种评价指标值

	信息熵	道路使用率
问题一	2.15	39.8%
问题五	2.57	44.9%

表 8.2 显示的是问题一（未经人工优化）和问题五的两种评价指标值。从上表可以看出，问题五中的信息熵比问题一增加约 0.42，即增加了 20%，道路利用率增加约 5.1%，说明在该模型出行方案中，与问题一相比，隐蔽性大大增加，符合题设的分散机动的题设要求。

发射点一共有 60 个，使用发射点数为 48，未使用发射点为 12 个，可以从未使用的发射点分布图中看出是否适当分散机动。

图 8.5.1 中显示的是问题一和问题五未使用的发射点的分布图，分别为图中的红色区域和蓝色区域。从图中可以看出，问题一中的未使用发射点集中分布在网络中的左上角，而问题五的未使用发射点较为分散，这也间接说明了问题五的齐射方案符合题设的分散机动的题设要求。

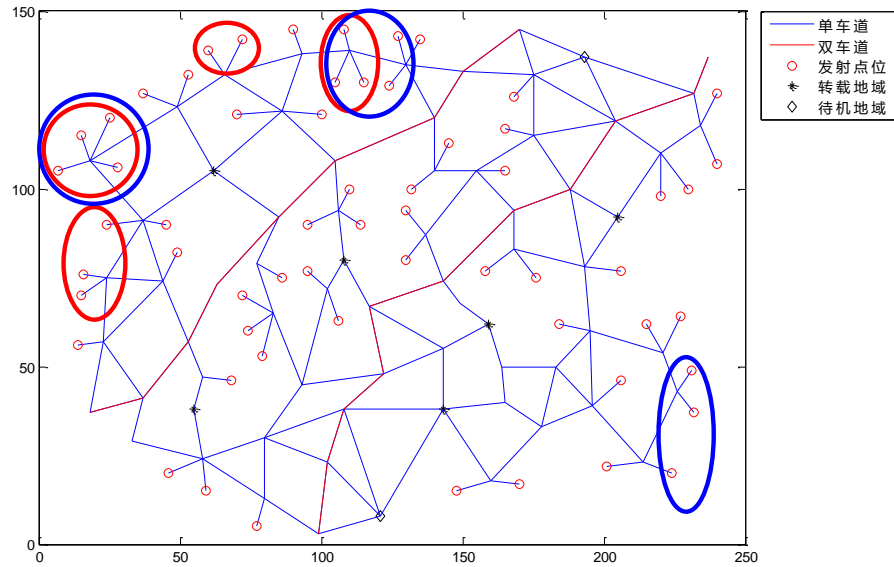


图 8.5.1 问题一和问题五的未使用发射点分布图

表 8.3 前三问两波齐射主要时间信息对比

	齐射时间点	齐射时间 /min	暴露时间 /min	途中停留时间 /min	隐蔽时间 /min
问题一	第一波齐射	178.4	2936.6	0	0
	第二波齐射	453.7	5393.4	80.8	1213.8
	两波齐射	—	8330.0	80.8	1213.8
问题五	第一波齐射	199.6	3429.4	0	0
	第二波齐射	511	5770.9	62.9	1702.7
	两波齐射	—	9200.3	62.9	1702.7

表 8.3 显示了问题一和问题五求解的两波齐射的主要时间信息对比。从上表中可以看出，与问题一相比，问题五的暴露时间增加了 870.3 分钟。第一波齐射时间也推迟了，这是由于优先考虑分散机动导致的。但是，这种分散机动也能带来一定的好处，即其隐蔽性大大增加，其隐蔽时间增加了 488.9 分钟，即增加了 40.28%。问题一和问题五的相对隐蔽系数分别为 22.5%和 29.5%，增加了 7 个百分点。同时，途中停留时间减小了 17.9 分钟，但是问题一、问题五的相对途中等待时间分别为 1.50%和 1.09%，减小了 0.41 个百分点，减小的较少。

综上所述，在问题五发射方案中，与问题一相比，隐蔽性大大增加，发射车被发现的概率减小。

九、 参考文献

- [1] 曾华, 樊波, 倪磊, 等. 多导弹协同作战目标分配方法研究[J]. 飞航导弹, 2016(9):75-79.
- [2] 杨萍, 刘卫东, 李明雨. 常规导弹波次作战中运输任务的规划[C]//不确定系统年会. 2005
- [3] 张志涌, 杨祖樱. MATLAB 教程[M]. 北京航空航天大学出版社, 2015.
- [4] 卓金武. MATLAB 在数学建模中的应用[M]. 北京航空航天大学出版社, 209-217, 2014
- [5] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型. 第4版[M]. 高等教育出版社, 373-389, 2011
- [6] 司守奎, 数学模型算法与应用[M]. 国防工业出版社, 68-76, 201
- [7] 贺绍桐, 薛伦生, 徐晨洋等. 弹道导弹突防作战效能评估研究[J]. 计算机仿真, 2016, 33(09):39-44
- [8] 金宏, 余跃. 基于多波次齐射拦截的突防概率计算模型[C]//2013 中国指挥控制大会. 2013.
- [9] 邹丽, 周锐, 赵世钰等. 多导弹编队齐射攻击分散化协同制导方法[J]. 航空学报, 2011, 32(02):281-290.

十、 附录

附录 I 数据部分

1) 第一问求得的所有发射装置行驶路径:

发射装置编号	发射装置行驶路径
C01	D2→J32→F24→J32→J33→J04→Z01→J50→J53→F51
C02	D2→J33→F25→J33→J04→Z01→J04→J05→J34→J35→F27
C03	D2→J03→J48→F47→J48→Z01→J50→J53→J56→F52
C04	D2→J03→J48→F46→J48→Z01→J04→J05→J34→J35→F25
C05	D2→J03→J02→J47→F44→J47→J48→Z01→J04→J05→J49→F48
C06	D2→J12→J13→J21→F03→J21→J14→J15→J16→Z06→J26→F12
C07	D1→J11→J46→F43→J46→J44→J41→F40
C08	D1→Z03→J61→F58→J61→Z03→J57→J58→J59→J62→F60
C09	D1→Z03→J61→F57→J61→Z03→J57→J58→J59→F54
C10	D1→J11→J46→J44→F42→J44→Z05→J41→J18→J19→J31→F23
C11	D1→J11→J46→J44→F41→J44→Z05→J41→J18→J29→F20
C12	D1→J09→J08→J07→Z04→J38→F34→Z04→J37→J15→J25→F11
B01	D2→J12→J13→J21→F02→J21→J14→J15→J16→Z06→J28→F19
B02	D2→J12→J13→J21→F01→J21→J14→J15→J16→Z06→J26→F13
B03	D2→J03→J02→J47→F45→J47→J48→Z01→J50→J53→J56→F53
B04	D1→J09→J08→J07→Z04→J38→F35→J38→Z04
B05	D1→J09→J08→J07→Z04→J37→F31→J37→Z04→J38→J42→J40→ F37
B06	D1→J09→J08→J07→Z04→J37→F32→J37→Z04→J38→J42→J40→ F38
A01	D2→J32→J33→J34→F26→J34→J05→J06→J51→Z02→J54→J55→J 53→J56→J60→F55

A02	D2→J03→J04→J50→F50→J50→Z01→J50→J53→J59→J62→F59
A03	D2→J03→J04→J05→J49→F49→J49→J05→J06→J51→J54→J55→J53→J56→J60→F56
A04	D1→J09→J08→J07→J06→J36→F26→J36→J06→J51→Z02→J51→J06→J07→Z04→J37→J15→J25→F10
A05	D1→J09→J08→J07→J06→J36→F30→J36→J06→J51→Z02→J52→J08→J42→J40→J39→F36
A06	D1→J09→J08→J07→Z04→J37→F33→J37→Z04→J37→J15→J25→J23→F07

2) 第二问求得的所有发射装置行驶路径:

发射装置编号	发射装置行驶路径
C01	D2→J32→F24→J32→J13→J14→J15→J25→F11
C02	D2→J32→J33→F25→J33→J34→J35→J14→J21→J22→F06
C03	D2→J03→J48→F47→J48→J03→J04→J05→J34→J35→F28
C04	D2→J03→J48→F46→J48→J03→J04→J05→J34→J35→F27
C05	D2→J03→J02→J47→F44→J47→J48→Z01→J04→J05→J49→F48
C06	D2→J12→J13→J21→F03→J21→J22→J23→J25→J23→F07
C07	D1→J11→J46→F43→J46→J44→Z05→J41→F40
C08	D1→Z03→J61→F58→J61→Z03→J57→J54→J55→J53→F51
C09	D1→Z03→J61→F57→J61→Z03→J57→J58→J59→F54
C10	D1→J11→J46→J44→F42→J44→Z05→J41→J18→J19→J31→F23
C11	D1→J11→J46→J44→F41→J44→Z05→J41→J18→J29→F20
C12	D1→J09→J08→J07→Z04→J38→F34→J38→Z04→J37→J15→J25→F10
B01	D2→J03→J02→J47→F45→J47→J48→Z01→J50→J53→J56→F52
B02	D2→J12→J13→J21→F01→J21→J22→J23→J25→J24→F09
B03	D2→J12→J13→J21→F02→J21→J22→J23→J25→J24→F08

B04	D1→ J09→ J08→ J07→ Z04→ J37→ F31→ J37→ J15 → J25→ J23→ J22→ F04
B05	D1→J09→J08→J07→Z04→J38→F35→J38→Z04→J38→J42→J40→ F38
B06	D1→J09→J08→J07→Z04→J37→F32→J37→Z04→J37→J15→J16→ J39→F36
A01	D2→J03→J04→J50→F50→ J50→Z01→ J50→J53→J56→J60→F55
A02	D2→J32→J33→J34→F26→J34→J05→J04→ J50→J53→J56→F53
A03	D1→J09→J08→J07→J06→J36→F29→J36→J06→J51→Z02→J54→ J55→J59→J62→F60
A04	D2→J03→J04→J05→J49→F49→J49→J05→J34→J35→J14→J21→ J22→ F05
A05	D1→J09→J08→J07→Z04→J37→F33→J37→Z04→J38→J42→J40→ F39
A06	D1→J09→J08→J07→J06→J36→F30→J36→J06→J07→Z04→J38→ J42→J40→F37

3) 第三问求得的所有发射装置行驶路径:

发射装置编号	发射装置行驶路径
C01	D2→J32→F24
C02	D2→J32→J33→F25
C03	D2→J03→J48→F47→J48→Z01→J04→J05→J34→J35→F27
C04	D2→J03→J48→F46→J48→Z01→J04→J05→J49→F48
C05	D2→J03→J02→J47→F44→J47→J48→Z01→J50→J53→F51
C06	D2→J12→J13→J21→F03→J21→J14→J15→J16→Z06→J26→F12
C07	D1→J11→J46→F43→J46→J44→Z05→J41→F40
C08	D1→Z03→J61→F58
C09	D1→Z03→ J61→F57→J61→Z03→J57→J58→J59→F54
C10	D1→J11→J46→J44→F42→J44→Z05→J41→J18→J19→J31→F23
C11	D1→J11→J46→J44→F41→J44→Z05→J41→J18→J29→F20

C12	D1→J09→J08→J07→Z04→J38→F34→J38→Z04→J37→J15→J25→ F11
B01	D2→J12→J13→J21→F02→J21→J14→J15→J16→Z06→J28→F19
B02	D2→J12→J13→J21→F01→J21→J14→J15→J16→Z06→J26→F13
B03	D2→J03→J02→J47→F45→J47→J48→Z01→J04→J05→J34→J35→ F28
B04	D1→J09→J08→J07→Z04→J38→F35→J38→Z04→J38→J42→J40→ F39
B05	D1→J09→J08→J07→Z04→J37→F31→J37→Z04→J38→J42→J40→ F37→
B06	D1→J09→J08→J07→Z04→J37→F32→J37→Z04→J38→J42→J40→ F38→
A01	D2→J32→J33→J34→F26→J34→J05→J04→Z01→J50→J53→J56→ F52
A02	D2→J03→J04→J50→F50→J50→Z01→J50→J53→J56→J60→F55
A03	D2→J03→J04→J05→J49→F49→J49→J05→J04→Z01→J50→J53→ J56→F53
A04	D1→J09→J08→J07→J06→J36→F29→J36→J06→J07→Z04→J37→ J15→J25→F10
A05	D1→J09→J08→J07→J06→J36→F30→J36→J06→J07→Z04→J37→ J15→J16→J39→F36
A06	D1→J09→J08→J07→Z04→J37→F33→J37→Z04→J37→J15→J25→ J23→F07
C13	J13→J21→J22→F06
C14	J13→J21→J22→F04
C15	J15→J25→J24→F09

4) 第五问求得的所有发射装置行驶路径:

发射装置编号	发射装置行驶路径
C01	D1→J11→J46→F43→J46→J44→Z05→J41→J18→J19→J31→F23
C02	D1→Z03→J61→F58→J61→Z03→J57→J54→J55→J53→J56→F53
C03	D1→Z03→J61→F57→J61→Z03→J57→J58→J59→J62→F59
C04	D1→J11→J46→J44→F42→J44→Z05→J41→J18→J29→J30→F22

C05	D1→J11→J46→J44→F41→J44→Z05→J41→J18→J29→J30→F21
C06	D1→J10→J45→J42→J40→F38→J40→J42→J38→Z04→J37→ J15→J25→F11
B01	D1→J10→J45→J42→J40→F37→J40→J42→J38→Z04→J38→F35
B02	D1→J10→J45→J42→J40→F39→J40→J42→J38→Z04→J37→F33
B03	D1→J11→J46→J44→Z05→J41→F40→J41→Z05→J41→J18→J29 →F20
A01	D1→J09→J08→J07→Z04→J38→F34→J38→Z04→J37→J15→J14 →J21→F01
A02	D1→J10→J45→J42→J40→J39→F36→J39→J16→Z06→J26→F12
A03	D1→J11→J46→J44→Z05→J41→J18→J29→J28→F19→J28→Z06 →J26→J24→F08
C07	D2→J32→F24→J32→J33→J04→Z01→J50→F50
C08	D2→J32→J33→F25→J33→J04→Z01→J48→J47→F44
C09	D2→J03→J48→F47→J48→Z01→J04→J05→J34→J35→F28
C10	D2→J03→J48→F46→J48→Z01→J48→J47→F45
C11	D2→J32→J33→J34→F26→J34→J05→J06→J51→Z02→J54→J55 →J53→J56→F52
C12	D2→J12→J13→J14→J35→F27→J35→J34→J05→J06→J51→Z02 →J54→J55→J53→F51
B04	D2→J03→J04→J05→J49→F49→J49→J05→J06→J51→Z02→J51 →J06→J36→F30
B05	D2→J03→J04→J05→J49→F48→J49→J05→J06→J51→Z02→J51 →J06→J36→F29
B06	D2→J12→J13→J21→J22→J23→F07→J23→J25→J15→J37→Z04 →J37→F31
A04	D2→J03→J04→J50→J53→J59→F54→J59→J58→J57→Z03→J52 →J07→Z04→J37
A05	D2→J12→J13→J14→J15→J25→F10→J25→Z06→J28→F18
A06	D2→J12→J13→J21→J22→J23→J24→F09→J24→J26→Z06→J26→ F13

附录 II 代码部分

1) dijkstra 算法计算最短路径 dij.m:

```
function [d,path] = dij( map,x0,x1 )
%di,j, map 为点点之间距离矩阵, 不通为 inf
%第 i 个到第 j 个
is=zeros(1,length(map));
road=-1*ones(1,length(map));
tar=x0;
while(is(x1)==0)
    min=inf;
    for i=1:length(map)
        if(i~=x0)
            if(map(x0,i)<min&&is(i)==0)
                min=map(x0,i);
                tar=i;
            end
        end
    end
    is(tar)=1;
    for i=1:length(map)
        if(map(x0,i)>(min+map(tar,i)))
            map(x0,i)=min+map(tar,i);
            road(i)=tar;
        end
    end
end
d=map(x0,x1);
temp=x1;
path=x1;
while(temp~-1)
    path=[path,temp];
    temp=road(temp);
end
path=[path,x0];
path=path(2:end);
path=fliplr(path);
end
```

2) 将位置路径输出成字符串路径的翻译函数 transfer.m:

```
function [ char_path ] = transfer( path )
char_path=cell(1,length(path));
for i=1:length(path)
    if path(i)==1||path(i)==2
        char_path{1,i}=['D',num2str(path(i))];
    end
end
```

```

elseif path(i)>2&&path(i)<9
    char_path{1,i}=['Z', num2str(path(i)-2)];
elseif path(i)>8&&path(i)<71
    char_path{1,i}=['J', num2str(path(i)-8)];
else
    char_path{1,i}=['F', num2str(path(i)-70)];
end
end
end

```

3) 排序函数 Sort.m:

```

function [order] = Sort( d_mmmh )
d_mmmh;
num=1;
while min(d_mmmh)~=inf
    for i=1:length(d_mmmh)
        if d_mmmh(i)==min(d_mmmh)
            order(i)=num;
            d_mmmh(i)=inf;
            break;
        end
    end
    num=num+1;
end

```

4) 前三问中，计算 F1_F2 的转移矩阵 get_F1F2:

```

%% 寻找第二波最短路径
%%列代表第一次发射的点，行代表未发射的点
load('A.mat')
load('TA.mat')
load('F2.mat')
x0=A;
map=TA;
for j=1:length(x0)
    Min=inf*ones(1,length(F2));
    for i=3:8 %到6个E的最短路径
        [temp_d,temp_path]=dij(map,x0(j),i);
        temp1=temp_d;
        for k=1:length(F2)
            [temp_d,temp_path]=dij(map,i,F2(k));
            temp2=temp_d;
            sun=temp1+temp2;
            if sun<Min(k)
                Min(k)=sun;
            end
        end
    end
end

```

```

                flag(j,k)=i;
            end
        end
    end
    out(j,:)=Min;
end
Out=out;
Flag=flag;
load('B.mat')
load('TB.mat')
x0=B;
map=TB;
for j=1:length(x0)
    Min=inf*ones(1,length(F2));
    for i=3:8 %到6个E的最短路径
        [temp_d,temp_path]=dij(map,x0(j),i);
        temp1=temp_d;
        for k=1:length(F2)
            [temp_d,temp_path]=dij(map,i,F2(k));
            temp2=temp_d;
            sun=temp1+temp2;
            if sun<Min(k)
                Min(k)=sun;
                flag(j,k)=i;
            end
        end
    end
    out(j,:)=Min;
end
Out=[Out;out];
Flag=[Flag;flag];
load('C.mat')
load('TC.mat')
x0=C;
map=TC;
for j=1:length(x0)
    Min=inf*ones(1,length(F2));
    for i=3:8 %到6个E的最短路径
        [temp_d,temp_path]=dij(map,x0(j),i);
        temp1=temp_d;
        for k=1:length(UN)
            [temp_d,temp_path]=dij(map,i,F2(k));
            temp2=temp_d;
            sun=temp1+temp2;

```

```

        if sun<Min(k)
            Min(k)=sun;
            flag(j,k)=i;
        end
    end
end
out(j,:)=Min;
end
Out=[Out;out];
Flag=[Flag;flag];
save('F12F2','Out','Flag')

```

5) 前三问中, 计算第一波齐射点位的位置并输出路径 wave_one.m:

```

clear;clc
load('TA.mat')
load('TB.mat')
load('TC.mat')
x1=71:130; %终点
Path_number=cell(24,1);
Path_char=cell(24,1);
k=1;
for x0=1:2;
    map=TC;
    path=cell{1,length(x1)};
    %% calculate t
    for i=1:length(x1)
        [temp_d,temp_path]=dij(map,x0,x1(i));
        d(i)=temp_d;
        path{1,i}=temp_path;
    end
    %% find close
    order=Sort(d);
    for i=1:6
        flag=find(order==i);
        x1(flag)=[];
        Path_number{k,1}=path(1,flag);
        Path_char{k,1}=transfer(path(1,flag));
        k=k+1;
    end
    map=TB;
    path=cell{1,length(x1)};
    %% calculate t
    for i=1:length(x1)
        [temp_d,temp_path]=dij(map,x0,x1(i));

```

```

        d(i)=temp_d;
        path{1,i}=temp_path;
    end
%% find close
order=Sort(d);
for i=1:3
    flag=find(order==i);
    x1(flag)=[];
    Path_number{k,1}=path(1,flag);
    Path_char{k,1}=transfer(path(1,flag));
    k=k+1;
end
map=TA;
path=cell{1,length(x1)};
%% calculate t
for i=1:length(x1)
    [temp_d,temp_path]=dij(map,x0,x1(i));
    d(i)=temp_d;
    path{1,i}=temp_path;
end
%% find close
order=Sort(d);
for i=1:3
    flag=find(order==i);
    x1(flag)=[];
    Path_number{k,1}=path(1,flag);
    Path_char{k,1}=transfer(path(1,flag));
    k=k+1;
end
end
end

```

6) 前三问中，根据不同的输入值计算第二波齐射点位的位置并输出路径

```

wave_two.m:
%% 得出 F1 中的每个点应该去往的点 F2. 以及经过的 Z
load('F1.mat');load('F12F2.mat');
for j=1:length(F1)
    for i=1:length(F1)
        Min_index=find(min(F12F2(i,:))==F12F2(i,:));
        temp(i)=Min_index(1);
        Min(i)=min(F12F2(i,:));
    end
    Min(find(Min==inf))=0;
    Max_index=find(max(Min)==Min);
    index=Max_index(1);

```

```

    out(j,1)=F1(index);
    out(j,2)=F2(temp(index));
    out(j,3)=Flag(index,temp(index));
    F1F2(:,temp(index))=inf*ones(length(F1),1);
    F1F2(index,:)=inf*ones(1,length(F2));
end
%% get path
load('TA.mat');load('TB.mat');load('TC.mat');
load('A.mat');load('B.mat');load('C.mat');
Path_number=cell(length(out),1);
Path_char=cell(length(out),1);
for i=1:length(out)
    if(max(ismember(A,out(i,1))))==1)
        map=TA;
        [temp_d,temp_path]=dij(map,out(i,1),out(i,3));
        path_number=temp_path;
        [temp_d,temp_path]=dij(map,out(i,3),out(i,2));
        path_number=[path_number,temp_path(2:end)];
        Path_number{i}=path_number;
        temp=transfer(path_number);
        Path_char{i}=temp;
    elseif(max(ismember(B,out(i,1))))==1)
        map=TB;
        [temp_d,temp_path]=dij(map,out(i,1),out(i,3));
        path_number=temp_path;
        [temp_d,temp_path]=dij(map,out(i,3),out(i,2));
        path_number=[path_number,temp_path(2:end)];
        Path_number{i}=path_number;
        temp=transfer(path_number);
        Path_char{i}=temp;
    else
        map=TC;
        [temp_d,temp_path]=dij(map,out(i,1),out(i,3));
        path_number=temp_path;
        [temp_d,temp_path]=dij(map,out(i,3),out(i,2));
        path_number=[path_number,temp_path(2:end)];
        Path_number{i}=path_number;
        temp=transfer(path_number);
        Path_char{i}=temp;
    end
end
end
save('Path','Path_number','Path_char','out');

```