



中国研究生创新实践系列大赛

"华为杯"第十五届中国研究生数学建模竞赛

题目： **基于卫星高度计海面高度异常资料
获取潮汐调和常数的方法及应用**

摘要：

本文以 TOPEX/POSEIDON 卫星高度计观测所得南海区域海面高度异常产品为基础，利用调和分析方法得到了符合资料长度要求的 TOPEX/POSEIDON 星下观测点处 M_2 、 S_2 、 K_1 和 O_1 四个主要分潮的调和常数；进而，在每个轨道上利用多项式拟合方法分离了四个主要分潮的正压潮和内潮部分；最后，利用数据插值法和车贝雪夫多项式拟合法两种方法对南海海域 M_2 、 S_2 、 K_1 和 O_1 四个主要分潮的正压潮调和常数进行了二维插值或者拟合，得到了南海四个主要分潮的同潮图。

针对问题一，首先确定 TOPEX/POSEIDON 观测数据中 M_2 、 S_2 、 K_1 和 O_1 四个主要分潮的混淆周期，然后根据 Rayleigh 准则，计算得到了分离四个主要分潮所需的最短资料长度为 2.97 年，进而对题目中给出的所有 TOPEX/POSEIDON 星下观测点进行了筛选，得到了符合要求的星下轨道点共 4309 个。利用调和分析方法，对于筛选后的 4309 个星下轨道点处的观测数据进行了分析，得到了上述所有星下轨道点处 M_2 、 S_2 、 K_1 和 O_1 四个主要分潮的调和常数（振幅 H 和迟角 G ）；根据星下轨道点和验潮站之间的距离，选取了两者之间距离小于 15 千米的 40 个验潮站对计算所得四个主要分潮的调和常数进行了检验：40 个验潮站处， M_2 、 S_2 、 K_1 和 O_1 四个分潮计算值和观测值之间的矢量差的平均值分别为 4.99 厘米，3.43 厘米，4.42 厘米和 4.54 厘米，说明利用 TOPEX/POSEIDON 观测数据所提取的调和常数结果较准。

针对第二问，首先基于 TOPEX/POSEIDON 卫星绕地球一圈的时间和轨道重复周期，依据筛选后的 4309 个星下轨道点处数据的观测时间，对南海海域 20 条轨道进行了分离和提取，确定了每条轨道上存在观测数据的星下轨道点的经纬度。利用多项式拟合法对每一条轨道上 $H\cos G$ 和 $H\sin G$ 进行拟合，所得多项式拟合部分为正压潮，而剩余部分为内潮。以第四问为启发，对于多项式拟合的次数进行了遍历，以 4309 个星下点处调和常数拟合值和观测所得值之间矢量差的平均值作为判别标准，确定了最优的多项式拟合次数为 8 次。最终，在所有 20 条轨道上，利用 8 次多项式对四个主要分潮的 $H\cos G$ 和 $H\sin G$ 进行了拟合，然后反算出四个分潮正压潮和内潮两个部分的调和常数，实现了对于正压潮和内潮的分离。

针对第三问，以第二问所得 4309 个星下轨道点处正压潮的调和常数为基础，以题目中所给水深数据的经纬度网格为目标区域，利用基于三角网格的 cubic 插值法（方法 1）和二维车贝雪夫多项式方法（方法 2）分别对星下轨道点处的正压潮调和常数进行了插值或拟合。在利用二维车贝雪夫多项式方法进行拟合时，以第四问为启发，对于经度和纬度两个方向的一维车贝雪夫多项式的次数进行了遍历，得到了最优的多项式次数：对于 M_2 和 S_2 分潮，两个方向的最优次数均分别为 4 次和 4 次；对于 K_1 分潮，两个方向的最优次数分别为 4 次和 3 次；对于 O_1 分潮，两个方向的最优次数分别为 3 次和 3 次。基于三角网格的 cubic 插值法（方法 1）所得 M_2 、 S_2 、 K_1 和 O_1 四个主要分潮的同潮图中，振幅插值结果较好，

但等迟角线不够平滑；二维车贝雪夫多项式方法（方法 2）所得 M_2 、 S_2 、 K_1 和 O_1 四个主要分潮的同潮图，四个分潮振幅和迟角的拟合结果均明显优于方法 1 所得插值结果。需要指出的是，两种方法所得四个主要分潮的同潮图与实际同潮图还有一定的差距，相关文献表明，利用伴随同化方法同化 TOPEX/POSEIDON 观测数据所得调和常数，对南海四个主要分潮进行数值模拟与同化研究，将会进一步提升所得同潮图的质量。

关键词： 调和分析、潮汐调和常数、卫星高度计、车贝雪夫多项式拟合

1. 问题重述

海洋潮汐是在天体引潮力作用下形成的长周期波动现象，在水平方向上表现为潮流的涨落，在铅直方向上则表现为潮位的升降。潮汐潮流运动是海洋中的基本运动之一，它是动力海洋学研究的重要组成部分，对它的研究直接影响着波浪、风暴潮、环流、水团等其他海洋现象的研究，在大陆架浅海海洋中，对潮汐潮流的研究更具重要性[1]。

区域海洋潮汐的数值模拟需要提供开边界的水位调和常数，而开边界的水位调和常数，或者来源于观测、或者来源于全球海洋潮汐的数值模拟；而全球海洋潮汐的数值模拟，相当耗费资源。虽然目前有国外学者或研究机构，能够提供区域海洋潮汐的调和常数，但实质上的评价结果难以令人满意。

从各分潮的调和常数获取的发展史来说，通过对已有观测结果进行插值曾经是首选，但发展过程中逐渐被数值模拟方法所取代。高度计资料的出现，引发部分学者开展了插值方法的研究，本文以 TOPEX/POSEIDON 卫星高度计星与潮汐相关的资料为研究依据，通过已知各个经纬坐标点的南海海面高度异常数据，计算潮汐调和常数，与潮汐验潮点的调和常数给予评价或检验，并给出评价结果的分析或评价。

具体任务如下：

根据沿轨道的星下观测点的海面高度异常值，提取所有星下观测点各主要分潮（M2、S2、K1、O1）的潮汐调和常数，注意能有效提取那些分潮的潮汐调和常数取决于相应的资料长度；对提取的潮汐调和常数，应利用潮汐验潮点的调和常数给予评价或检验，并给出评价结果的分析或评价。

得到所有星下观测点各主要分潮（M2、S2、K1、O1）的潮汐调和常数，沿轨道作图后，可发现潮汐调和常数在沿轨道方向，在空间有细结构，而此细结构是内潮对正压潮的调制；请设法对沿轨道的各分潮的潮汐调和常数进行正压潮和内潮的分离。

设计数据插值或拟合方法给出南海的各主要分潮的同潮图，并利用潮汐验潮点的调和常数给予评价或检验，并给出评价结果的分析或评价。

如果你们还有时间和兴趣，还可考虑下列：

如果在对沿轨道的潮汐调和常数分离、插值或拟合的过程中，利用了特定的函数进行拟合，是否能够确定出需利用的特定函数的最佳（高）次数？上述结论是否对第 3 问有启示或帮助。

2. 问题分析

根据本题主要任务可见，本题是按照分步设计的思路，首先完成对提供的 TOPEX/POSEIDON 卫星下高度计所测的南海海面高度异常数据的文件进行预处理，在此基础上对所选点进行主要分潮（M2、S2、K1、O1）的潮汐调和常数分析。对提取的潮汐调和常数，应利用潮汐验潮点的调和常数利用插值法给予评价或检验，并探讨所求的潮汐调和常数与观测资料所得的实际值产生差异的原因；然后根据后续方法探讨将正压潮与内压分离[2]。

2.1. 问题一的分析

问题一所给出的数据是 TOPEX/POSEIDON 卫星高度计所测的南海海面高度异常数据文件，时间跨度为 1992 年到 2016 年。首先整理这 14 年的卫星高度计资料得到南海海区各轨道观测点的海表面高度异常数据的时间序列，然后对此时间序列进行调和与分析得到各分潮调和常数。考虑到观测次数过少会降低调和结果的可靠性，本文在计算调和与分析的过程中，根据潮汐混淆周期和 Rayleigh 周期进行分析、筛选、提取数据。根据对提取的各观测点数据，重新构建模型对潮汐调和常数进行求解。最后利用潮汐验潮点的调和常数与所求的调和常数进行对比分析，评价和检验，并探讨所求的潮汐调和常数与观测资料的差距及其产生差距的原因。

2.2. 问题二的分析

通过构造该区域的轨道提取模型，将 TOPEX/POSEIDON 卫星高度计测量点投影到该研究区域内，即可形成卫星运行的轨道图，并由此确定每条轨道上的观测点的位置信息，根据所得的每条轨道的位置信息。得到所有星下观测点各主要分潮（M2、S2、K1、O1）的潮汐调和常数，沿轨道作图后查找潮汐调和常数在沿轨道方向的变化规律。继而利用多项式拟合的方法得到该轨道上任意点的潮汐调和常数，最后利用同一位置处拟合所得的潮汐调和常数减去所测的潮汐调和常数即可将正压潮与内压潮分离。

2.3. 问题三的分析

问题三要求得出南海的各主要分潮的同潮图，首先就需要求出南海区域内任意点的各主要分潮的潮汐调和常数，我们初步分析有两种思路：一是根据问题一所分析出来的 4309 个位置的潮汐调和常数进行差值处理得到整个平面研究区域内的潮汐调和常数数值；二是根据问题二中多项式拟合所得到的所有轨道上任意点处的潮汐调和常数进行差值处理得到整个平面研究区域内的潮汐调和常数数值。

再依据验潮站观测数据所得的潮汐调和常数分别与两种插值方法所得的验潮站处的潮汐调和常数最对比并分析其结果。

3. 问题一的求解

根据题意，问题一是让我们根据沿轨道的星下观测点的海面高度异常值，提取所有星下观测点各主要分潮（ M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1 ）的潮汐调和常数，同时要注意能有效提取主要分潮（ M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1 ）的分潮的潮汐调和常数与相应的资料长度的关系，最后利用题目给出的潮汐验潮点的调和常数对我们所计算出来的潮汐调和常数予评价或检验。

3.1. 调和分析的基本原理与编程实现

实际潮汐的分潮从其来源看可分为以下四种：天文分潮、气象分潮、天文-气象分潮和浅水分潮。

从分潮的频率分布来看，分潮在频率上的分布是极不均匀的，而是分成族、群和亚群。在 Doodson 展开中，按 Doodson 数 μ_1 区分潮族，按 μ_2 区分群，按 μ_3 区分亚群。在潮族中一般分为长周期分潮族（ $\mu_1 = 0$ ）、全日分潮族（ $\mu_1 = 1$ ）、半日分潮族（ $\mu_1 = 2$ ）、三分日分潮族（ $\mu_1 = 3$ ）直到十二分日分潮族（ $\mu_1 = 12$ ），共 13 个潮族。在每一个潮族中，具有不同数量的群和亚群。

在亚群中的各个分潮的角速度是非常接近的，彼此之间只有微小的差异。因此，在资料长度有限的情况下，亚群中的各个分潮是无法区分的。因此，在实际的潮汐分析中，往往将一个亚群合成一个分潮，此时这一分潮的振幅和迟角不再是常数，而是随着升交点的黄经十分缓慢地变化，一般在较短的时间内可近似看作不变。这样的分潮实质上是准调和的，但习惯上仍叫做调和分潮。

实际水位可以看作是很多个调和分潮迭加的结果，但是在实际分析中只能选取其中有限个较主要的分潮。假设我们选取了 J 个分潮，对于任一点的潮位表达式为：

$$h = S_0 + \sum_{j=1}^J f_j h_j \cos(v_j + u_j - g_j) = S_0 + \sum_{j=1}^J f_j h_j \cos(\sigma_j t + v_{0j} + u_j - g_j),$$

其中， S_0 为余水位， f_j 为交点因子， u_j 为交点订正角， h_j, g_j 为分潮的调和常数（振幅和迟角）。

3.1.1. 分潮角速度的计算

$$\sigma = \mu_1 \dot{\tau} + \mu_2 \dot{s} + \mu_3 \dot{h}' + \mu_4 \dot{p} + \mu_5 \dot{N}' + \mu_6 \dot{p}'$$

其中： σ 为分潮的角速度， $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$ 为 Doodson 数，

$$\begin{cases} \dot{\tau} = 14.49205211 \\ \dot{s} = 0.54901653 \\ \dot{h}' = 0.04106864 \\ \dot{p} = 0.00464183 \\ \dot{N}' = 0.00220641 \\ \dot{p}' = 0.00000196 \end{cases} \quad (\text{单位: 度/平太阳时})$$

3.1.2. 分潮初相位的计算

Y 年 M 月 D 日 t 时刻（实际计算中是观测数据的起始时间）的天文初相角：

$$v_0 = \mu_1 \tau + \mu_2 s + \mu_3 h' + \mu_4 p + \mu_5 N' + \mu_6 p' + \mu_0 90$$

其中：

$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$ 为 Doodson 数，

$$\begin{cases} s = 277.02 + 129.3848(Y - 1900) + 13.1764(n + i + \frac{t}{24}) \\ h' = 280.19 - 0.2387(Y - 1900) + 0.9857(n + i + \frac{t}{24}) \\ p = 334.39 + 40.6625(Y - 1900) + 0.1114(n + i + \frac{t}{24}) \\ N' = 100.84 + 19.3282(Y - 1900) + 0.0530(n + i + \frac{t}{24}) \\ p' = 281.22 + 0.0172(Y - 1900) + 0.00005(n + i + \frac{t}{24}) \\ \tau = 15t - s + h' \end{cases}$$

式中 i 为 1900 年至 Y 年的闰年数， $i = \text{int}(\frac{Y-1901}{4})$ ； n 为从 Y 年 1 月 1 日开始计算的累积日期序数，1 月 1 日的日期序数为 0， t 为时间（单位：小时）。以上各式中的单位是度。

表 3-1 部分分潮的 Doodson 数、分潮角速度和交点因子与订正角

分潮符号	Doodson 数						μ_0	分潮角速度 单位: 度/平太阳时	交点因子与订正角	
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6			f	u
S_a	0	0	1	0	0	0	0	0.0410686	1	0
S_{sa}	0	0	2	0	0	0	0	0.0821373	1	0
M_m	0	1	0	-1	0	0	0	0.5443747	M_m	M_m
MS_j	0	2	-2	0	0	0	0	1.0158958	M_2	$-M_2$
M_j	0	2	0	0	0	0	0	1.0980331	M_j	M_j
Q_1	1	-2	0	1	0	0	-1	13.3986609	O_1	O_1
O_1	1	-1	0	0	0	0	-1	13.9430356	O_1	O_1
M_1	1	0	0	0	0	0	1	14.4920521	M_1	M_1
P_1	1	1	-2	0	0	0	-1	14.9589314	P_1	P_1
S_1	1	1	-1	0	0	0	2	15.0000000	1	0
K_1	1	1	0	0	0	0	1	15.0410686	K_1	K_1
J_1	1	2	0	-1	0	0	1	15.5854434	J_1	J_1
OO_1	1	3	0	0	0	0	1	16.1391017	OO_1	OO_1
N_2	2	-1	0	1	0	0	0	28.4397295	M_2	M_2
M_2	2	0	0	0	0	0	0	28.9841042	M_2	M_2
L_2	2	1	0	-1	0	0	2	29.5284789	L_2	L_2
S_2	2	2	-2	0	0	0	0	30.0000000	1	0
k_2	2	2	0	0	0	0	0	30.0821373	k_2	k_2
M_4	4	0	0	0	0	0	0	57.9682085	M_2^2	$2M_2$
MS_4	4	2	-2	0	0	0	0	58.9841043	M_2	M_2
M_6	6	0	0	0	0	0	0	86.9523127	M_2^3	$3M_2$

3.1.3. 交点因子和交点订正角的计算

由于 f_j 和 u_j 随时间变化非常缓慢, 一般情况下取资料序列的中间时刻计算。

各分潮的 f_j 、 u_j 的具体计算公式如下：

$$\begin{cases} f \cos u = \sum_{m=1}^M \rho_m \cos(\Delta\mu_4^m p + \Delta\mu_5^m N') \\ f \sin u = \sum_{m=1}^M \rho_m \sin(\Delta\mu_4^m p + \Delta\mu_5^m N') \end{cases}$$

ρ_m 、 $\Delta\mu_4^m$ 、 $\Delta\mu_5^m$ 和 Doodson 数见下表。

表 3-2 ρ_m 、 $\Delta\mu_4^m$ 、 $\Delta\mu_5^m$ 列表

$\Delta\mu_4$	$\Delta\mu_5$	M_m	M_f	O_1	P_1	K_1	J_1	OO_1	M_2	L_2	k_2
-2	-1		0.0023			0.0002		0.0037			
-2	0		0.0432					0.1496			
-2	1		0.0028					0.0296			
0	-2	0.0008		0.0058	0.0008	0.0001			0.0005		
0	-1			0.1885	0.0112	0.0198	0.0294		0.0373	0.0366	0.0128
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1		0.4143			0.1356	0.1980	0.6398			0.2980
0	2		0.0387			0.0029	0.0047	0.1342			0.0324
0	3		0.0008					0.0086			
2	-1			0.0002						0.0047	
2	0						0.0152		0.0006	0.2505	
2	1				0.0003		0.0098		0.0002	0.1102	
2	2						0.0057			0.0156	

对于 M_m 、 M_f 、 O_1 、 P_1 、 K_1 、 J_1 、 OO_1 、 M_2 、 L_2 、 k_2 分潮的 f 和 u 依照上式计算，其他分潮由这些分潮组合计算，但 M_1 分潮的 f 和 u 由以下公式计算得出：

$$f \cos u = -0.008 \cos(-p - 2N') + 0.094 \cos(-p - N') + 0.510 \cos p - 0.041 \cos(p - N') \\ + 1.418 \cos p + 0.284 \cos(p + N') - 0.008 \cos(p + 2N')$$

$$f \sin u = -0.008 \sin(-p - 2N') + 0.094 \sin(-p - N') - 0.510 \sin p - 0.041 \sin(p - N') \\ + 1.418 \sin p + 0.284 \sin(p + N') - 0.008 \sin(p + 2N')$$

3.1.4. 最小二乘法提取分潮调和常数

在进行潮汐调和分析时，对某一确定的分潮[5]：

$$f_j H_j \cos(\sigma_j t + V_{0j} + u_j - g_j)$$

可化为如下形式：

$$f_j \cos(\sigma_j t + V_{0j} + u_j) H_j \cos g_j + f_j \sin(\sigma_j t + V_{0j} + u_j) H_j \sin g_j$$

其中， f_j 、 σ_j 、 t 、 u_j 、 V_{0j} 均为已知或可通过简单计算得出。对应 J 个分潮，则有：

$$h = S_0 + \sum_{j=1}^J f_j \cos(\sigma_j t + V_{0j} + u_j) H_j \cos g_j + \sum_{j=1}^J f_j \sin(\sigma_j t + V_{0j} + u_j) H_j \sin g_j$$

如果在 n 个时刻 $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ ，有 n 个潮高观测值 $h = h_1, h_2, \dots, h_n$ ，那么，就可以建立如下由 n 个方程构成的方程组：

$$\begin{cases} S_0 + \sum_{j=1}^J x_j f_j \cos(\sigma_j t_1 + V_0 + u_j) + \sum_{j=1}^J y_j f_j \sin(\sigma_j t_1 + V_0 + u_j) = h_1 \\ S_0 + \sum_{j=1}^J x_j f_j \cos(\sigma_j t_2 + V_0 + u_j) + \sum_{j=1}^J y_j f_j \sin(\sigma_j t_2 + V_0 + u_j) = h_2 \\ \vdots \\ S_0 + \sum_{j=1}^J x_j f_j \cos(\sigma_j t_n + V_0 + u_j) + \sum_{j=1}^J y_j f_j \sin(\sigma_j t_n + V_0 + u_j) = h_n \end{cases}$$

方程组中 x_j 对应 $H_j \cos g_j$ ， y_j 对应 $H_j \sin g_j$ ，它们和 S_0 共同构成了方程组中的全部未知量。潮汐调和分析的目的正是求出 x_j 与 y_j ，从而求出各个分潮的调和常数 H 和 g 。

为了表示的方便，将方程组写成如下形式：

$$\begin{cases} S_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = h_1 \\ S_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = h_2 \\ \vdots \\ S_0 + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = h_n \end{cases}$$

其中 $m = 2J$ ，即所选分潮数的两倍， S_0 与 x_j 为待求解的未知数。

为了尽量减小噪声 r 对分析结果的影响，使调和常数尽可能接近真值，在实际潮汐分析中，总是希望使用更多的观测数据。因此，方程的数量 n 一般远大于

未知数的数量 $m+1$ 。对于这样的矛盾方程组，可以用最小二乘法来求解。

最小二乘法的思想是，寻求一组解，使拟合值与实际值之差的平方和，即下式的值达到最小。

$$\Delta = \sum_{i=1}^n (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m + S_0 - h_i)^2$$

根据多元函数微分的理论，这要求 Δ 相对于各未知数的偏导数均为 0，即：

$$\frac{\partial \Delta}{\partial S_0} = \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} = \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial \Delta}{\partial x_m} = 0$$

这样就可得到关于分潮调和常数的线性方程组，进而可提取出分潮的调和常数。

3.1.5. 调和分析方法的编程实现

本文采取了两种常见的方法对潮汐调和常数进行求解：一是利用海洋动力界常见 Utide 数据包，在 MATLAB 环境下运行可以求得满足条件的 4309 处的潮汐调和常数；二是根据上述所给的调和常数的四步求解方法，在 MATLAB 环境下进行自行编程处理可求得所给点的潮汐调和常数；下面是利用两种处理方法的具体步骤。

在 MATLAB 软件运行环境下，根据上述所述的潮汐调和分析方法的介绍，分别求解出分潮的角速度 σ 、分潮初相位 v_0 、 f_j 和 u_j 的计算，最后根据最小二乘法提取出四个主要分潮的调和常数，并进行误差分析。基于 MATLAB 编译环境的代码见附件。在计算的过程中需要注意以下几点：

1、对于角速度 σ 可以直接根据表 3-1 直接得出，简单快捷；

2、对于分潮初相位的计算，注意需要对时间进行处理：所给卫星高度计 T/P 的潮位数据“TP.dat”是以 2000 年 1 月 1 日 0 点 0 分 0 秒（北京时间）为计算基准点，在计算初相位 v_0 中所涉及到的时间 t 需要使用格林尼治时间 (UTC)，所以在使用卫星高度计 T/P 中的时间序列前，需要将位于东 8 时区的北京时间转化为世界时格林尼治时间 (UTC)，即减去 8 小时。

3、在计算 f_j 和 u_j 时，需要注意的是四大主要分潮 M2, S2, K1, O1 中 S2 根据其不变的特性可以直接查表 3-2 得知，其次式中所涉及的 p 和 N^1 在求解分潮初相位是已经用到，可直接引用；此外对于 u_j 反三角函数求解过程中，需要使用 \arctan 值避免出现角度的多解性问题。

4、利用最小二乘法提取四个主要分潮的调和常数：充分利用 MATLAB 编译环境的矩阵运算优势，尽量多的使用矩阵运算对参数进行求解，能够降低运算次数，减少运算时间。具体原理与方法如下。

考虑超定方程组（超定指未知数小于方程个数）：

$$\sum_{j=1}^n X_{ij}\beta_j = y_i, (i=1,2,3\dots m)$$

其中 m 代表有 m 个等式, n 代表有 n 个未知数 β , $m > n$; 将其进行向量化后为:

$$X\beta = y$$

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & \dots & X_{mn} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_3 \end{bmatrix}$$

显然该方程组一般而言没有解, 所以为了选取最合适的 β 让该等式"尽量成立", 引入残差平方和函数 S

$$S(\beta) = \|X\beta - y\|^2$$

(在统计学中, 残差平方和函数可以看成 n 倍的均方误差 MSE)

当 $\beta = \hat{\beta}$ 时, $S(\beta)$ 取最小值, 记作:

$$\hat{\beta} = \arg \min(S(\beta))$$

通过对 $S(\beta)$ 进行微分求最值, 可以得到:

$$X^T X \hat{\beta} = X^T y$$

如果矩阵 $X^T X \hat{\beta} = X^T y$ 非奇异则 β 有唯一解:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

二、利用 Utide 数据包求解四个主要分潮的调和常数

Utide 数据包是一种统一的潮汐分析方法, 是由于对不规则时间间隔收集的观测序列进行潮汐分析的需要而发展起来的 (Codiga, 2007)。早前所用的验潮站数据都是具有规则时间间隔的观测序列, 具有不规则时间间隔的观测数据集在之前并不常见, 而现在由于潮汐观测方法的多样性, 这种数据集越来越多。对于规则时间间隔的潮汐资料的潮汐分析, 已经有了许多趋于成熟的标准软件包。而 Utide 数据包, 则是近些年新发展起来针对这种不规则观测数据集的数据包。

Utide 由一对易于理解和实现的 Matlab 函数组成: `ut_solve()` 用于分析, `andut_reconstr()` 使用分析结果来重构后期投射或预测/预测的时间序列。它们旨在简化大多数典型潮汐分析的各个阶段, 包括二维 (例如, 潮汐流) 和一维情况的成分选择和置信区间估计。分析函数接受具有均匀或不规则分布的时间的记录,

并且可以为持续时间长达 18.6 年的记录提供准确的节点校正结果。重建函数接受任意时间并允许使用成分子集生成重构拟合，例如基于信噪比（SNR）标准或由用户指定。

在 MATLAB 软件运行环境下，将符合条件的潮汐数据，导入 Utide 数据包，即可得到这些观测点的调和常数。

3.2. 确定分离主要分潮的最短资料长度

考虑到观测次数过少会降低调和与分析结果的可靠性，我们在调和与分析的过程中并没有选取所有的观测点的卫星高度及数据，而是根据 T/P 高度计资料的潮汐混淆周期和 Rayleigh 周期进行分析数据，最后对形成的筛选得出所用的样本数据。

根据对卫星高度计所测数据的初步处理，我们发现卫星高度计所测的数据与所熟知的验潮站数据相比，时间点上没有明显的周期规律，而且不同经纬度点上测量数据个数不尽相同。根据对 T/P 卫星的运行轨道、运行周期、轨道高度、轨道倾角的信息的了解可知，轨道的交点周期（绕地球一圈的时间）为 6745.8s，轨道运行 127 圈以后精确重复，轨道重复周期为 9.9156 天。相邻最近的轨道之间在赤道上的间隔为 $360^\circ / 127 = 2.835^\circ$ 。卫星在一个周期内的每一圈分为上行轨和下行轨两条轨道，一个完整的周期内共有 254 条轨道，沿轨道的两个相邻的星下观测点的距离 5.75km。

结合 T/P 卫星的在轨信息与卫星所测数据的资料分析，可知 T/P 高度计资料的潮汐混淆周期与 Rayleigh 周期[3]。

1) 潮汐混淆周期

执行精密重复轨道任务的测高卫星为我们在开阔海域提供了良好的星下点观测时间序列，然而测高卫星受重复周期轨道的限制，其对某一点的采样间隔一般为数天或者数十天，这样利用卫星测高观测时间序列进行潮汐分析时要受到这种特定采样规律产生的混淆效应影响。混淆现象会使分潮信号之间存在很强的相关性，必须用数年甚至数十年的观测数据才能使其相互分离。混淆效应是利用卫星测高数据提取潮汐信号的重要限制因素。根据采样定律，假设采样的时间间隔为对于给定的采样时间序列可恢复的最高频率为频率，即采样频率的一半对应的信号周期为。换句话说，重建周期为的时间连续信号，需要以不大于的采样间隔至少观测天。如果不满足上述条件，高于频率的频段将被重建成低于该频率的信号，这样就将导致信号彼此重叠失真的现象。

对于 T/P 卫星来说，每 127 圈后轨道重复，重复周期为 9.9156 天，它响应的折叠频率 f_c 为 $0.050426 d^{-1}$ ，远小于主要的潮汐频率（比如，全日分潮的频率约为 $1 d^{-1}$ ），因而必然产生潮汐高频混淆（李立等，1999）。根据频率混淆的计算公式，频率 f 与混淆频率 f_a 的关系式为： $f_a =$

$2 * n * f_c \pm f, n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ，混淆周期 T_a 与混淆频率的公式为 $T_a = 1 / f_a$

频率为 $f(f > f_c)$ 的分潮经 T/P 高度计采样后将被折叠到频率 $f_a(f_a < f_c)$ 上。

因此，对于 n 进行遍历，计算 f_a ，选择 $f_a < f_c$ 的最小值，即可得到（最大）混淆周期。计算结果如下：

表 3-3 不同分潮调和常数的最大混淆周期

主要调和常数类型	最大混淆周期
M2	62.1075 days
S2	58.7417 days
K1	173.1922 days
K1	45.7142 days

2) Rayleigh 周期

按照传统的分潮分离思想，分潮之间的可分辨率必须有潮汐混淆信号的会和周期计算，由 Rayleigh 准则决定，分离两个分潮所需的时间长度 T_R （Rayleigh 周期）为：

$$T_R \geq \left| \frac{T_i T_j}{T_i - T_j} \right|$$

其中， T_i ， T_j 为要分离的两个分潮在 T/P 高度计数据中的混淆周期。T/P 数据中 Rayleigh 周期：

表 3-4 T/P 数据中 Rayleigh 周期表

区分不同分潮周期类型	周期
m2 和 s2	2.9697 年
m2 和 k1	0.26529 年
m2 和 o1	0.4745 年
s2 和 k1	0.24354 年
s2 和 o1	0.56473 年
k1 和 o1	0.17016 年

从上述结果中可以看出，要从 T/P 高度计资料中准确提取 M2、S2、K1 和 O1 四个主要分潮，那么时间长度最短为 2.9697 年。因此，在接下来进行调和和分析时，只对时间长度大于 2.97 年的数据进行分析，共 4309 个数据点。

3.3. 四个主要分潮调和常数提取结果的评价潮汐调和和分析的检验

3.3.1. 检验 1：调和常数提取结果与 Utide 所得结果的比较

针对诸如卫星高度计所测的不均匀连续观测的潮位数据，Utide 数据包是目前根据此类潮位数据求解潮汐调和常数比较成熟的数据包，其求解结果精度较高，受到行业内普遍的认可，可以根据 Utide 数据包求得的潮汐调和常数与自建模型的所求的调和常数作对比，以此可以对自建模型的可行度进行评价。

本文的 Utide 数据包是在 MATLAB 的环境下运行，只需导入对观测时间长度大于 2.97 年的数据（共 4309 个位置点），即可得到这些位置的潮汐调和常数。以 Utide 数据包所求的调和常数为纵轴、以自建调和和分析模型所得调和常数

为横轴，将符合条件的 4309 个位置点的调和常数投入此坐标轴中，可以发现几乎所有不同分潮的潮汐调和常数均落在 $y=x$ 这条直线上（见图），说明本文自建的模型所求的潮汐调和常数非常准确，基本与行业普遍接受的方法相同，当然短时间内的程序难免有些细节处理得不太成熟，并未趋于完善；但整体上说，本次自建模型较好，且所求的调和常数数据可靠。

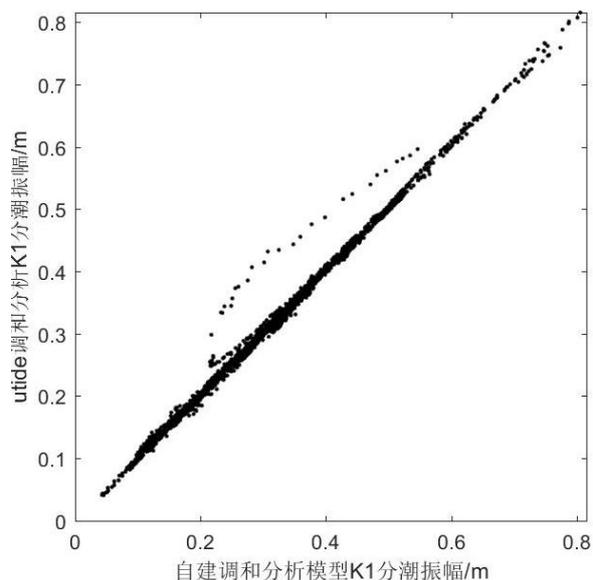


图 3-1 K1 分潮的振幅对比

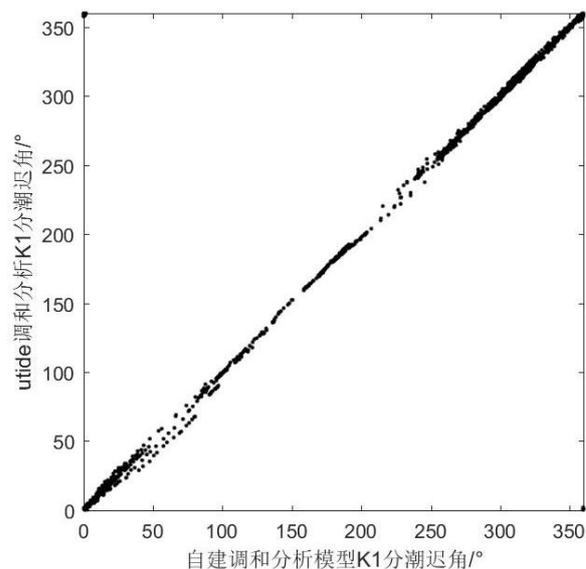


图 3-2 K1 分潮的迟角振幅对比

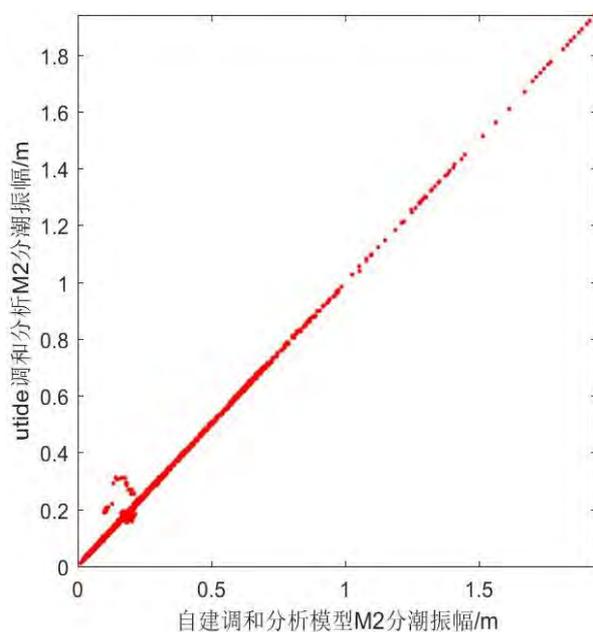


图 3-3 M2 分潮的振幅对比

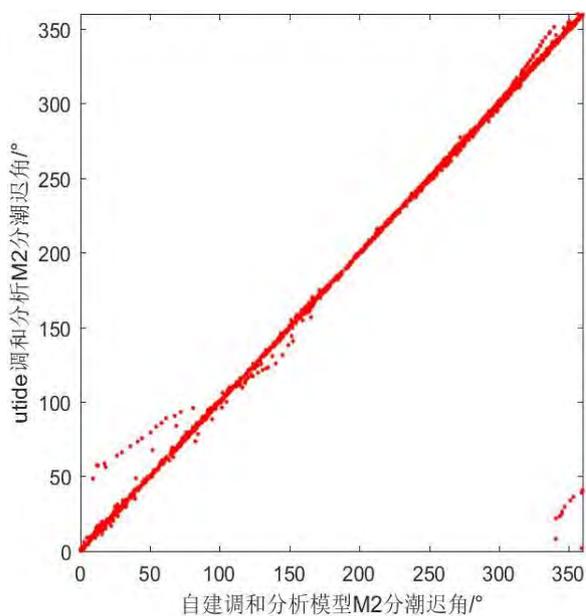


图 3-4 M2 分潮的迟角振幅对比

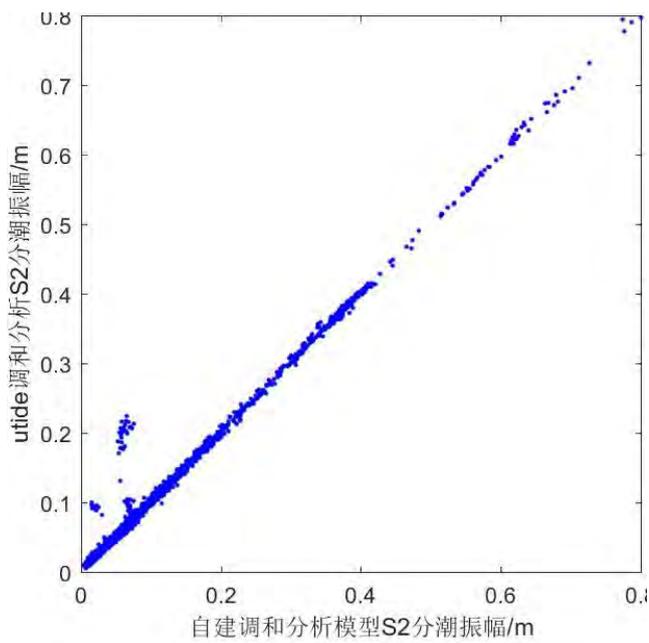


图 3-5 S2 分潮的振幅对比

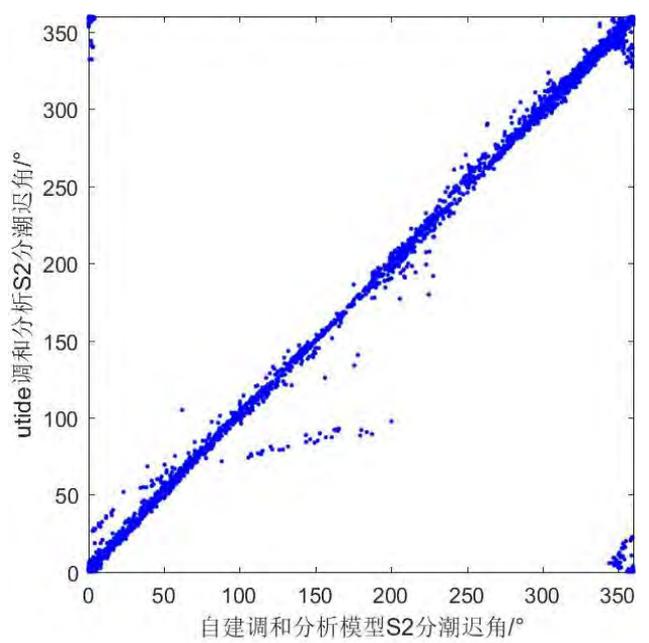


图 3-6 S2 分潮的迟角对比

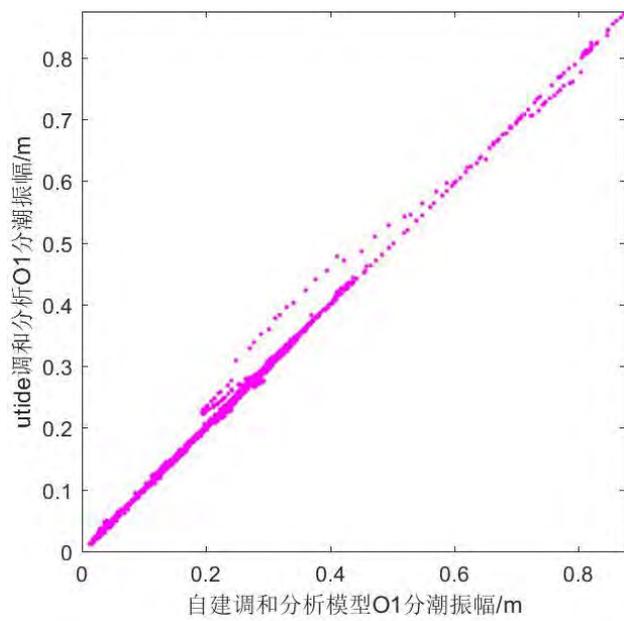


图 3-7 O1 分潮的振幅对比

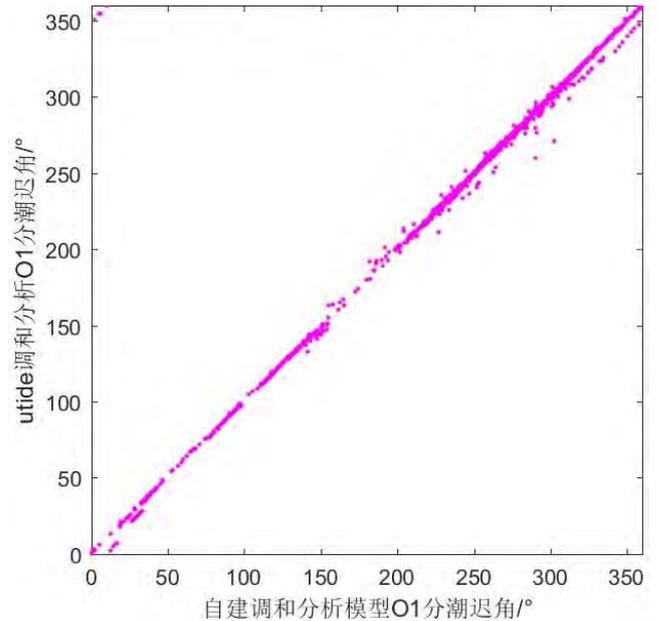


图 3-8 O1 分潮的迟角对比

3.3.2. 检验 2: 卫星上行轨道与下行轨道相交点的调和常数对比检验(自检验)

为了检验上述调和分析的结果,本文在轨道交点处将上行轨和下行轨的调和常数做了比较。根据后面对卫星轨道的分离,可知卫星在南海区域共分布有 20 条轨道,其中 9 条上升轨、11 条下降轨,星下轨道和轨道交点 22 个。在这些轨道交点处,可以对四个主要分潮的调和常数进行比较。

根据上述研究可知,由 $H\cos G$ 和 $H\sin G$ 多项式拟合所得到的 n 值不一定相等,根据先人经验,在这里引入矢量差的概念:

$$\Delta = [(H_a \cos G_a - H_b \cos G_b)^2 + (H_a \sin G_a - H_b \sin G_b)^2]^{\frac{1}{2}}$$

其中下标 a、b 分别代表上、下行轨道。

本文只做了这方面的研究准备,并没有实际去检验调和常数的准确性,原因主要是在之前与 Utide 数据包所求的调和常数进行对比,已经获得了非常好的验证结果,其必要性不够;其次是本次研究时间紧迫,没有具体实施。

3.3.3. 检验 3: 自编程实现结果与验潮站的数据对比

根据卫星高度计 T/P 的潮位数据,得到基于的潮汐混淆周期和 Rayleigh 周期筛选得到的 4309 个星下观测点的位置数据,根据 4309 个星下观测点的位置数据与 217 个国内验潮站和 26 个国际验潮点的位置数据求得各位置点之间的距离信息,按照距离从小到大排序如下表。选取距离为 15km 以内的 40 对数据进行验证。如下表 3.5-3.8 所示。

选取了卫星高度计轨道上的点和所有验潮站做距离最近的 40 个点分别将他们的主要分潮 (M_2 、 K_1 、 O_1 、 S_2) 的潮汐调和常数和他们对应的验潮站的数据进行对比结果如下表 3-5~3-8 所示。根据表格可知主要分潮 (M_2 、 K_1 、 O_1 、 S_2) 的潮汐调和常数中振幅 H 和迟角 G 的平均差值,结合振幅 H 和迟角 G ,可以求出矢量差(矢量差在问题二中有所涉及)。以下是对上述对比所得数据的简单分析。

通过数据对比可知 M_2 的潮汐调和常数中振幅平均差值都不超过 3cm,与验潮站的平均振幅相比低于 8%。迟角平均差值也不超过 7 度,与验潮站的平均迟角相比低于 8%。平均矢量差值也小于 7cm,数据十分可靠;

通过数据对比可知 S_2 的潮汐调和常数中振幅平均差值都不超过 2.1cm,与验潮站的平均振幅相比低于 11%。迟角平均差值也不超过 13 度,与验潮站的平均迟角相比低于 8%。平均矢量差值也小于 3.5cm,数据比较可靠;

通过数据对比可知 K_1 的潮汐调和常数中振幅平均差值都不超过 1.8cm,与验潮站的平均振幅相比低于 6%。迟角平均差值也不超过 9 度,与验潮站的平均迟角相比低于 4%。平均矢量差值也小于 4.5cm,数据十分可靠;

通过数据对比可知 O_1 的潮汐调和常数中振幅平均差值都不超过 2.7cm,与验潮站的平均振幅相比低于 13%。迟角平均差值也不超过 6.8 度,与验潮站的平均迟角相比低于 3%。平均矢量差值也小于 4.5cm,数据十分可靠。

表 3-5 M2 分潮 T/P 卫星数据与验潮站数据调和常数的对比

序号	验潮站位置		卫星轨道观测点位置		距离 km	M2 分潮振幅 (H)			M2 分潮迟角 (G)			矢量误差 (cm)
	经度	纬度	经度	纬度		验潮站 (cm)	高度计 (cm)	绝对误差 (cm)	验潮站	高度计	绝对误差	
1	114.03	22.10	114.03	22.08	2.70	40.80	38.40	2.40	272.00	270.88	1.12	2.52
2	114.03	22.10	114.05	22.13	3.29	40.80	39.52	1.28	272.00	268.68	3.32	2.66
3	101.00	2.88	100.97	2.90	4.17	120.40	128.12	7.72	155.98	151.88	4.10	11.78
4	110.68	20.17	110.73	20.21	6.77	40.80	39.05	1.75	306.97	299.64	7.33	5.40
5	101.00	2.88	100.95	2.85	7.04	120.40	128.87	8.47	155.98	153.36	2.62	10.21
6	101.00	2.88	100.98	2.95	7.41	120.40	127.90	7.50	155.98	151.55	4.43	12.17
7	108.95	10.50	108.91	10.45	7.61	18.90	18.99	0.09	345.50	350.86	5.36	1.77
8	114.03	22.10	114.01	22.03	8.56	40.80	38.06	2.74	272.00	269.41	2.59	3.27
9	108.70	11.17	108.67	11.09	9.02	21.50	22.89	1.39	345.50	351.94	6.44	2.86
10	108.95	10.50	108.87	10.54	9.93	18.90	22.86	3.96	345.50	353.51	8.01	4.91
11	108.85	3.05	108.76	3.07	10.36	50.00	43.31	6.69	109.18	103.56	5.62	8.10
12	113.98	4.58	113.89	4.57	10.38	17.00	17.07	0.07	335.00	326.68	8.32	2.47
13	110.68	20.17	110.71	20.26	10.43	40.80	39.78	1.02	306.97	299.16	7.81	5.58
14	113.98	4.58	113.91	4.52	10.90	17.00	18.88	1.88	335.00	329.12	5.88	2.63
15	110.60	20.95	110.71	20.94	11.02	78.80	69.84	8.96	312.50	307.01	5.49	11.44
16	121.28	18.87	121.19	18.92	11.07	24.50	21.39	3.11	177.30	184.01	6.71	4.10
17	111.62	16.55	111.71	16.50	11.15	16.80	15.93	0.87	296.88	287.96	8.92	2.69
18	121.10	18.62	121.11	18.72	11.50	19.00	21.71	2.71	195.70	184.22	11.48	4.89
19	99.82	11.80	99.91	11.75	11.62	5.87	6.18	0.31	164.89	156.70	8.19	0.91
20	111.62	16.55	111.73	16.55	11.67	16.80	14.54	2.26	296.88	294.48	2.40	2.35
21	121.28	18.87	121.17	18.87	11.69	24.50	22.17	2.33	177.30	181.80	4.50	2.96
22	108.95	10.50	108.93	10.40	11.92	18.90	19.54	0.64	345.50	351.44	5.94	2.09
23	101.00	2.88	100.93	2.80	12.30	120.40	129.54	9.14	155.98	153.52	2.46	10.60

序号	验潮站位置		卫星轨道观测点位置		距离 km	M2 分潮振幅 (H)			M2 分潮迟角 (G)			矢量误差 (cm)
	经度	纬度	经度	纬度		验潮站 (cm)	高度计 (cm)	绝对误差 (cm)	验潮站	高度计	绝对误差	
24	103.00	11.42	102.89	11.38	12.67	11.00	8.81	2.19	51.50	27.91	23.59	4.58
25	120.30	16.62	120.22	16.53	12.71	7.60	9.20	1.60	264.20	273.42	9.22	2.09
26	101.00	2.88	101.00	3.00	12.73	120.40	128.12	7.72	155.98	150.66	5.32	13.88
27	113.98	4.58	113.87	4.62	12.90	17.00	18.83	1.83	335.00	325.61	9.39	3.46
28	114.00	22.23	114.05	22.13	13.00	41.00	39.52	1.48	272.00	268.68	3.32	2.76
29	121.28	18.87	121.21	18.97	13.34	24.50	18.17	6.33	177.30	174.10	3.20	6.44
30	120.15	23.00	120.06	22.91	13.76	25.00	23.36	1.64	263.20	265.44	2.24	1.90
31	108.70	11.17	108.69	11.04	13.87	21.50	23.30	1.80	345.50	351.36	5.86	2.91
32	103.00	11.42	102.87	11.43	13.91	11.00	10.53	0.47	51.50	28.70	22.80	4.28
33	110.60	20.95	110.73	20.99	14.04	78.80	70.81	7.99	312.50	306.10	6.40	11.55
34	103.00	11.42	102.91	11.33	14.06	11.00	8.11	2.89	51.50	35.02	16.48	3.96
35	108.85	3.05	108.74	3.12	14.31	50.00	42.49	7.51	109.18	106.66	2.52	7.78
36	114.03	22.10	113.99	21.98	14.45	40.80	39.53	1.27	272.00	268.77	3.23	2.59
37	109.53	18.22	109.51	18.09	14.56	20.30	20.57	0.27	303.40	317.53	14.13	5.03
38	111.62	16.55	111.75	16.60	14.76	16.80	16.90	0.10	296.88	295.07	1.81	0.54
39	121.28	18.87	121.15	18.82	14.84	24.50	22.71	1.79	177.30	185.12	7.82	3.68
40	108.95	10.50	108.85	10.59	14.95	18.90	21.24	2.34	345.50	353.90	8.40	3.76
平均值								3.16			6.87	4.99

表 3-6 S2 分潮 T/P 卫星数据与验潮站数据调和常数的对比

序号	验潮站位置		卫星轨道观测点位置		距离 km	S2 分潮振幅 (H)			S2 分潮迟角 (G)			矢量误差 (cm)
	经度	纬度	经度	纬度		验潮站 (cm)	高度计 (cm)	绝对误差 (cm)	验潮站	高度计	绝对误差	
1	114.03	22.10	114.03	22.08	2.70	16.50	16.46	0.04	299.00	285.86	13.14	3.77
2	114.03	22.10	114.05	22.13	3.29	16.50	18.53	2.03	299.00	286.25	12.75	4.38
3	101.00	2.88	100.97	2.90	4.17	63.70	64.26	0.56	206.00	204.59	1.41	1.67
4	110.68	20.17	110.73	20.21	6.77	13.40	20.22	6.82	6.60	347.72	18.88	8.70
5	101.00	2.88	100.95	2.85	7.04	63.70	62.50	1.20	206.00	204.21	1.79	2.31
6	101.00	2.88	100.98	2.95	7.41	63.70	62.68	1.02	206.00	203.78	2.22	2.65
7	108.95	10.50	108.91	10.45	7.61	7.80	10.00	2.20	36.80	27.93	8.87	2.59
8	114.03	22.10	114.01	22.03	8.56	16.50	15.64	0.86	299.00	296.67	2.33	1.08
9	108.70	11.17	108.67	11.09	9.02	10.30	11.03	0.73	32.60	23.48	9.12	1.85
10	108.95	10.50	108.87	10.54	9.93	7.80	10.97	3.17	36.80	40.01	3.21	3.22
11	108.85	3.05	108.76	3.07	10.36	14.00	13.88	0.12	154.30	138.50	15.80	3.83
12	113.98	4.58	113.89	4.57	10.38	8.00	9.91	1.91	10.00	342.71	27.29	4.61
13	110.68	20.17	110.71	20.26	10.43	13.40	21.74	8.34	6.60	345.46	21.14	10.43
14	113.98	4.58	113.91	4.52	10.90	8.00	9.84	1.84	10.00	356.68	13.32	2.76
15	110.60	20.95	110.71	20.94	11.02	34.90	32.31	2.59	0.90	351.74	9.16	5.96
16	121.28	18.87	121.19	18.92	11.07	10.20	10.36	0.16	205.40	205.68	0.28	0.17
17	111.62	16.55	111.71	16.50	11.15	7.70	4.95	2.75	352.90	316.43	36.47	4.74
18	121.10	18.62	121.11	18.72	11.50	6.80	10.59	3.79	216.80	207.48	9.32	4.04
19	99.82	11.80	99.91	11.75	11.62	1.41	1.66	0.26	225.49	145.00	80.49	2.00
20	111.62	16.55	111.73	16.55	11.67	7.70	4.45	3.25	352.90	338.25	14.65	3.58
21	121.28	18.87	121.17	18.87	11.69	10.20	11.67	1.47	205.40	207.29	1.89	1.51
22	108.95	10.50	108.93	10.40	11.92	7.80	9.94	2.14	36.80	26.28	10.52	2.68
23	101.00	2.88	100.93	2.80	12.30	63.70	62.91	0.79	206.00	204.17	1.83	2.17

序号	验潮站位置		卫星轨道观测点位置		距离 km	S2 分潮振幅 (H)			S2 分潮迟角 (G)			矢量误差 (cm)	
	经度	纬度	经度	纬度		验潮站 (cm)	高度计 (cm)	绝对误差 (cm)	验潮站	高度计	绝对误差		
24	103.00	11.42	102.89	11.38	12.67	6.30	5.62	0.68	122.90	130.34	7.44	1.03	
25	120.30	16.62	120.22	16.53	12.71	2.50	3.21	0.71	282.50	260.33	22.17	1.30	
26	101.00	2.88	101.00	3.00	12.73	63.70	62.17	1.53	206.00	203.25	2.75	3.38	
27	113.98	4.58	113.87	4.62	12.90	8.00	8.70	0.70	10.00	359.18	10.82	1.72	
28	114.00	22.23	114.05	22.13	13.00	17.00	18.53	1.53	303.00	286.25	16.75	5.39	
29	121.28	18.87	121.21	18.97	13.34	10.20	7.14	3.06	205.40	191.79	13.61	3.67	
30	120.15	23.00	120.06	22.91	13.76	6.00	5.20	0.80	278.00	245.87	32.13	3.19	
31	108.70	11.17	108.69	11.04	13.87	10.30	12.47	2.17	32.60	34.07	1.47	2.19	
32	103.00	11.42	102.87	11.43	13.91	6.30	6.53	0.23	122.90	118.73	4.17	0.52	
33	110.60	20.95	110.73	20.99	14.04	34.90	31.28	3.62	0.90	348.10	12.80	8.21	
34	103.00	11.42	102.91	11.33	14.06	6.30	5.00	1.30	122.90	91.94	30.96	3.27	
35	108.85	3.05	108.74	3.12	14.31	14.00	13.98	0.02	154.30	144.89	9.41	2.30	
36	114.03	22.10	113.99	21.98	14.45	16.50	14.47	2.03	299.00	296.73	2.27	2.12	
37	109.53	18.22	109.51	18.09	14.56	16.80	6.70	10.10	335.20	359.74	24.54	11.06	
38	111.62	16.55	111.75	16.60	14.76	7.70	5.47	2.23	352.90	333.48	19.42	3.13	
39	121.28	18.87	121.15	18.82	14.84	10.20	11.27	1.07	205.40	206.36	0.96	1.09	
40	108.95	10.50	108.85	10.59	14.95	7.80	10.48	2.68	36.80	30.14	6.66	2.88	
平均值								2.06				13.64	3.43

表 3-7 O1 分潮 T/P 卫星数据与验潮站数据调和常数的对比

序号	验潮站位置		卫星轨道观测点位置		距离 km	O1 分潮振幅 (H)			O1 分潮迟角 (G)			矢量误差 (cm)
	经度	纬度	经度	纬度		验潮站 (cm)	高度计 (cm)	绝对误差 (cm)	验潮站	高度计	绝对误差	
1	114.03	22.10	114.03	22.08	2.70	29.60	29.74	0.14	252.00	245.83	6.17	3.20
2	114.03	22.10	114.05	22.13	3.29	29.60	28.71	0.89	252.00	243.45	8.55	4.43
3	101.00	2.88	100.97	2.90	4.17	4.00	4.34	0.34	143.94	132.79	11.15	0.88
4	110.68	20.17	110.73	20.21	6.77	19.50	18.42	1.08	8.64	332.00	36.64	11.96
5	101.00	2.88	100.95	2.85	7.04	4.00	3.82	0.18	143.94	150.27	6.33	0.47
6	101.00	2.88	100.98	2.95	7.41	4.00	4.35	0.35	143.94	149.17	5.23	0.52
7	108.95	10.50	108.91	10.45	7.61	20.30	32.71	12.41	263.90	264.13	0.23	12.41
8	114.03	22.10	114.01	22.03	8.56	29.60	27.86	1.74	252.00	248.57	3.43	2.44
9	108.70	11.17	108.67	11.09	9.02	32.70	32.46	0.24	262.80	263.39	0.59	0.41
10	108.95	10.50	108.87	10.54	9.93	20.30	30.70	10.40	263.90	262.58	1.32	10.41
11	108.85	3.05	108.76	3.07	10.36	24.00	25.24	1.24	302.74	296.47	6.27	2.96
12	113.98	4.58	113.89	4.57	10.38	30.00	29.31	0.69	269.00	264.22	4.78	2.57
13	110.68	20.17	110.71	20.26	10.43	19.50	18.70	0.80	8.64	337.16	31.48	10.39
14	113.98	4.58	113.91	4.52	10.90	30.00	32.78	2.78	269.00	264.97	4.03	3.54
15	110.60	20.95	110.71	20.94	11.02	39.50	33.38	6.12	276.00	270.80	5.20	6.95
16	121.28	18.87	121.19	18.92	11.07	13.30	15.63	2.33	234.30	238.16	3.86	2.53
17	111.62	16.55	111.71	16.50	11.15	23.40	22.90	0.50	261.04	265.27	4.23	1.78
18	121.10	18.62	121.11	18.72	11.50	13.20	10.65	2.55	248.40	241.66	6.74	2.90
19	99.82	11.80	99.91	11.75	11.62	33.65	34.41	0.76	131.02	128.95	2.06	1.44
20	111.62	16.55	111.73	16.55	11.67	23.40	21.87	1.53	261.04	265.73	4.69	2.40
21	121.28	18.87	121.17	18.87	11.69	13.30	13.85	0.55	234.30	241.37	7.07	1.76
22	108.95	10.50	108.93	10.40	11.92	20.30	33.37	13.07	263.90	263.61	0.29	13.07
23	101.00	2.88	100.93	2.80	12.30	4.00	5.35	1.35	143.94	143.94	0.00	1.35

序号	验潮站位置		卫星轨道观测点位置		距离 km	O1 分潮振幅 (H)			O1 分潮迟角 (G)			矢量误差 (cm)	
	经度	纬度	经度	纬度		验潮站 (cm)	高度计 (cm)	绝对误差 (cm)	验潮站	高度计	绝对误差		
24	103.00	11.42	102.89	11.38	12.67	27.70	23.29	4.41	131.00	115.80	15.20	8.03	
25	120.30	16.62	120.22	16.53	12.71	20.10	21.14	1.04	266.90	265.17	1.73	1.21	
26	101.00	2.88	101.00	3.00	12.73	4.00	4.48	0.48	143.94	139.84	4.10	0.57	
27	113.98	4.58	113.87	4.62	12.90	20.30	31.97	11.67	263.90	264.01	0.11	11.67	
28	114.00	22.23	114.05	22.13	13.00	29.00	28.71	0.29	251.00	243.45	7.55	3.81	
29	121.28	18.87	121.21	18.97	13.34	13.30	12.73	0.57	234.30	245.01	10.71	2.49	
30	120.15	23.00	120.06	22.91	13.76	17.00	15.90	1.10	243.70	236.48	7.22	2.34	
31	108.70	11.17	108.69	11.04	13.87	32.70	32.30	0.40	262.80	261.91	0.89	0.65	
32	103.00	11.42	102.87	11.43	13.91	27.70	22.60	5.10	131.00	115.36	15.64	8.51	
33	110.60	20.95	110.73	20.99	14.04	39.50	32.44	7.06	276.00	271.77	4.23	7.54	
34	103.00	11.42	102.91	11.33	14.06	27.70	22.37	5.33	131.00	115.97	15.03	8.41	
35	108.85	3.05	108.74	3.12	14.31	24.00	26.21	2.21	302.74	299.17	3.57	2.71	
36	114.03	22.10	113.99	21.98	14.45	29.60	28.81	0.79	252.00	248.27	3.73	2.06	
37	109.53	18.22	109.51	18.09	14.56	28.70	27.14	1.56	271.50	281.06	9.56	4.91	
38	111.62	16.55	111.75	16.60	14.76	23.40	22.49	0.91	261.04	260.36	0.68	0.95	
39	121.28	18.87	121.15	18.82	14.84	13.30	14.23	0.93	234.30	242.68	8.38	2.21	
40	108.95	10.50	108.85	10.59	14.95	20.30	32.91	12.61	263.90	264.03	0.13	12.61	
平均值									2.96			6.72	4.54

表 3-8 K1 分潮 T/P 卫星数据与验潮站数据调和常数的对比

序号	验潮站位置		卫星轨道观测点位置		距离 km	K1 分潮振幅 (H)			K1 分潮迟角 (G)			矢量误差 (cm)
	经度	纬度	经度	纬度		验潮站 (cm)	高度计 (cm)	绝对误差 (cm)	验潮站	高度计	绝对误差	
1	114.03	22.10	114.03	22.08	2.70	35.40	34.74	0.66	301.00	294.29	6.71	4.16
2	114.03	22.10	114.05	22.13	3.29	35.40	35.58	0.18	301.00	299.39	1.61	1.01
3	101.00	2.88	100.97	2.90	4.17	14.00	13.35	0.65	33.04	32.15	0.89	0.68
4	110.68	20.17	110.73	20.21	6.77	11.00	17.79	6.79	49.33	6.22	43.11	12.32
5	101.00	2.88	100.95	2.85	7.04	14.00	13.08	0.92	33.04	24.37	8.67	2.24
6	101.00	2.88	100.98	2.95	7.41	14.00	12.59	1.41	33.04	24.94	8.10	2.34
7	108.95	10.50	108.91	10.45	7.61	37.00	38.15	1.15	304.90	316.53	11.63	7.70
8	114.03	22.10	114.01	22.03	8.56	35.40	34.46	0.94	301.00	296.89	4.11	2.67
9	108.70	11.17	108.67	11.09	9.02	39.90	40.67	0.77	303.60	314.82	11.22	7.91
10	108.95	10.50	108.87	10.54	9.93	37.00	36.61	0.39	304.90	320.37	15.47	9.91
11	108.85	3.05	108.76	3.07	10.36	35.00	37.02	2.02	350.44	348.83	1.61	2.26
12	113.98	4.58	113.89	4.57	10.38	35.00	35.41	0.41	319.00	317.95	1.05	0.77
13	110.68	20.17	110.71	20.26	10.43	11.00	17.80	6.80	49.33	14.16	35.17	10.85
14	113.98	4.58	113.91	4.52	10.90	35.00	35.27	0.27	319.00	320.60	1.60	1.01
15	110.60	20.95	110.71	20.94	11.02	44.00	44.98	0.98	313.80	322.68	8.88	6.96
16	121.28	18.87	121.19	18.92	11.07	10.90	15.25	4.35	276.00	285.11	9.11	4.81
17	111.62	16.55	111.71	16.50	11.15	26.80	25.74	1.06	305.44	312.98	7.54	3.61
18	121.10	18.62	121.11	18.72	11.50	12.20	13.16	0.96	291.20	282.47	8.73	2.15
19	99.82	11.80	99.91	11.75	11.62	50.44	48.36	2.08	181.95	180.64	1.31	2.37
20	111.62	16.55	111.73	16.55	11.67	26.80	25.75	1.05	305.44	314.40	8.96	4.24
21	121.28	18.87	121.17	18.87	11.69	10.90	15.06	4.16	276.00	281.69	5.69	4.35
22	108.95	10.50	108.93	10.40	11.92	37.00	37.85	0.85	304.90	316.23	11.33	7.43
23	101.00	2.88	100.93	2.80	12.30	14.00	13.01	0.99	33.04	24.03	9.01	2.34

序号	验潮站位置		卫星轨道观测点位置		距离 km	K1 分潮振幅 (H)			K1 分潮迟角 (G)			矢量误差 (cm)
	经度	纬度	经度	纬度		验潮站 (cm)	高度计 (cm)	绝对误差 (cm)	验潮站	高度计	绝对误差	
24	103.00	11.42	102.89	11.38	12.67	37.40	33.87	3.53	160.80	161.13	0.33	3.54
25	120.30	16.62	120.22	16.53	12.71	24.40	23.04	1.36	312.00	311.74	0.26	1.37
26	101.00	2.88	101.00	3.00	12.73	14.00	13.79	0.21	33.04	19.49	13.55	3.29
27	113.98	4.58	113.87	4.62	12.90	35.00	37.12	2.12	319.00	317.74	1.26	2.27
28	114.00	22.23	114.05	22.13	13.00	36.00	35.58	0.42	300.00	299.39	0.61	0.56
29	121.28	18.87	121.21	18.97	13.34	10.90	14.44	3.54	276.00	294.16	18.16	5.31
30	120.15	23.00	120.06	22.91	13.76	20.00	20.71	0.71	299.10	277.66	21.44	7.60
31	108.70	11.17	108.69	11.04	13.87	39.90	39.25	0.65	303.60	318.23	14.63	10.10
32	103.00	11.42	102.87	11.43	13.91	37.40	34.12	3.28	160.80	161.72	0.92	3.32
33	110.60	20.95	110.73	20.99	14.04	44.00	44.39	0.39	313.80	320.48	6.68	5.17
34	103.00	11.42	102.91	11.33	14.06	37.40	32.69	4.71	160.80	162.62	1.82	4.84
35	108.85	3.05	108.74	3.12	14.31	35.00	36.39	1.39	350.44	348.67	1.77	1.77
36	114.03	22.10	113.99	21.98	14.45	35.40	35.43	0.03	301.00	296.75	4.25	2.63
37	109.53	18.22	109.51	18.09	14.56	28.50	29.42	0.92	309.60	318.99	9.39	4.83
38	111.62	16.55	111.75	16.60	14.76	26.80	27.81	1.01	305.44	312.69	7.25	3.60
39	121.28	18.87	121.15	18.82	14.84	10.90	14.98	4.08	276.00	279.87	3.87	4.17
40	108.95	10.50	108.85	10.59	14.95	37.00	38.92	1.92	304.90	317.22	12.32	8.37
平均值								1.75			8.50	4.42

3.3.4. 综合检验评价

综合以上三种检验方式，有如下结论：

一、根据自建模型所求的潮汐调和常数与验潮站数据的对比可知振幅的相差 1.8cm~3.0cm，迟角的相差范围在 6.8cm~13cm 之间，根据前人的研究成果可知，如此的潮汐调和常数的误差完全在误差允许的范围内。

二、根据自建模型所求的潮汐调和常数与使用 Utide 数据包所算得的潮汐调和常数具有良好的吻合，说明我们自编的模型通过了行业内的检验

综上所述，自建模型在潮汐调和分析的运用中可靠，其处理的数据准确、可信度高。

4. 问题二的求解

问题二是在问题一所得到的调和常数的基础上,将调和常数沿卫星轨道线方向作图,根据作图发现潮汐调和常数沿卫星轨道线方向的规律;同时画出沿轨道的各分潮的潮汐调和常数的相关值矢量差 Δ 的散点图,继而对四大主要分潮的进行多项式拟合,拟合出来的曲线即是正压潮,接着求出轨道上各散点的潮汐调和常数值与拟合值在同一地点的差值,即为内潮,也就达到了将各分潮的潮汐调和常数进行正压潮和内潮的分离的目标。

4.1. TP 卫星轨道的分离与提取

考虑到观测次数过少会降低调和和分析结果的可靠性,我们在调和和分析的过程中并没有选取所有的观测点的卫星高度及数据,而是根据 T/P 高度计资料的潮汐混淆周期和 Rayleigh 周期进行分析数据,最后筛选得出所用的样本数据(问题一中所求的、满足条件的 4309 个点),而这些样本数据均是离散点的形式存在于卫星轨道上[6]。

4.1.1. 卫星高度计的原理

卫星高度计是一种向卫星下方海洋发射脉冲的雷达,通过测量脉冲经海面反射之后的往返时间,获得卫星距海面的高度。主要用途:利用所得到的海面动力高度同化反演海洋重力场、流场、潮、大地水准面、海洋重力异常;根据回波强度获取风速资料;根据回波波前斜率获取海面有效波高。

TOPEX/POSEIDON 卫星是由美国国家航空航天局和法国空间局联合于 1992 年 8 月 10 日发射的,是世界上第一颗专门为研究世界大洋环流而设计的高度计卫星。其轨道高度达 1336km,倾角为 66° ,覆盖面大,保证了资料的连续性。轨道的交点周期(绕地球一圈的时间)为 6745.8s,轨道运行 127 圈以后精确重复,轨道重复周期为 9.9156 天。相邻最近的轨道之间在赤道上的间隔为 $360^\circ/127 = 2.835^\circ$ 。卫星在一个周期内的每一圈分为上行轨和下行轨两条轨道,一个完整的周期内共有 254 条轨道,沿轨道的两个相邻的星下观测点的距离 5.75km。高度计系统的定规精度和测高精度较以前有显著提高,其测量精度约为 5cm,是目前观测海面高度精度最高的卫星。

本文涉及到的 TOPEX/POSEIDON 卫星高度计资料与潮汐相关的研究,即根据海面高度异常观测得到海洋的潮汐数据。

4.1.2. 南海 TP 卫星轨道的分离算法及编程实现

根据对卫星高度计观测的潮汐数据的处理,提取出所有的点的不同观测时刻。可以得到时间 t 满足:

$$-2.2917 * 10^8 s < t \leq 5.2868 * 10^8 s$$

此为基于北京时间 2000 年 1 月 1 日的相对时间,易得其观测时间为北京时间 1992 年 9 月 26 日 5 时 29 分 29.37 秒至 2016 年 10 月 1 日 16 时 8 分 35.31 秒。根据卫星在轨的相关数据,可知高度卫星在地球轨道上的运行的完全周期为 9.9156 天,记为 T_1 ,满足:

$$T_1 = 9.9156 * 24 * 3600s$$

易知在所给的时间间隔内卫星高度计在每一个观测点重复次数为 N ，且满足：

$$N = \frac{t}{T_1} = 884.6105$$

在所观测的数据中，卫星高度计扫过地球上任意一个点的次数 N 超过 884 次，据此在模型构建时，选择略大于 884 次的 $N=1000$ 作为程序的循环次数，以更加确保卫星扫过某一点的次数。

编程实现卫星轨道分离的最核心实现方法是：根据卫星高度计每次扫描过同一个点的时间间隔相差周期 T_1 时间，结合卫星高度计的轨道的交点周期（即每个周期为一个上行轨道时间加上一个下行轨道时间）周期为 T_2 ， $T_2=6745.8s$ 。

编程需要做两次判断：1) 若两个星下观测点的时间间隔等于 T_1 的整数次，则其位于同一个轨道的同一个点上；2) 若任意一个观测点的时间间隔小于另外一个与之时间差小于 T_2 ，即“ $abs(time_tmp-time0)<6745.8$ ”即可认定这些点位于同一个轨道上，可以根据此规律将满足条件的 4309 个点投影到数据所覆盖的区域范围内，即可以区分出各个轨道。基于 MATLAB 环境下的实现代码具体见附件。

4.1.3. 南海 TP 卫星轨道分离结果

在上述的 MATLAB 代码中实现以不同的颜色区分该 T/P 卫星不同运行的轨道，如图 4-2 所示。仔细可以得到在该区域内，轨道总计为 20 条，其中上行轨道 9 条，下行轨道 11 条；与所给出南海 TOPEX/POSEIDON 高度计资料的星下轨迹（如图）完全一致。为了更加直观地反应各个轨道的轨迹，在 MATLAB 代码中分别给出了南海区域每一条轨迹在该研究区的位置图（如图 4-3 南海区域卫星轨道分离示意图（单个）所示），更加直观地将该区域的所有高度计卫星轨道展示出来，便于我们更加明了的对区域的轨道进行编号和处理（从左到右，从上到下，依次编号为 1,2,3, ..., 20）。

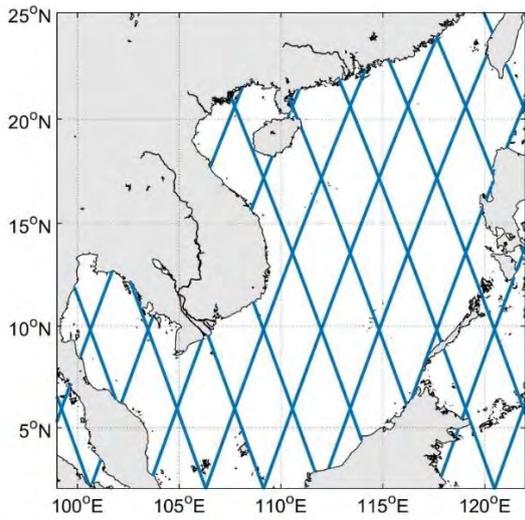


图 4-1 南海区域卫星轨道示意图

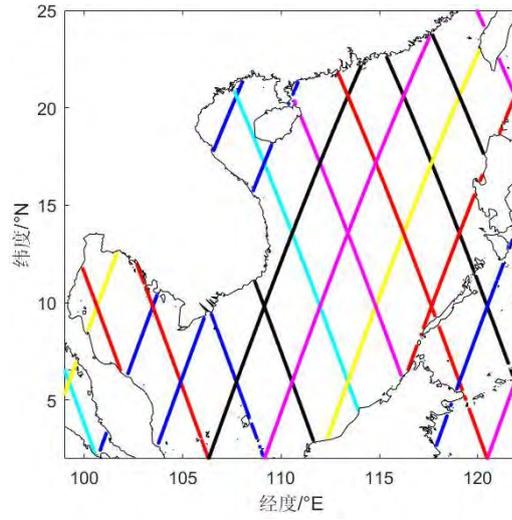


图 4-2 南海区域卫星轨道分离示意图（整体）

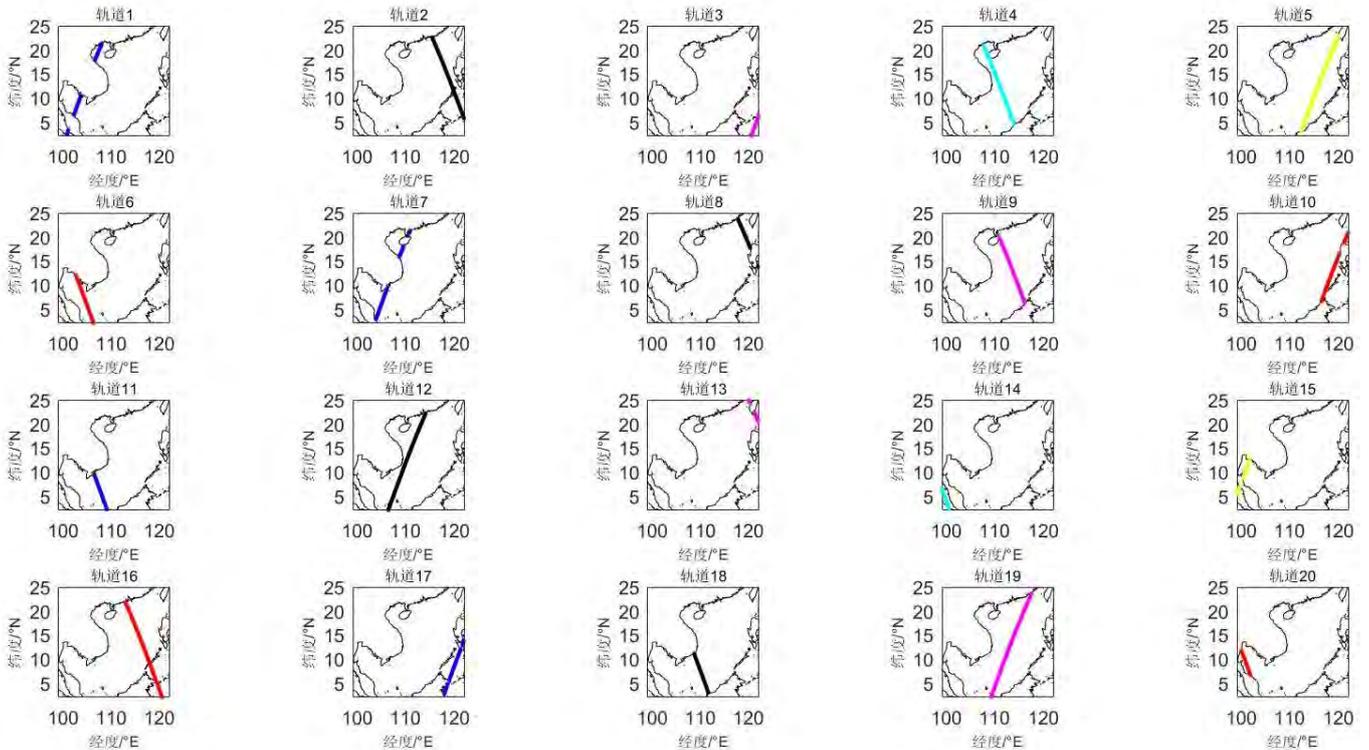


图 4-3 南海区域卫星轨道分离示意图（单个）

4.2. 单个轨道上正压潮与内潮的分离算法

具有潮频率的内波称为内潮，它是大洋普遍存在的一种运动形式，是大洋混合的主要能源之一，在海洋动力学研究中占有重要地位。准确分离出正压潮和内潮在海洋动力学科中具有重要的意义。

根据上述所分离出来的轨道上观测点的位置信息，结合问题一解出的潮汐调和常数便可以实现沿卫星轨道上各观测点的调和常数研究。

4.2.1. 以 M2 分潮为例，拟合一条轨道上的 HcosG 与 HsinG

Cummins et al.(2001)采用八次多项式拟合北太平洋海区近年的 T/P 卫星高度计数据，将正压潮和内潮分离；Dushaw (2002)在夏威夷海区采用 300km 滑动平均的方法进行滤波，证实对 HsinG、HcosG 进行滤波的结果要好于对 H、G 进行滤波的结果(其中 H、G 分别为海表面振幅和迟角)。

基于前人的工作，本文分别对 HsinG、HcosG 沿 T/P 本文分别对、沿轨进行多项式拟合。通过上述调和分析,得到研究区域内轨道上所有观测点 $p(x,y)$, (x 、 y 分别为 p 的经纬度)的振幅值 H 和迟角值 G 。首先将振幅 H 、迟角转化为 HsinG、HcosG, 然后分别对 HsinG、HcosG 沿轨进行多项式拟合最后通过坐标转换得到轨道上任意点的调和常数[7]。

此处选取一个轨道上所有观测点的 M2 分潮为例，对其 HsinG、HcosG 沿轨道进行模拟，其模拟的原理与步骤如下所示。

4.2.2. 多项式拟合的原理与步骤

多项式拟合方法是用 1 个多项式去拟合 1 组数据,拟合的结果不会受到内潮波长变化的影响。本文利用多项式拟合方法拟合上述调和分析得出的 S2 分潮调和常数,拟合结果代表正压潮值。通过滤掉正压潮部分来提取 S2 内潮海表面信号。下面解释多项式拟合方法:

通过调和分析,得到某一条轨道上的任一观测点 $P(X,Y)$, (X 和 Y)分别为点 P 的经、纬度)的振幅值 H 和迟角值 G 。首先将 H 、 G 转化为 $HcosG$ 和 $HsinG$, 然后分别对 $HcosG$ 和 $HsinG$, 沿轨进行 n 次多项式拟合 ($n=1、2、3\dots$), 最后通过坐标转换得到 S2 内潮的海表面振幅和迟角。

设拟合多项式为:

$$\hat{f}(y)=a_0+a_1y+a_2y^2+\dots+a_ny^n$$

构造代价函数:

$$J(a_n)=\sum_{k=1}^N[(a_0+a_1y_k+a_2y_k^2+\dots+a_ny_k^n)-A_k \cos G_k]^2, k=1,2,3,\dots,N$$

其中 y_k ($k=1,2,3\dots N$) 代表轨道上观测点的经纬度。分别对 $a_0, a_2, a_3, \dots, a_n$ 求偏导, 并使其为零, 可得:

$$\begin{cases} \sum_{K=1}^N [(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \dots + a_n y_k^n) - H_k \cos G_k] = 0 \\ \sum_{K=1}^N y_k [(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \dots + a_n y_k^n) - H_k \cos G_k] = 0 \\ \sum_{K=1}^N y_k^2 [(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \dots + a_n y_k^n) - H_k \cos G_k] = 0 \\ \dots \\ \sum_{K=1}^N y_k^n [(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \dots + a_n y_k^n) - H_k \cos G_k] = 0 \end{cases}$$

通过求解上述线性方程组可得系数 $a_0, a_2, a_3, \dots, a_n$ 的值，并代入式中得到正压潮值 $\hat{f}(y_k)$ ，记为 $H_k \cos G_k$ 与拟合值 $\hat{f}(y_k)$ 之差为：

$$\tilde{f}(y_k) = H_k \cos G_k - \hat{f}(y_k)$$

\tilde{f}_k 为内潮贡献。同理，对 $A \sin G$ 进行多项式拟合可得：

$$\tilde{g}(y_k) = H_k \sin G_k - \hat{g}(y_k)$$

通过坐标转换可求得内潮海表面振幅 \tilde{H}_k 、迟角 \tilde{G}_k 。根据上述过程，基于 MATLAB 环境下进行编码实现，所使用的 MATLAB 代码见附件。

4.3. 正压潮和内潮分离过程中，最优多项式次数的确定

根据上述研究可知，由 $H \cos G$ 和 $H \sin G$ 多项式拟合所得到的 n 值不一定相等，根据前人研究基础，在这里引入矢量差的概念：

$$\Delta = [(H_a \cos G_a - H_d \cos G_d)^2 + (H_a \sin G_a - H_d \sin G_d)^2]^{\frac{1}{2}}$$

Δ 为上升轨与下降轨在交点处调和常数的矢量差异，下标 a 、 d 分别代表上、下行轨道。矢量差 Δ 的提出完美的解决了 $H \cos G$ 和 $H \sin G$ 多项式拟合所得到的 n 值不统一的问题。

利用上述所说的方法对南海海域调和常数沿轨道进行 3-15 次多项式拟合来提取 M2 内潮海平面信号。

图 4-4 与图 4-5 给出沿不同轨道 3-15 次多项式拟合得出的振幅、迟角的数据。M2 分潮沿某个轨道拟合振幅结果（图 4-4），根据之前所求的 M2 分潮的振幅，对比在多项式次数为 $n=8$ 时明显比其它值 n ，拟合的结果更好一些，即 $n=8$ 的黄色线与 M2 分潮的蓝色点的平均距离更近，基本涵盖了 M2 分潮的振幅趋势线的主体轮廓[7]。

M2 分潮沿某个轨道拟合迟角的结果（图 4-5），对比在多项式次数为 $n=8$ 时明显比其它值 n ，拟合的结果更好一些，即 $n=8$ 的黄色线与 M2 分潮的蓝色点的

平均距离更近，基本涵盖了 M2 分潮的振幅趋势线的主体轮廓。

总的说来以 M2 分潮为例，当 M2 最高阶 $n=8$ 时，对于整个研究区域内的所有不同的分潮均是最高阶 $n=8$ ，反映潮汐调和常数的 Δ 数值最低，即模拟的效果最好。

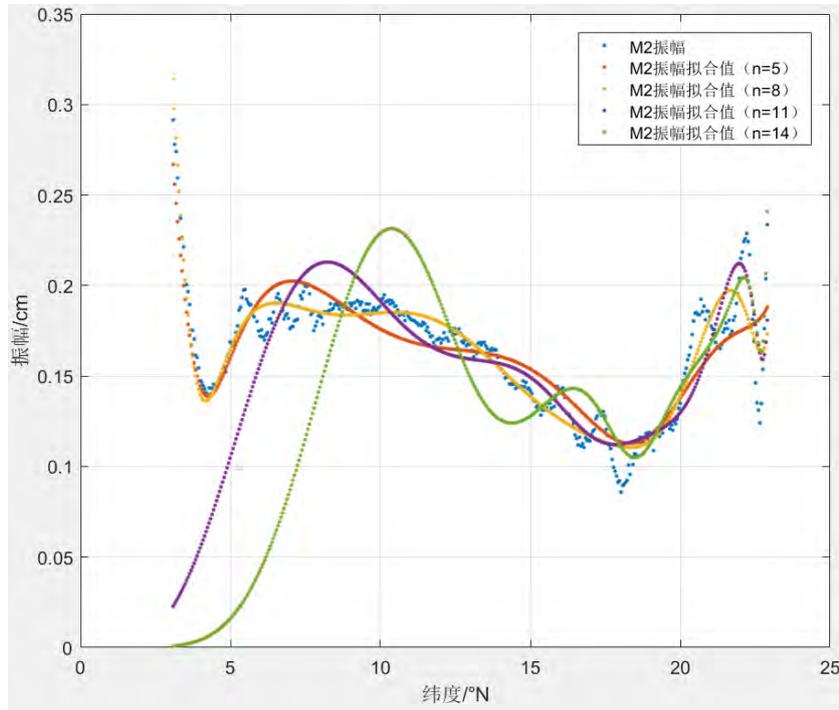


图 4-4 M2 分潮沿某个轨道拟合振幅结果

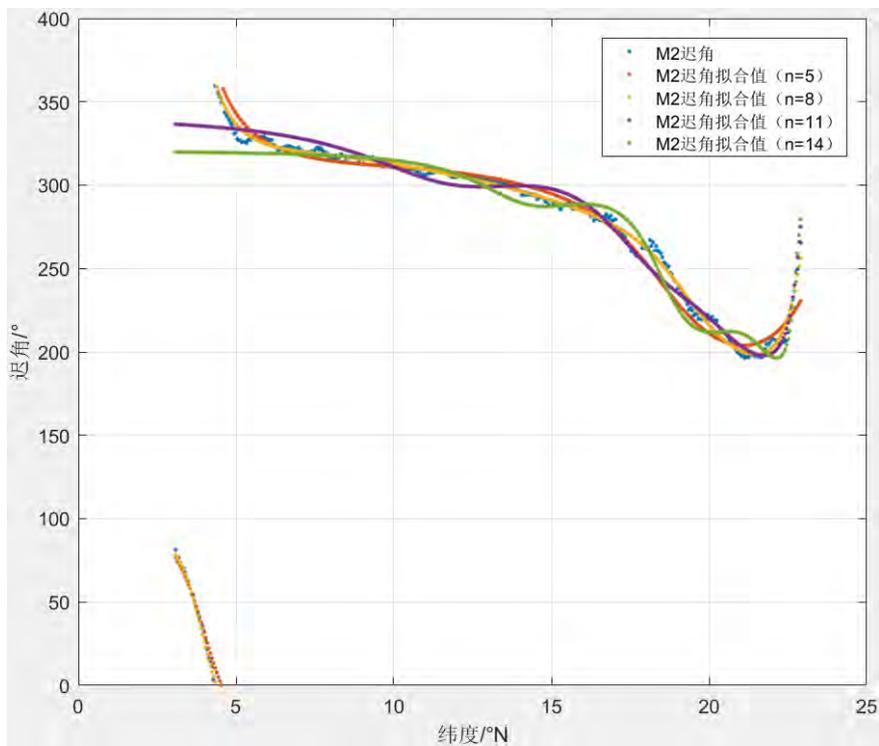


图 4-5 M2 分潮沿某个轨道拟合迟角振幅结果

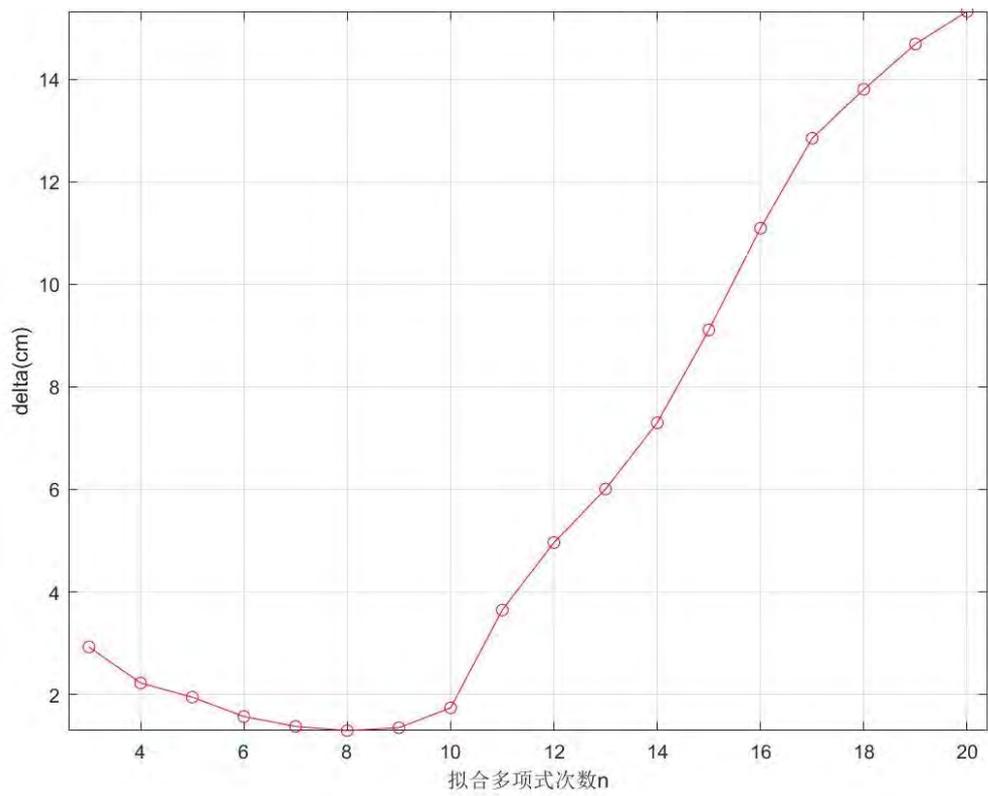


图 4-6 K1 分潮多项式拟合的最高次数与矢量差的关系

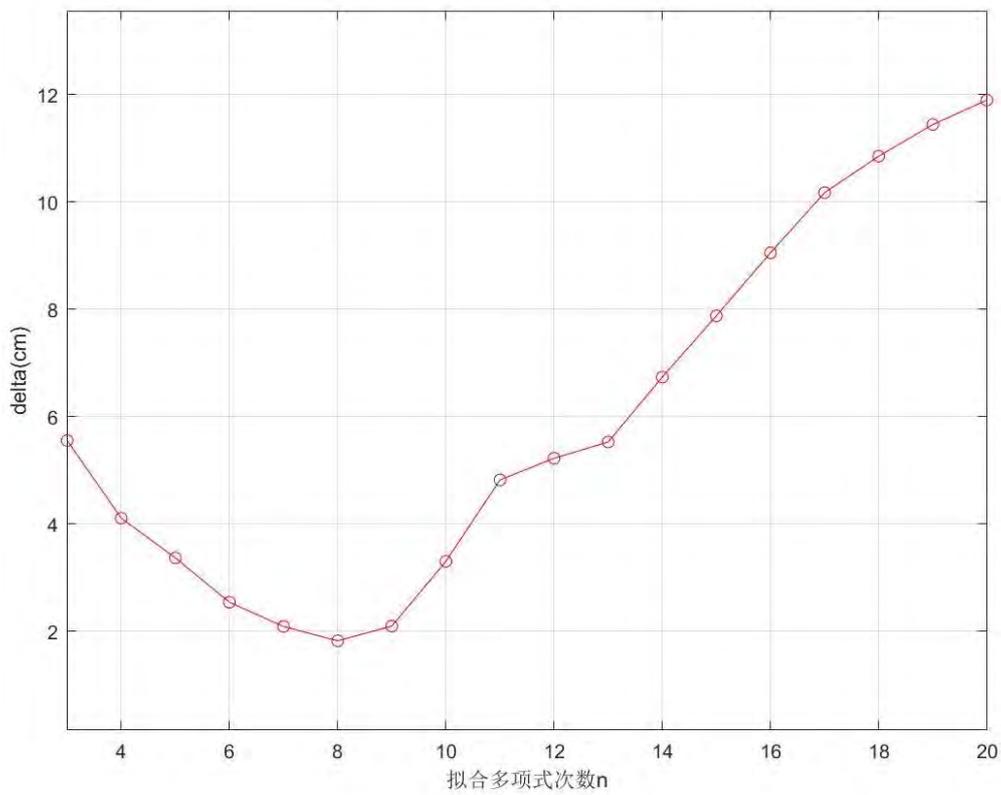


图 4-7 M2 分潮多项式拟合的最高次数与矢量差的关系

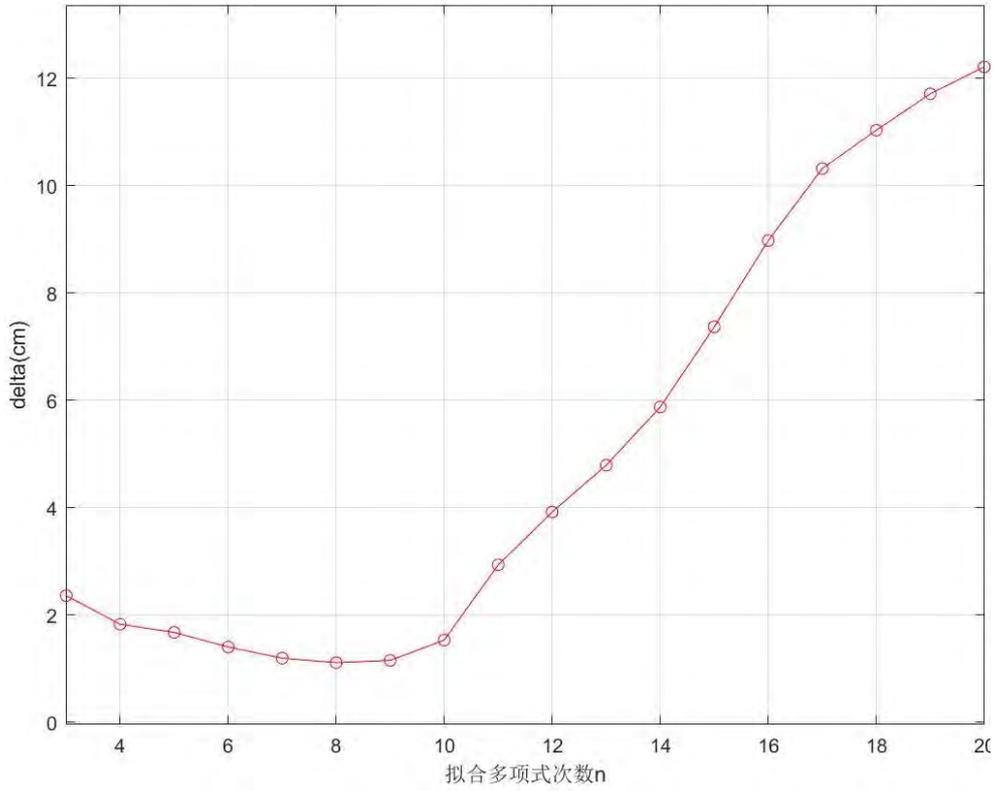


图 4-8 O1 分潮多项式拟合的最高次数与矢量差的关系

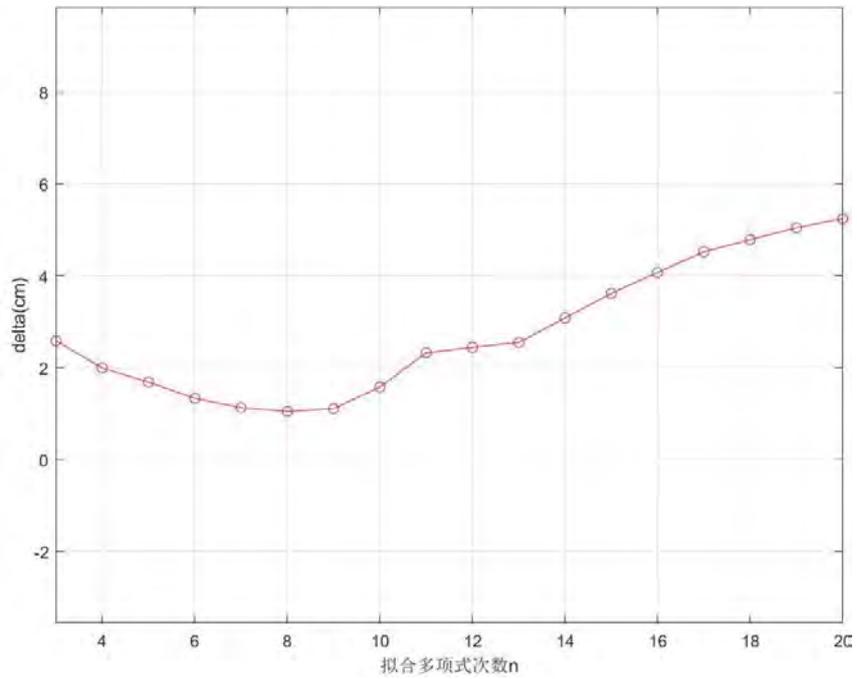


图 4-9 S2 分潮多项式拟合的最高次数与矢量差的关系

4.4. 南海所有轨道上，正压潮与内潮的分离结果及其分析

由上述可知，在对 M2 的潮汐调和常数相关的矢量差 Δ ，在单个轨道上进行多项式模拟求得 $n=8$ 次时其模拟的效果越好，由点到面对于所有主要的潮汐调和常数 M2、S2、K1、O1 在南海海域所有轨道上的多项式模拟结果见下图。

其中图 4-10, 4-11, 4-12, 4-13 分别是南海区域内 20 条轨道上 K1 正压潮振幅图、正压迟角、内压振幅、内压迟角图等。同理可得，另外的三个主要分潮 M2、O1、S2，每个分潮对应四张张图片，其变化规律与 K1 的变化规律相同[9]。

对潮汐调和常数进行多项式拟合、并转化为对矢量差 Δ 的多项式拟合，其构建的代码见附件。并且在此基础上对模拟出来的正压潮与原来卫星轨道上的调和常数之差，即可将正压潮和内潮进行了分离。

K1 分潮

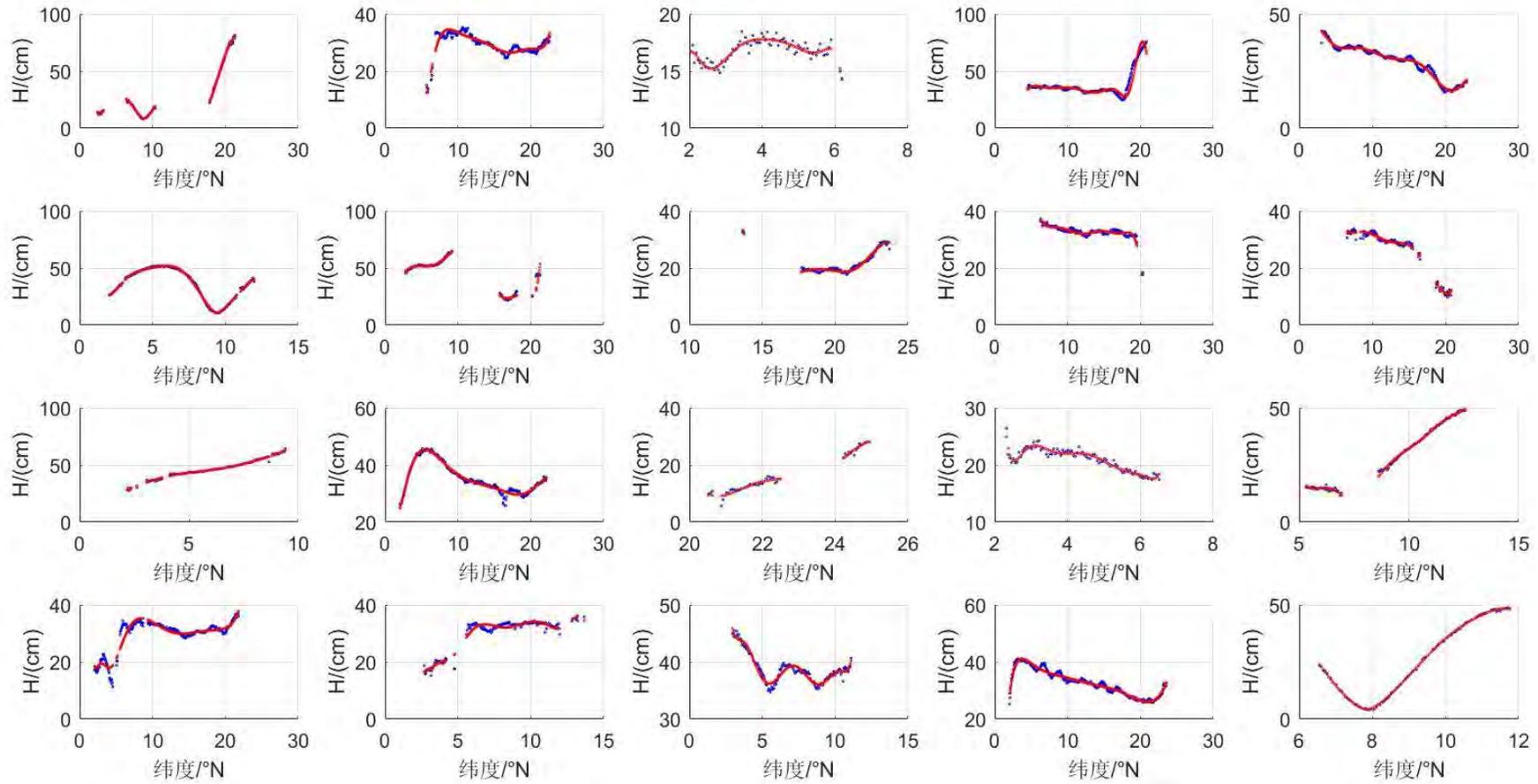


图 4-10 南海区域内 20 条轨道上 K1 正压潮振幅结果图 c (红色的为正压潮)

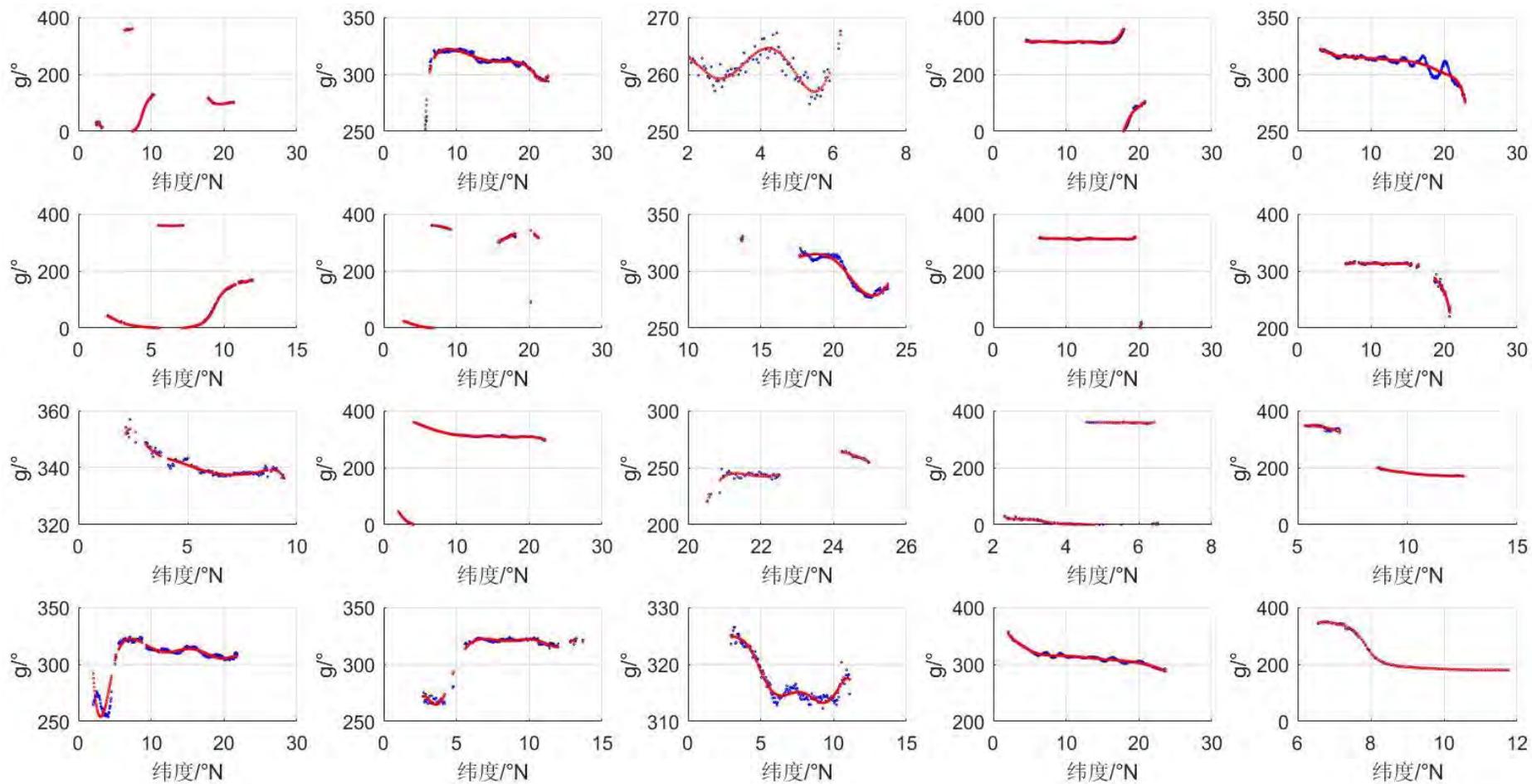


图 4-11 南海区域内 20 条轨道上 K1 正压潮迟角结果图（红色的为正压潮）

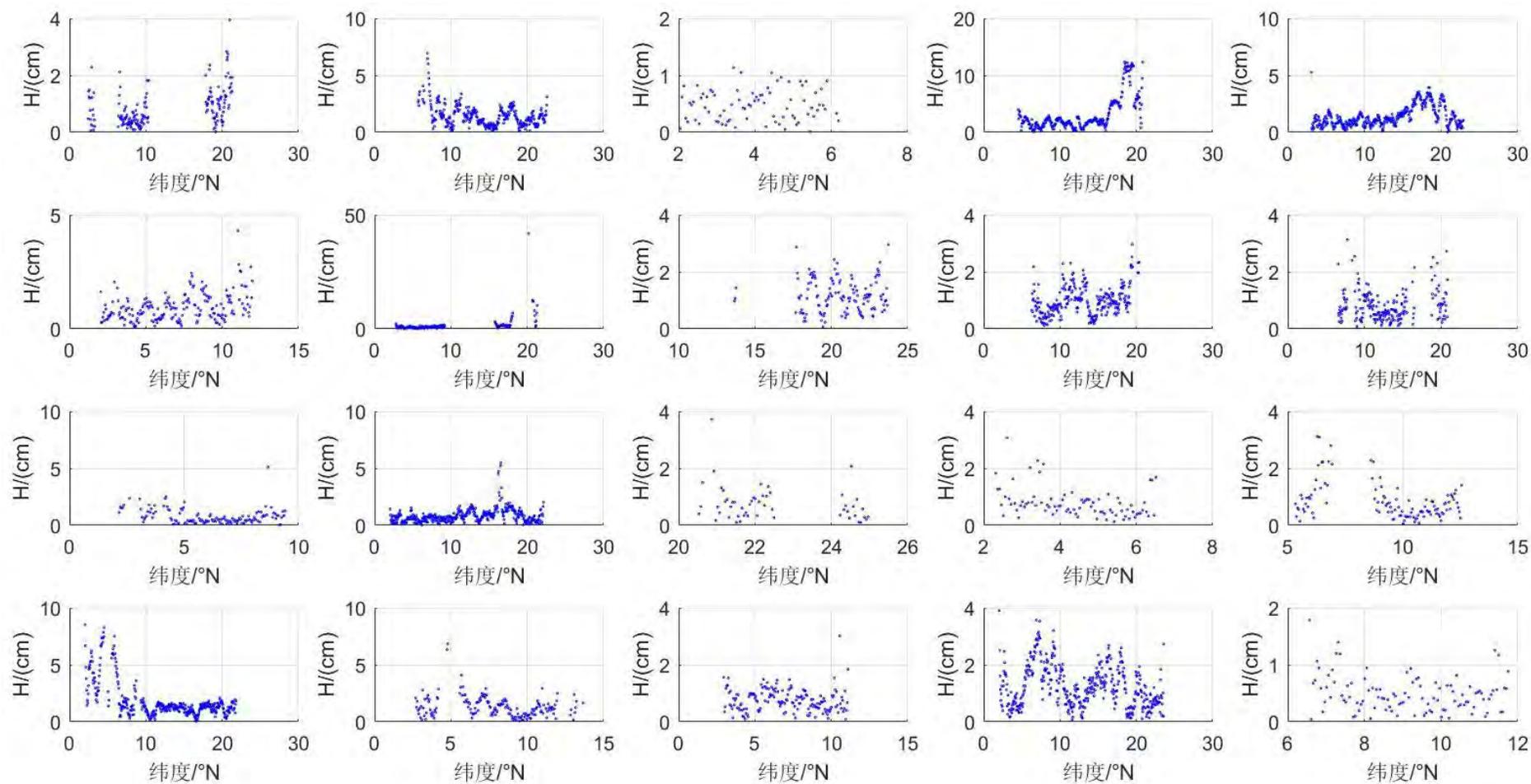


图 4-12 南海区域内 20 条轨道上 K1 内潮振幅结果图

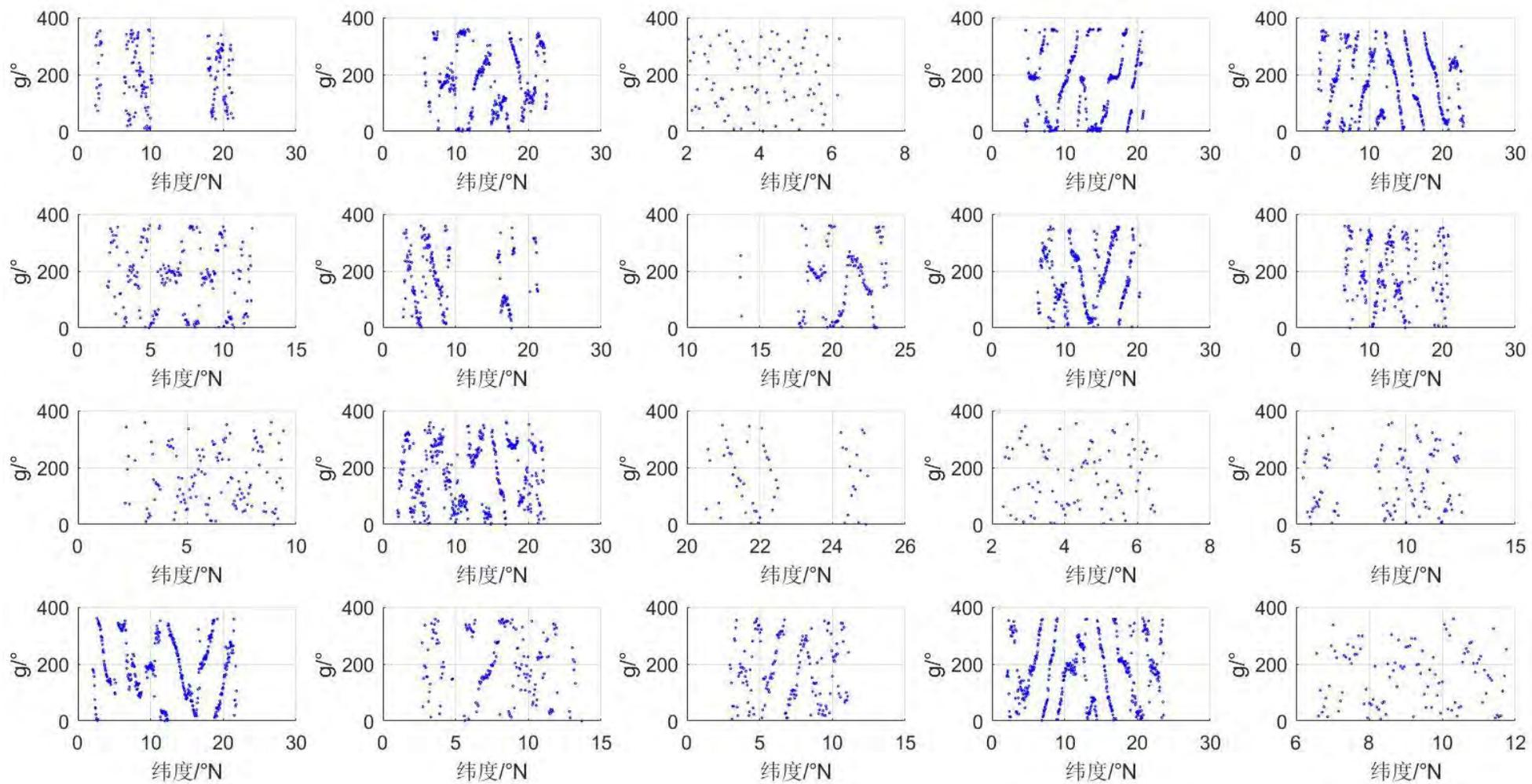


图 4-13 南海区域内 20 条轨道上 K1 内潮迟角结果图

M2 分潮

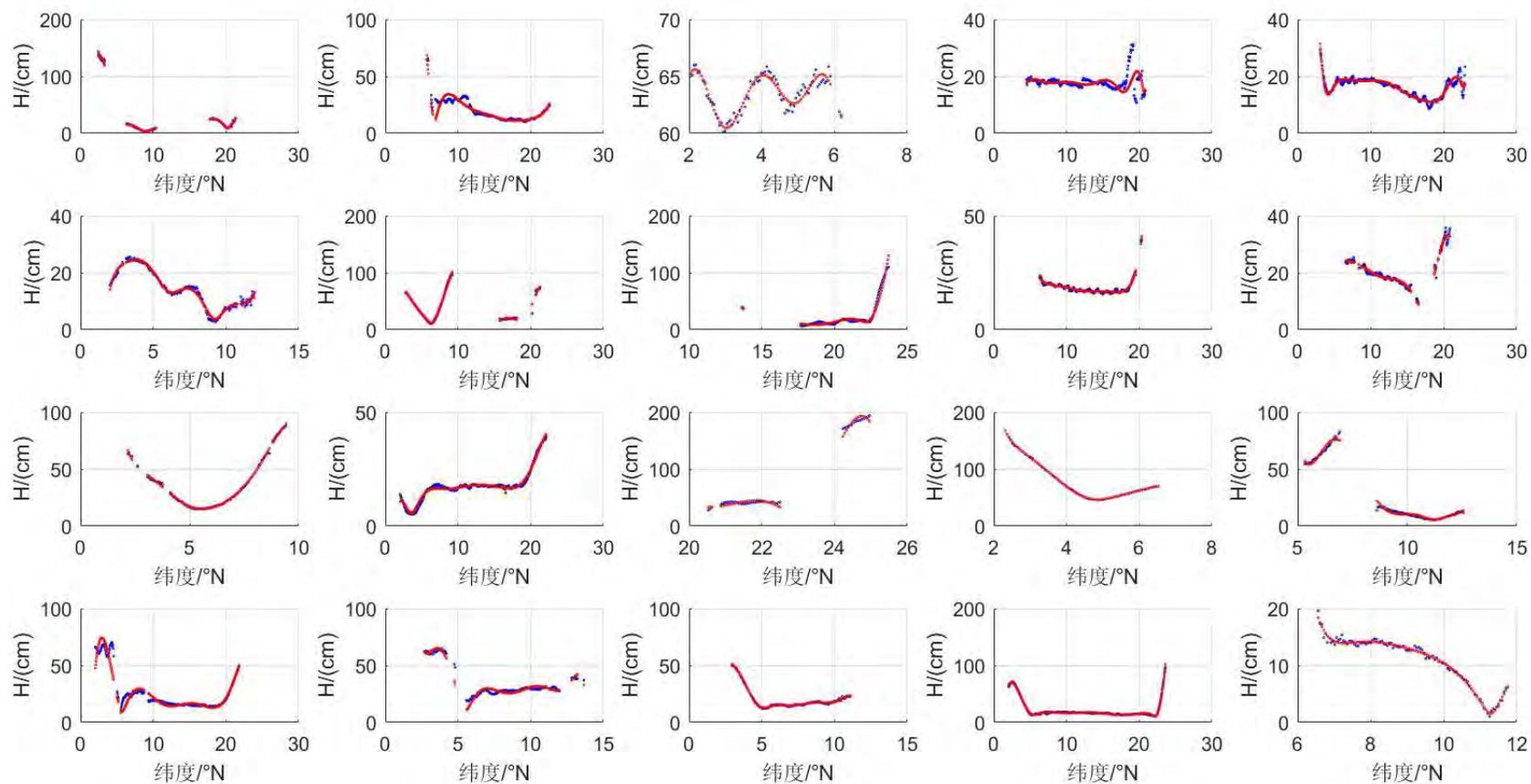


图 4-14 南海区域内 20 条轨道上 M2 正压潮振幅结果图（红色的为正压潮）

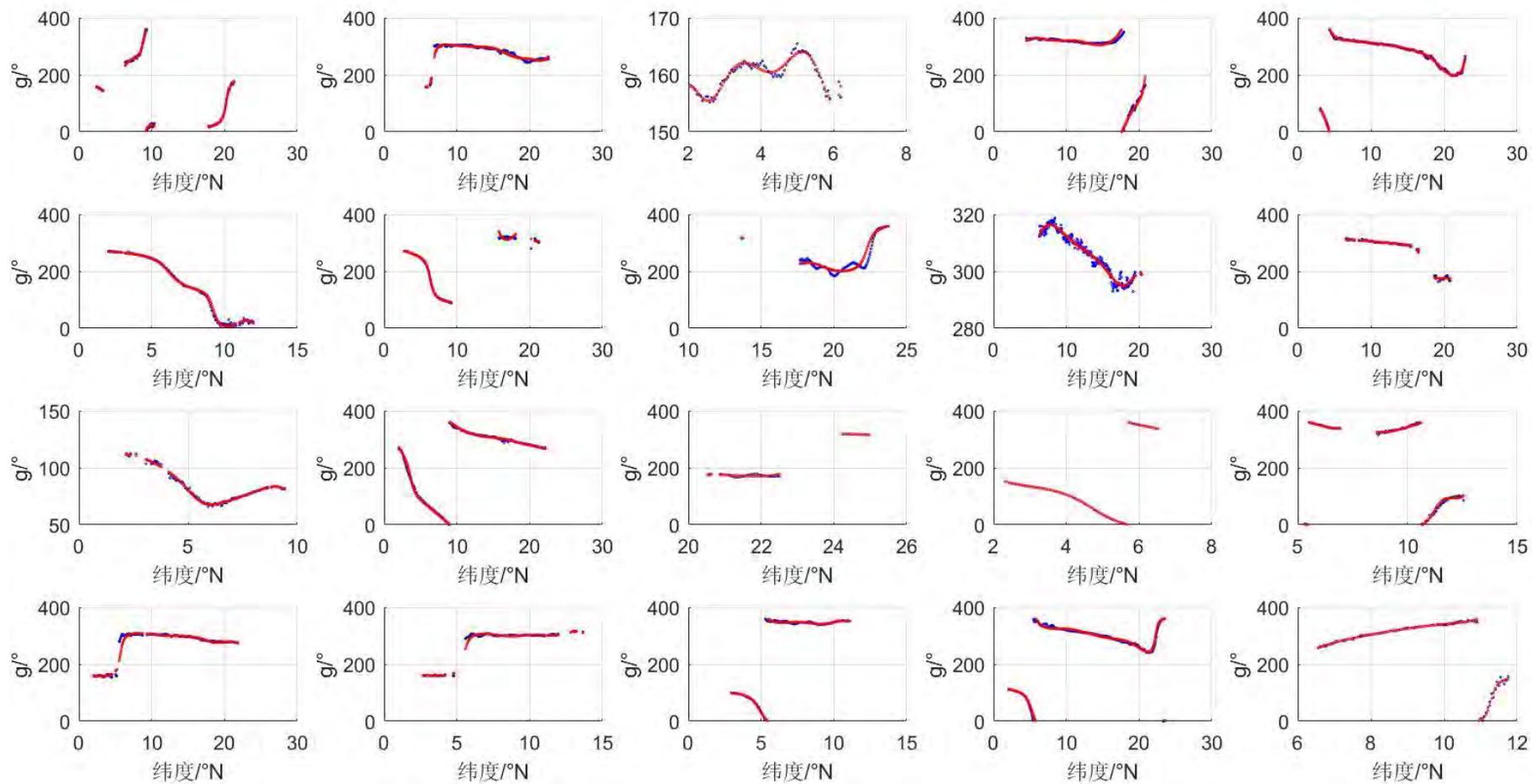


图 4-15 南海区域内 20 条轨道上 M2 正压潮迟角结果图

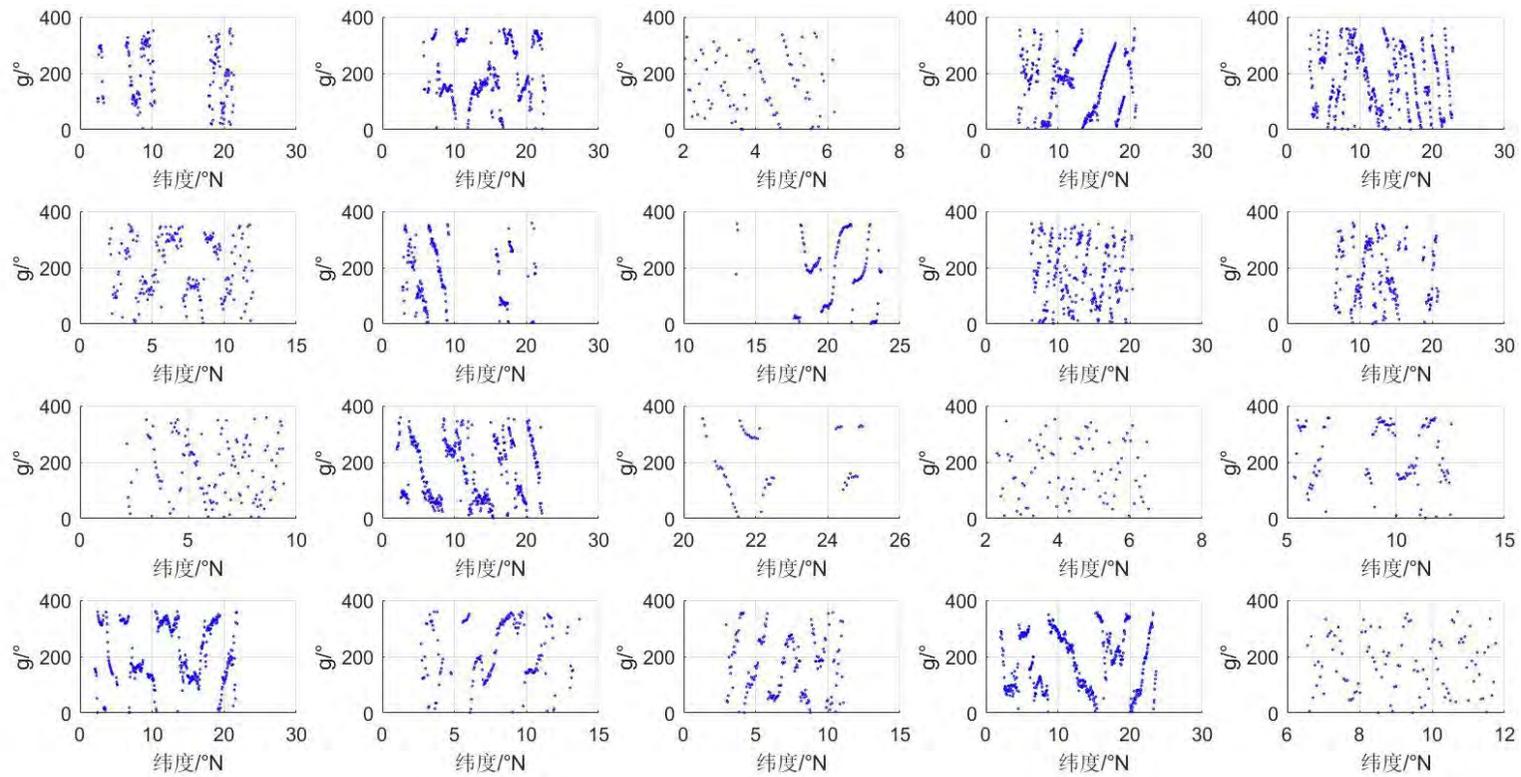


图 4-16 南海区域内 20 条轨道上 M2 正压潮振幅结果图

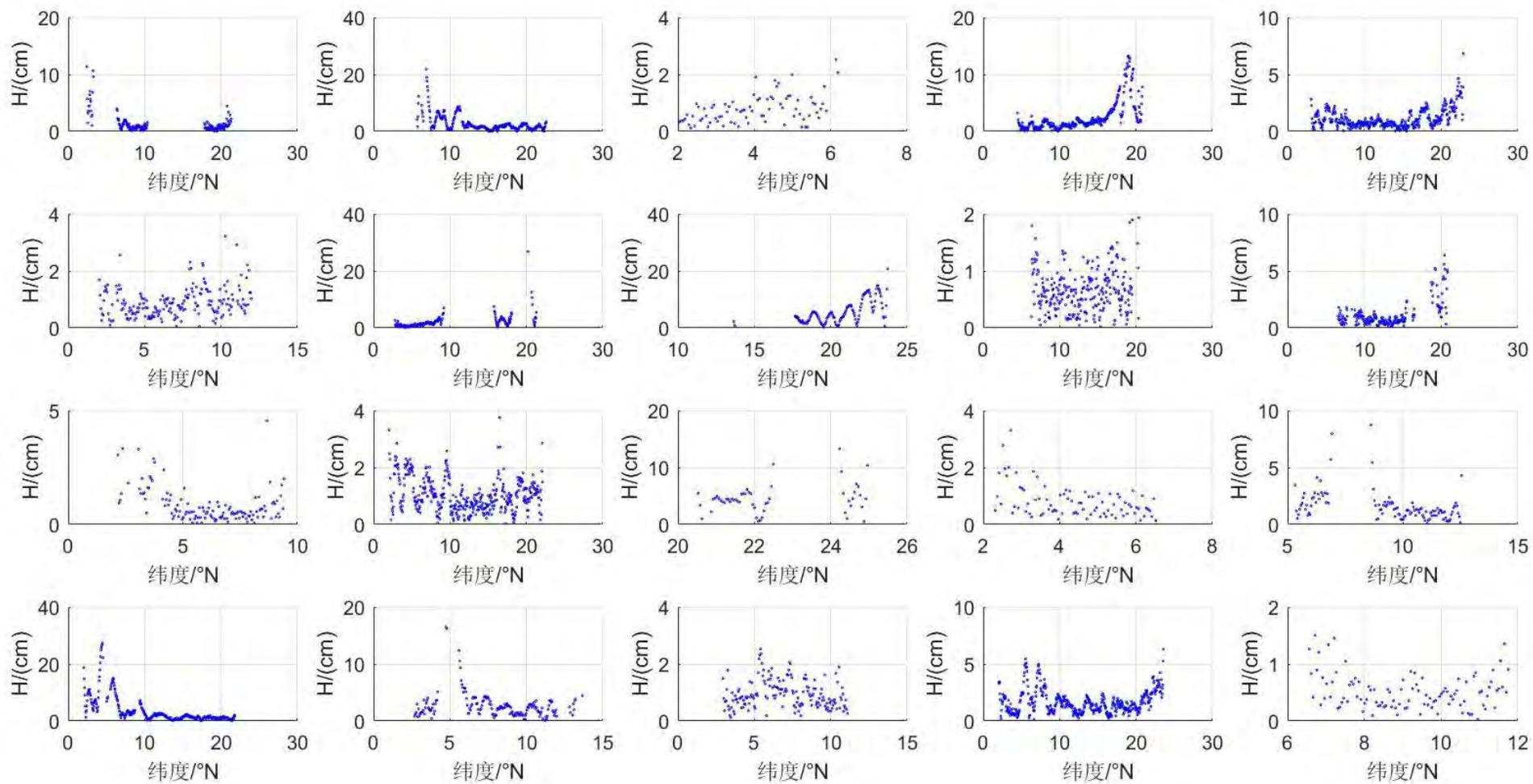


图 4-17 南海区域内 20 条轨道上 M2 内潮振幅结果图

O1 分潮

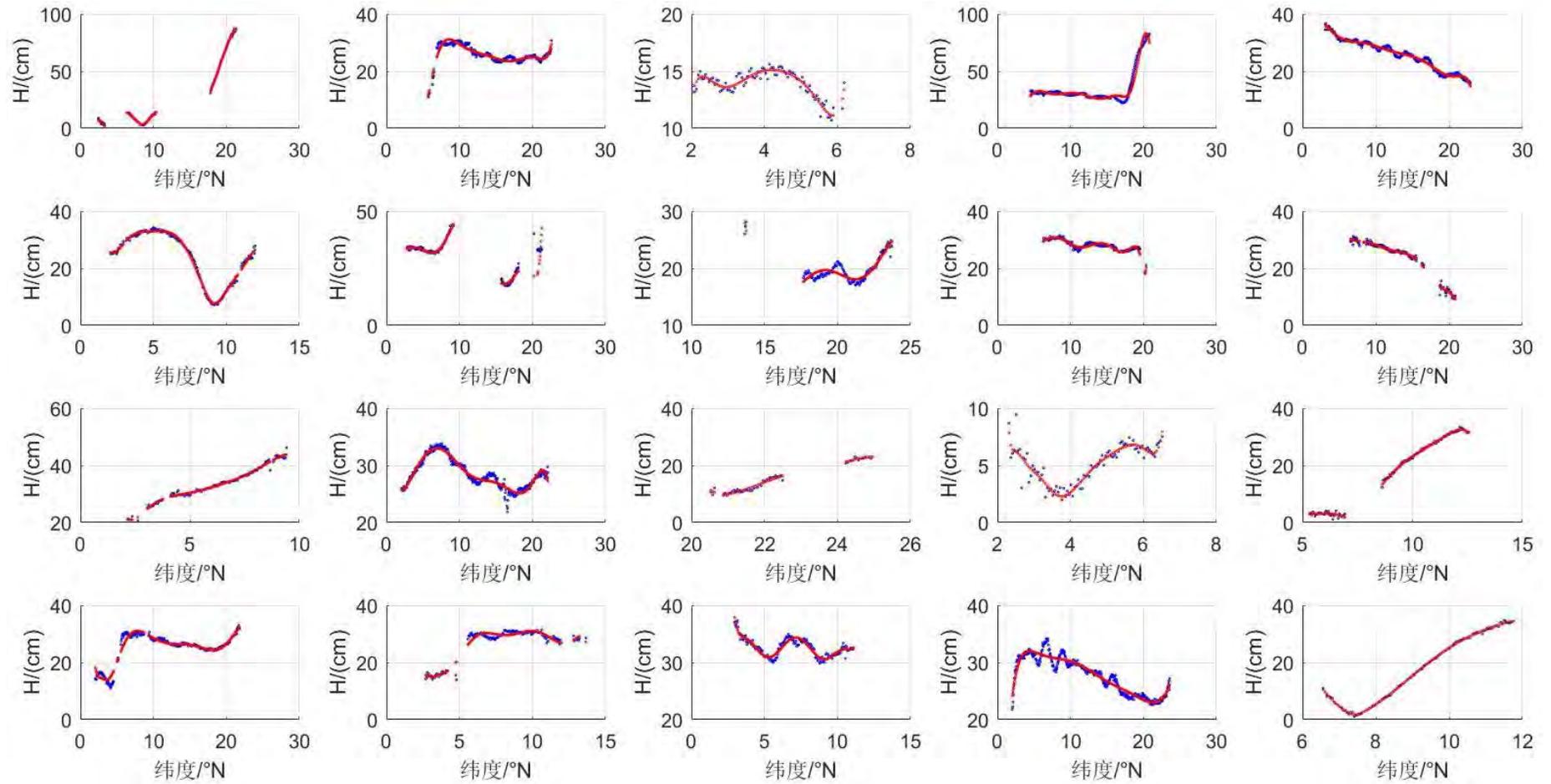


图 4-18 南海区域内 20 条轨道上 M2 正压潮振幅结果图（红色的为正压潮）

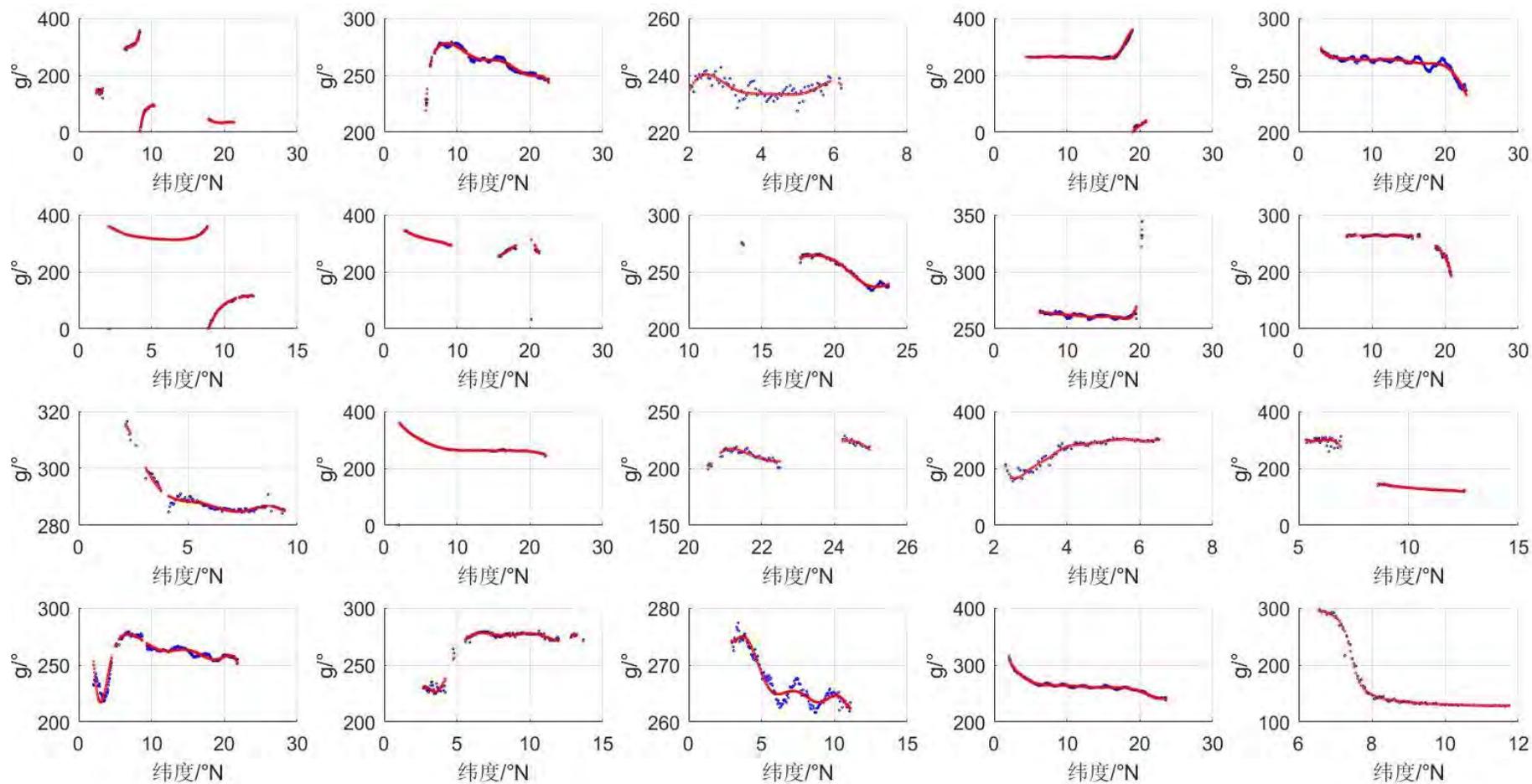


图 4-19 南海区域内 20 条轨道上 O1 正压潮迟角结果图（红色的为正压潮）

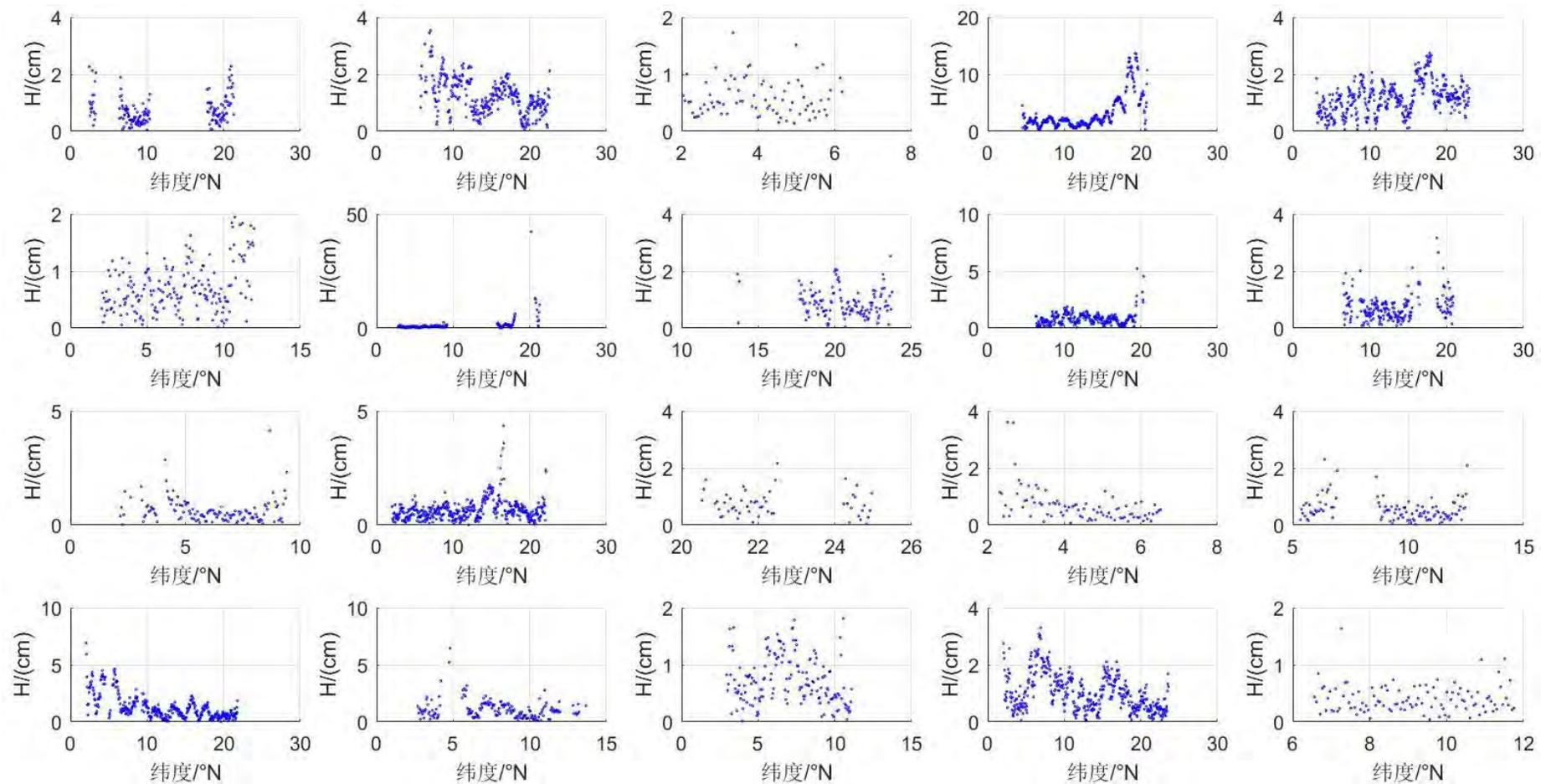


图 4-20 南海区域内 20 条轨道上 O1 内潮振幅结果图

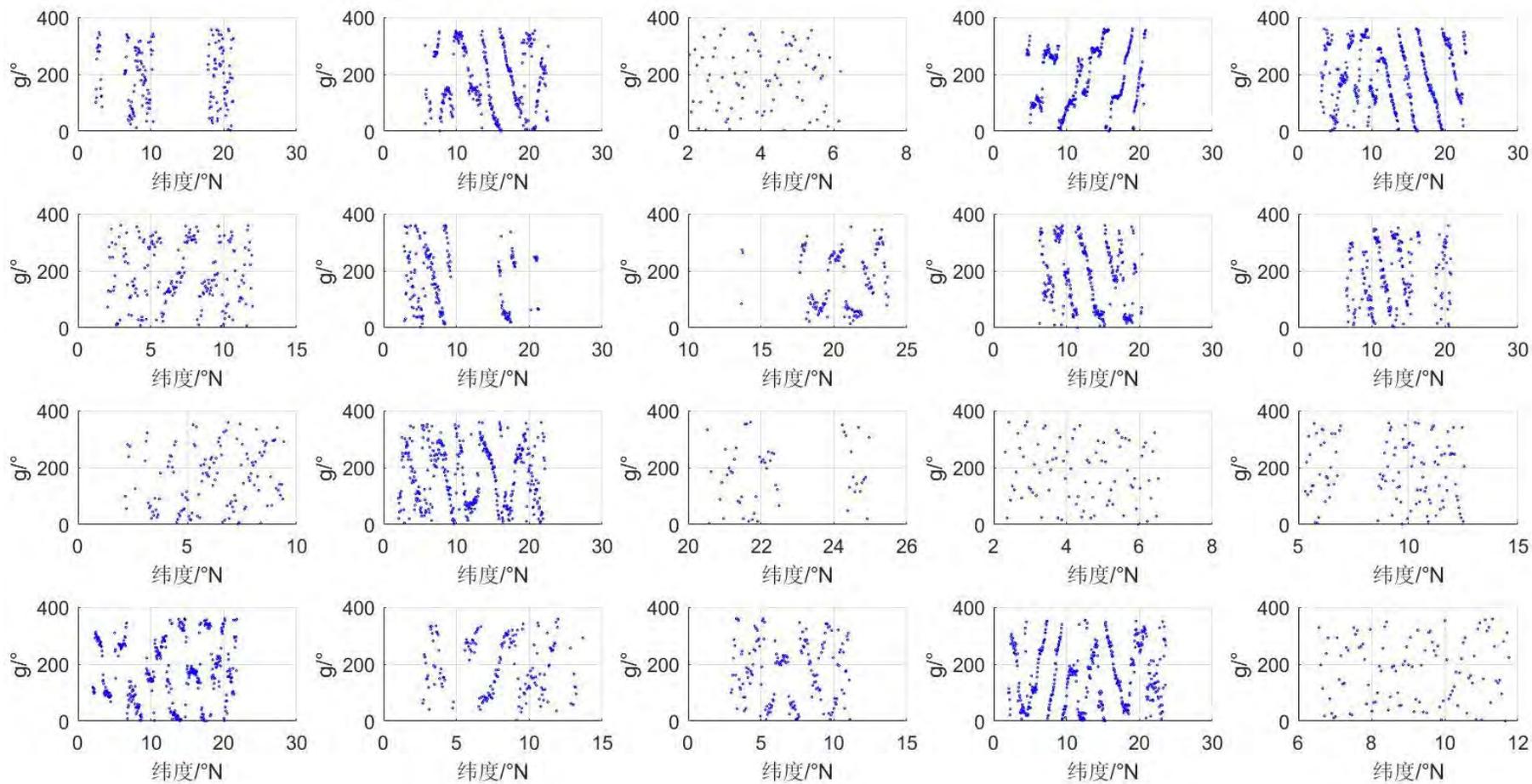


图 4-21 南海区域内 20 条轨道上 O1 内潮迟角结果图

S2 分潮

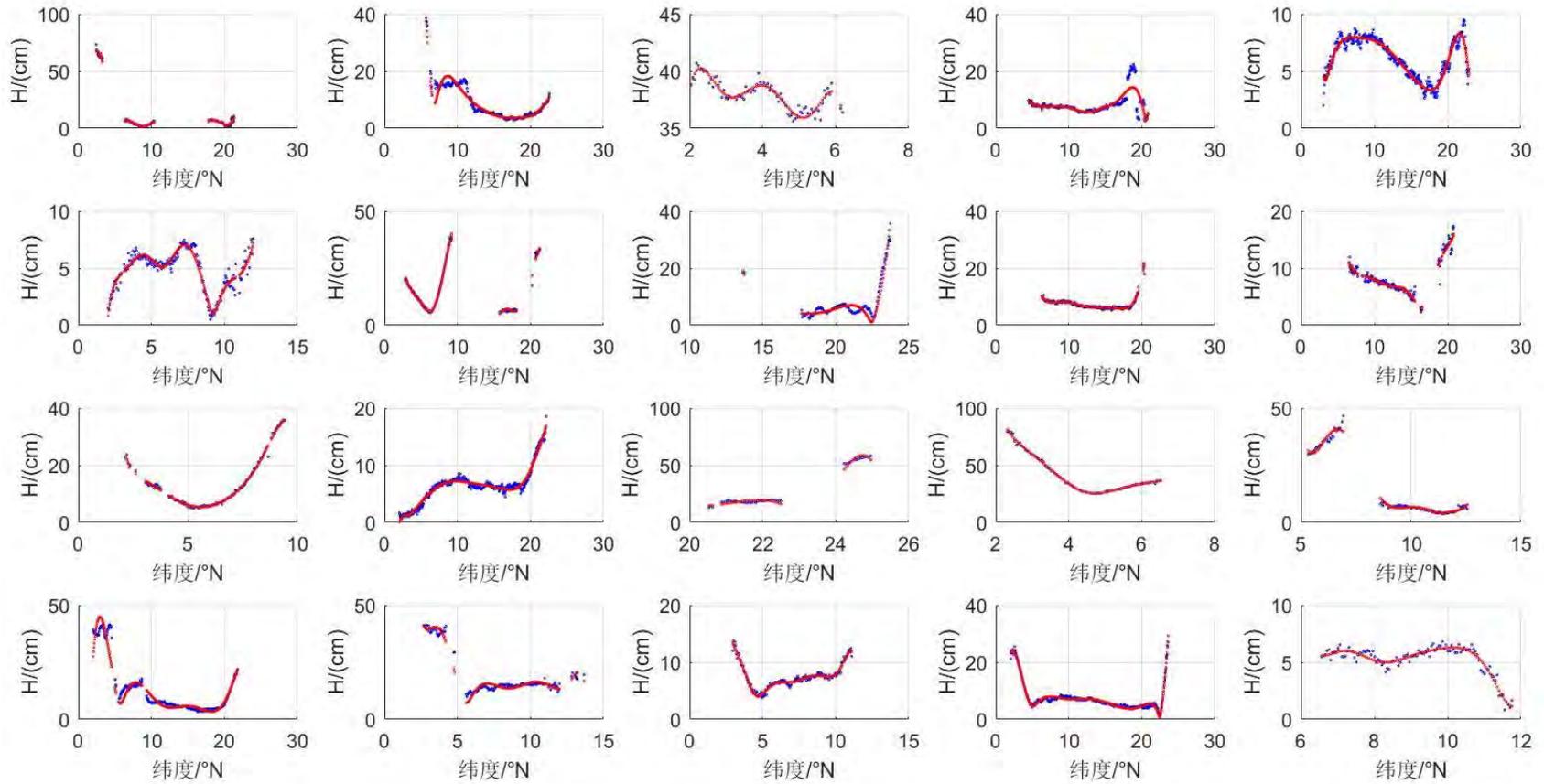


图 4-22 南海区域内 20 条轨道上 S2 内潮振幅结果图(红色为正压潮)

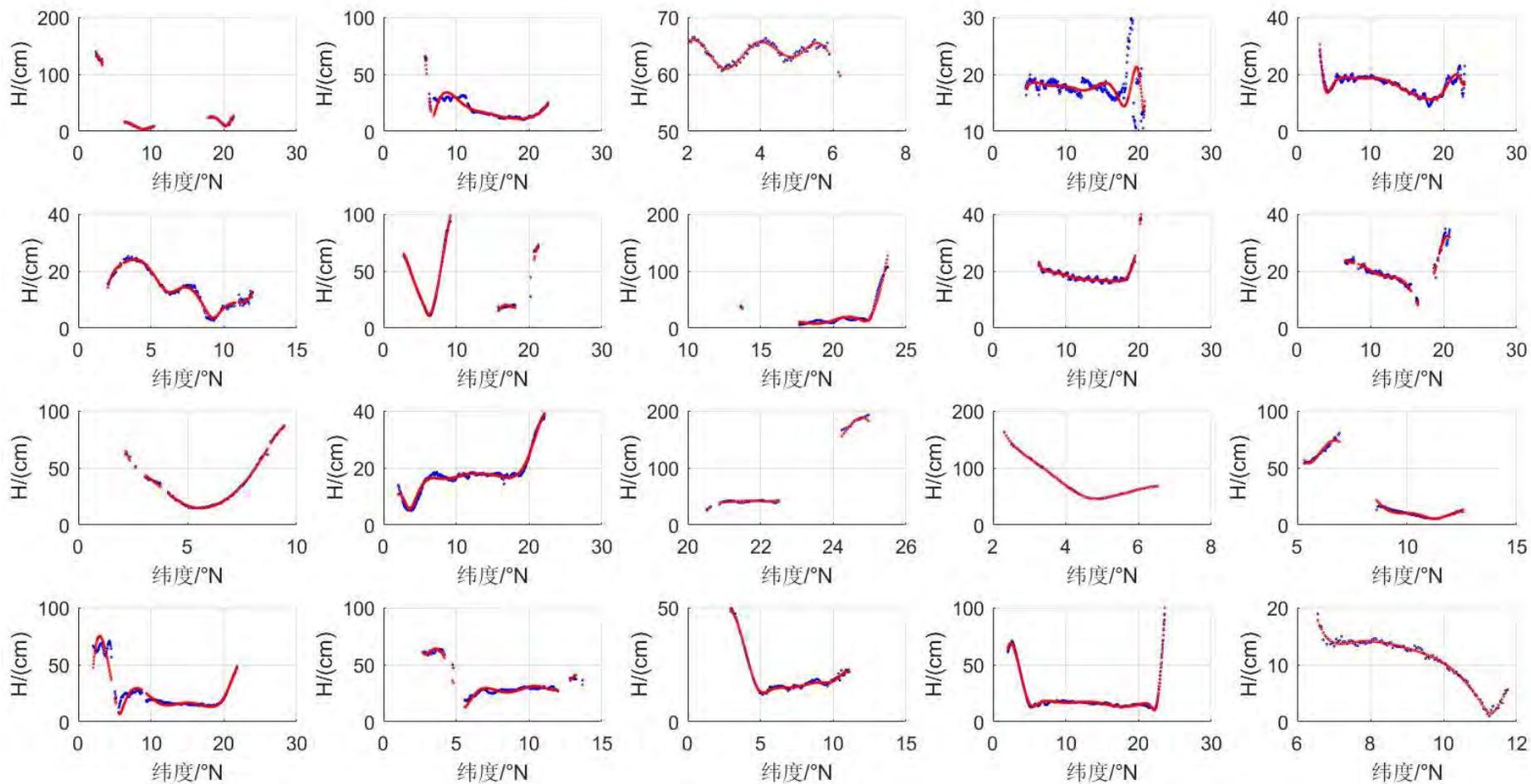


图 4-23 南海区域内 20 条轨道上 S2 内潮振幅结果图(红色为正压潮)

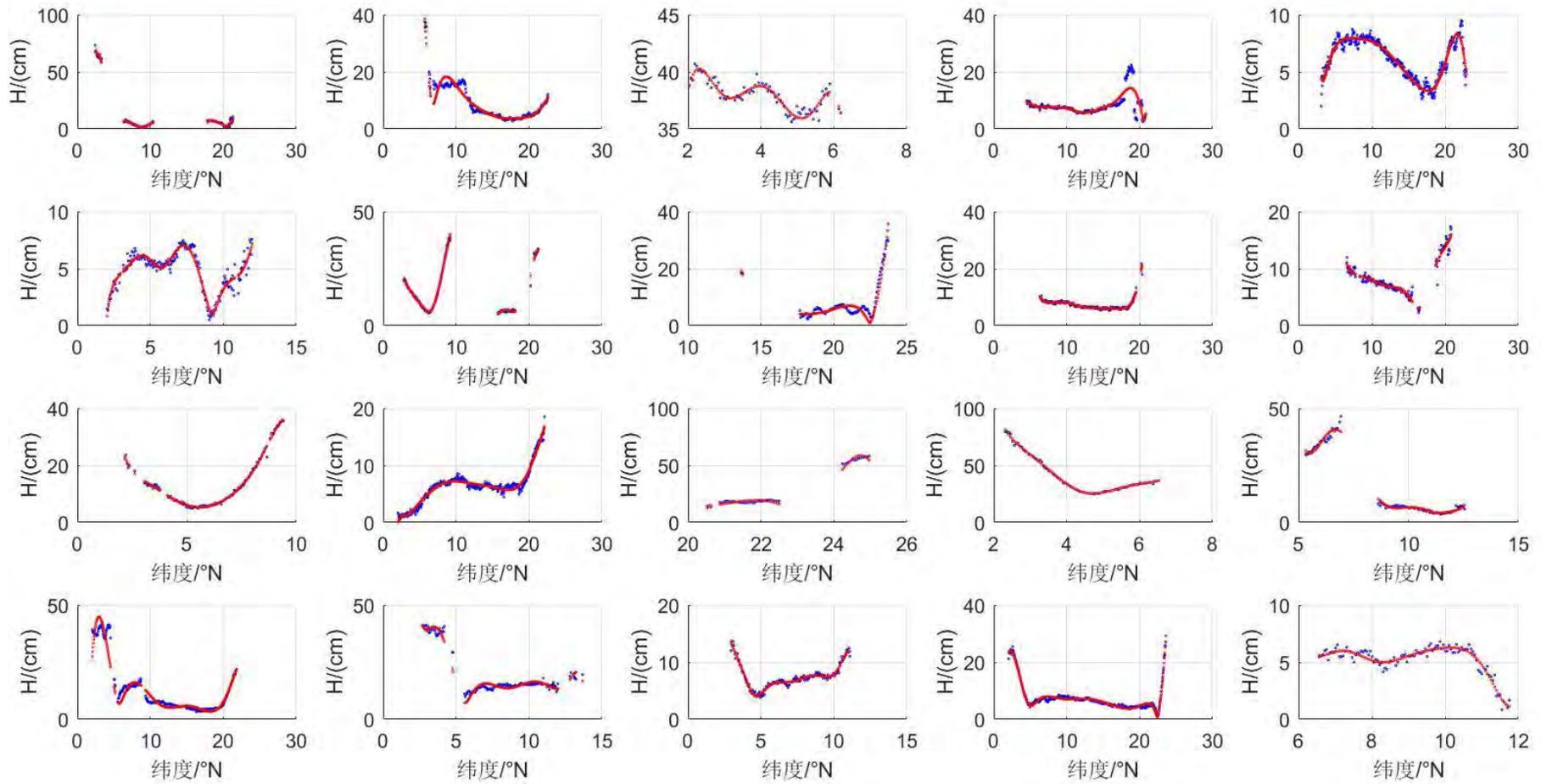


图 4-24 南海区域内 20 条轨道上 S2 内潮振幅结果图(红色为正压潮)

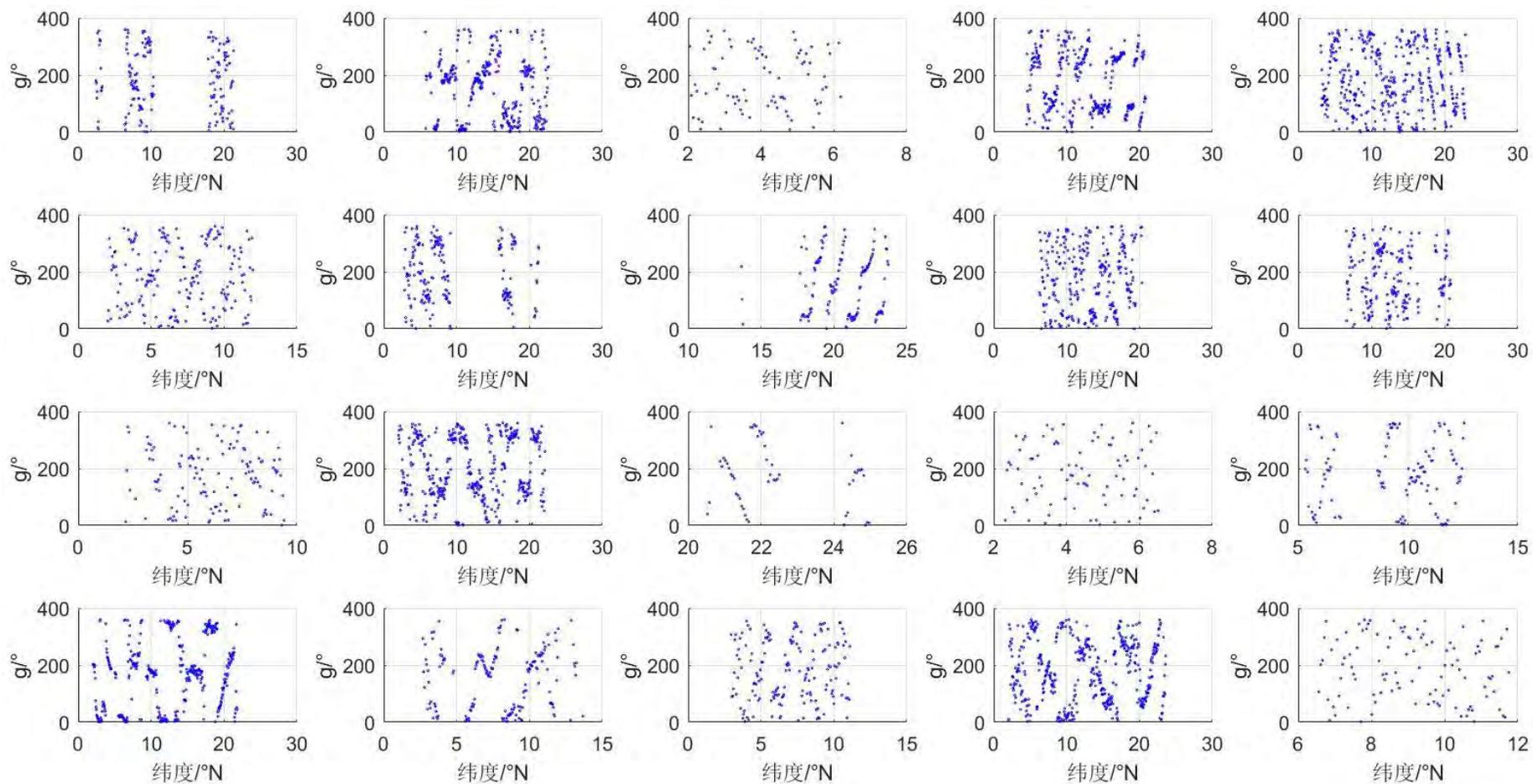


图 4-25 南海区域内 20 条轨道上 S2 内潮迟角结果图

5. 问题三的求解

问题三要求得出南海的各主要分潮的同潮图, 首先就要求出南海区域内任意点的各主要分潮的潮汐调和常数, 根据区域内已知的潮汐调和常数, 采取怎样的方法获得整个平面内任意点的潮汐调和常数是值得商榷与评估的。本文是在问题二的数据基础之上进行的, 初步以三种方法进行计算: 数据插值法、二维平面内的多项式拟合法、海洋潮位数据同化法。

5.1. 数据插值法

数据插值法需要选取原始数据样本, 选取的样本数据质量直接影响到差值的结果。本文在数据插值法中初步利用应用: 一是依据问题一所分析出来的 4309 个离散位置的潮汐调和常数进行差值处理得到整个平面研究区域内的潮汐调和常数数值; 二是根据问题二中多项式拟合所得到的所有轨道上任意点处的潮汐调和常数进行差值处理得到整个平面研究区域内的潮汐调和常数数值。

再依据验潮站观测数据所得的潮汐调和常数分别与两种插值方法所得的验潮站处的潮汐调和常数最对比并分析其结果。

5.1.1 三角网格差值算法

我们获得符合条件的 4309 个点, 构造不规则三角网, 具体方法为:

- 1、构造一个超级三角形, 包含所有散点, 放入三角形链表。
- 2、将点集中的散点依次插入, 在三角形链表中找出外接圆包含插入点的三角形 (称为该点的影响三角形), 删除影响三角形的公共边, 将插入点同影响三角形的全部顶点连接起来, 完成一个点在 Delaunay 三角形链表中的插入。
- 3、根据优化准则对局部新形成的三角形优化。将形成的三角形放入 Delaunay 三角形链表。
- 4、循环执行上述第 2 步, 直到所有散点插入完毕。

然后通过 MATLAB 函数 `griddata` 中的 'cubic' 方法: 以三角形为基础的三次方程内插, 即三角形为基础, 就是通过 Delaunay 三角形链表。先找出内插点四周的 3 个点, 构成三角形, 内插点在三角形内。然后线性内插, 或三次方程内插。将调和常数的值赋给我们划分为长宽为 5 分度的网格点上[11]。

5.1.2 编程实现与结果

这种方法常用于构建山体模型中, 现用于海洋数值模拟。

基于 MATLAB 编译环境代码见附录 3, 实现效果如下: K1、O1、S2、M2 四个分潮的同潮图如下图所示。

基于 MATLAB 编译环境下运用三角网格差值算法, 直接引用 `griddata` 函数进行插值拟合, 得到如图的结果, 并没有达到预期的效果; 所以下面将探索另一种方法进行模拟。

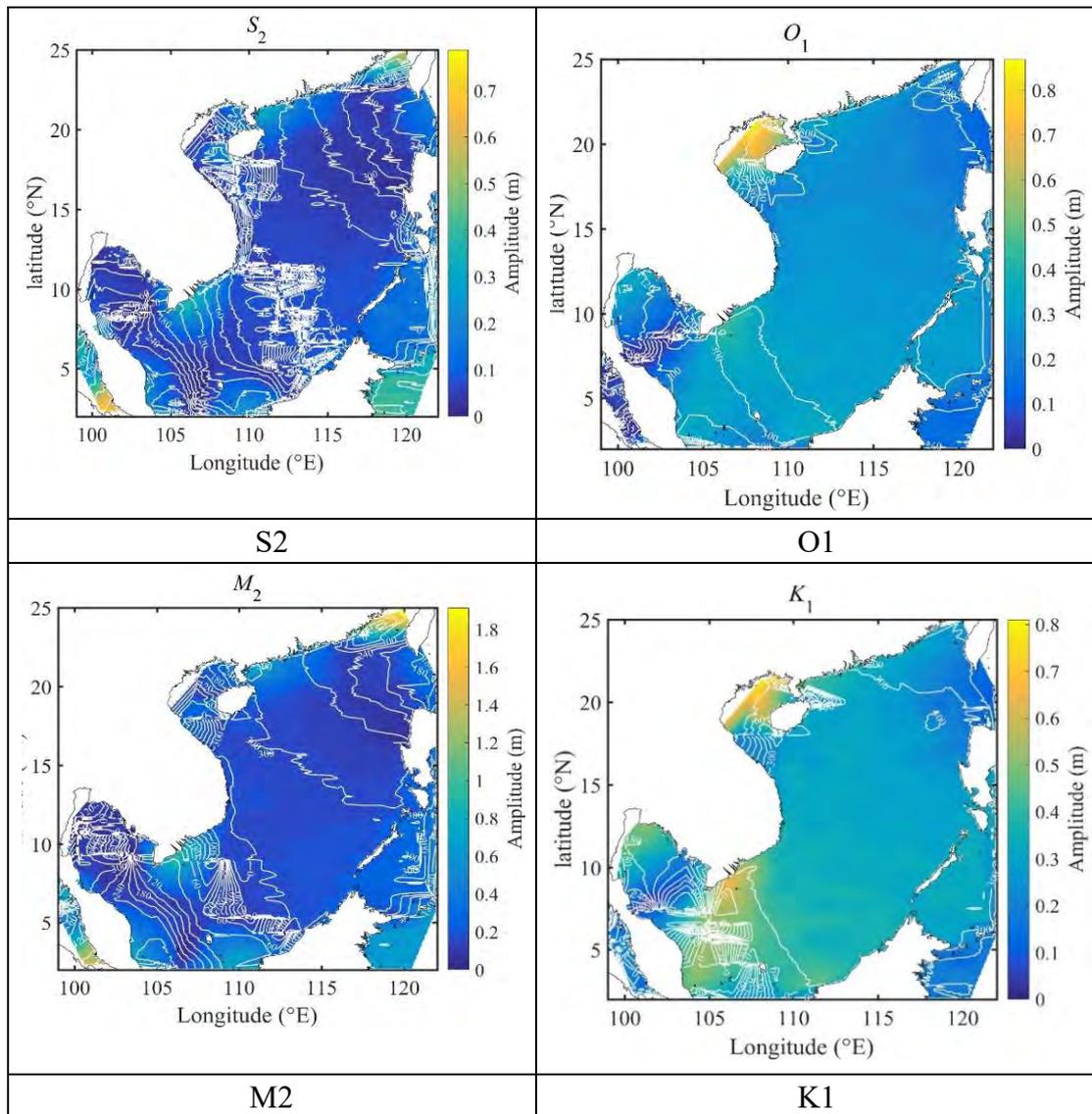


图 5-1 S2、M2、O1、K1 四个分潮的同潮图

5.2. 车贝雪夫多项式拟合法

5.2.1. 车贝雪夫多项式拟合法原理介绍

选用车贝雪夫多项式拟合法。气象上广泛应用的车贝雪夫多项式，称之为“离散点上的平方内插函数，常称为车贝雪夫多项式。这里仅介绍气象上广泛运用的，定义在等距离离散点上的车贝雪夫多项式[10]。

设在X轴上的点 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 成等距分布，即是

$$x_{i+1} = x_i + d$$

其中 d 为定值。

不失一般性，取 $x_1 = 1$ ， $d = 1$ ，则有

$$x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n'$$

简记为：

$$x = 1, 2, \dots, n$$

由 Earponb 导出的定义在这样的 n 个离散点上车贝雪夫多项式为

$$\Phi_0(x) \Phi_1(x) = x - P_{1,0} \Phi_0(x);$$

$$\Phi_2(x) = x^2 - P_{2,0} \Phi_0(x) - P_{2,1} \Phi_1(x);$$

$$\Phi_k(x) = x^k - P_{k,0} \Phi_0(x) - P_{k,1} \Phi_1(x) - \dots - P_{k,k-1} \Phi_{k-1}(x);$$

其中: K 称为阶数, $k=0,1, \dots, n-1$; $\Phi_k(x)$ 为 k 阶多项式在点 x 上的值; $P_{k, j}$

为 k 阶多项式的第 j 项的系数 $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$; 令 $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \dots, \Phi_k(x)$ 满足约束条件:

$$\sum_{x=1}^n \Phi_i(x) \Phi_j(x) = 0; \quad i \neq j;$$

由此可以确定系数 $P_{k, j}$. 多项式存在着如下的递推关系[12]:

$$\Phi_0(x) = 1;$$

$$\Phi_1(x) = x - \frac{1}{2} (n+1);$$

$$\Phi_{k+1}(x) = \Phi_1(x) \Phi_k(x) - \frac{k^2(n^2-k^2)}{4(4k^2-1)} \Phi_{k-1}(x);$$

这就是常见的基于等距离离散点上的车贝雪夫多项式的递推算式。两个一维车贝雪夫多项式的乘积定义为二位车贝雪夫多项式。在 x, y 方向上各取等距离散点的矩形网格场中, 二维贝雪夫多项式多项式可以以表达为:

$$(x=0, 1, 2, \dots, n; y=1, 2, \dots, m; k=0, 1, \dots, n-1; s=0, 1, 2, \dots, m-1)$$

$$\sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^m \Phi_k(x) \Psi_s(y) \bullet \Phi_i(x) \Psi_j(x)$$

$$= \sum_{y=1}^m \Psi_s(s) \Psi_j(y) \sum_{x=1}^n \Psi_k(x) \Psi_i(x);$$

据 (1.2) 式可知, 当 $k \neq i$ 或 $s \neq j$ 时, 必有二维车贝雪夫在矩形等距网格

点 (x, y) 上是有定义的, 即存在实数

$$F(1,1), F(1,2), \dots, F(1,n), F(2,2), \dots, F(2,n), \dots, F(m,1), F(m,2), \dots, F(m,n);$$

取二维多项式 $\Phi_k(x) \Psi_s(y)$ 的线性组合值

$$\hat{F}_{k_0, s_0}(x, y) = \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{s=0}^{s_0} A_{k,s} \Phi_k(x) \Psi_s(y);$$

$$(x=1, 2, \dots, n; y=1, 2, \dots, m)$$

作为对应点上的函数值 $F(x, y)$ 的逼近值。这里

$k_0 \leq n-1$ ，为一维多项式 $\Phi_k(x)$ 的最大取用阶数（或称为 $\Phi_k(x)\Psi_s(y)$ 在 x 方向上的最大取用阶数）；

$s_0 \leq m-1$ ，为一位多项式 $\Psi_s(y)$ 的最大取用阶数（或称为 $\Phi_k(x)\Psi_s(y)$ 在 y 方向上的最大取用阶数）；

$A_{k,s}$ 通常称为“二维车贝雪夫多项式的‘ $k \times s$ ’阶展开系数”，简称“ $k \times s$ 阶展开系数”。 $A_{k,s}$ 亦可根据“最小二乘法”原理求取。

5.2.2. 编程实现与结果

根据上述车贝雪夫多项式原理介绍，其在气象学中应用较为广泛，此次创新性的运用于海洋数值模拟中，解决二维平面差值问题。

基于 matlab 编译环境代码见附录

实现效果结果如下：

表 5-1，,M2 分潮中列的是 TP 所有点处拟合值和提取值的矢量差的平均值从中可以看出， x 方向取 4 次车贝雪夫多项式， y 方向取 4 次，结果最好；

表 5-2，,S2 分潮中表中列的是 TP 所有点处拟合值和提取值的矢量差的平均值从中可以看出， x 方向取 4 次车贝雪夫多项式， y 方向取 4 次，结果最好；

表 5-3，,K1 分潮中列的是 TP 所有点处拟合值和提取值的矢量差的平均值从中可以看出， x 方向取 4 次车贝雪夫多项式， y 方向取 3 次，结果最好；

表 5-4，,O1 分潮中列的是 TP 所有点处拟合值和提取值的矢量差的平均值从中可以看出， x 方向取 3 次车贝雪夫多项式， y 方向取 3，结果最好。

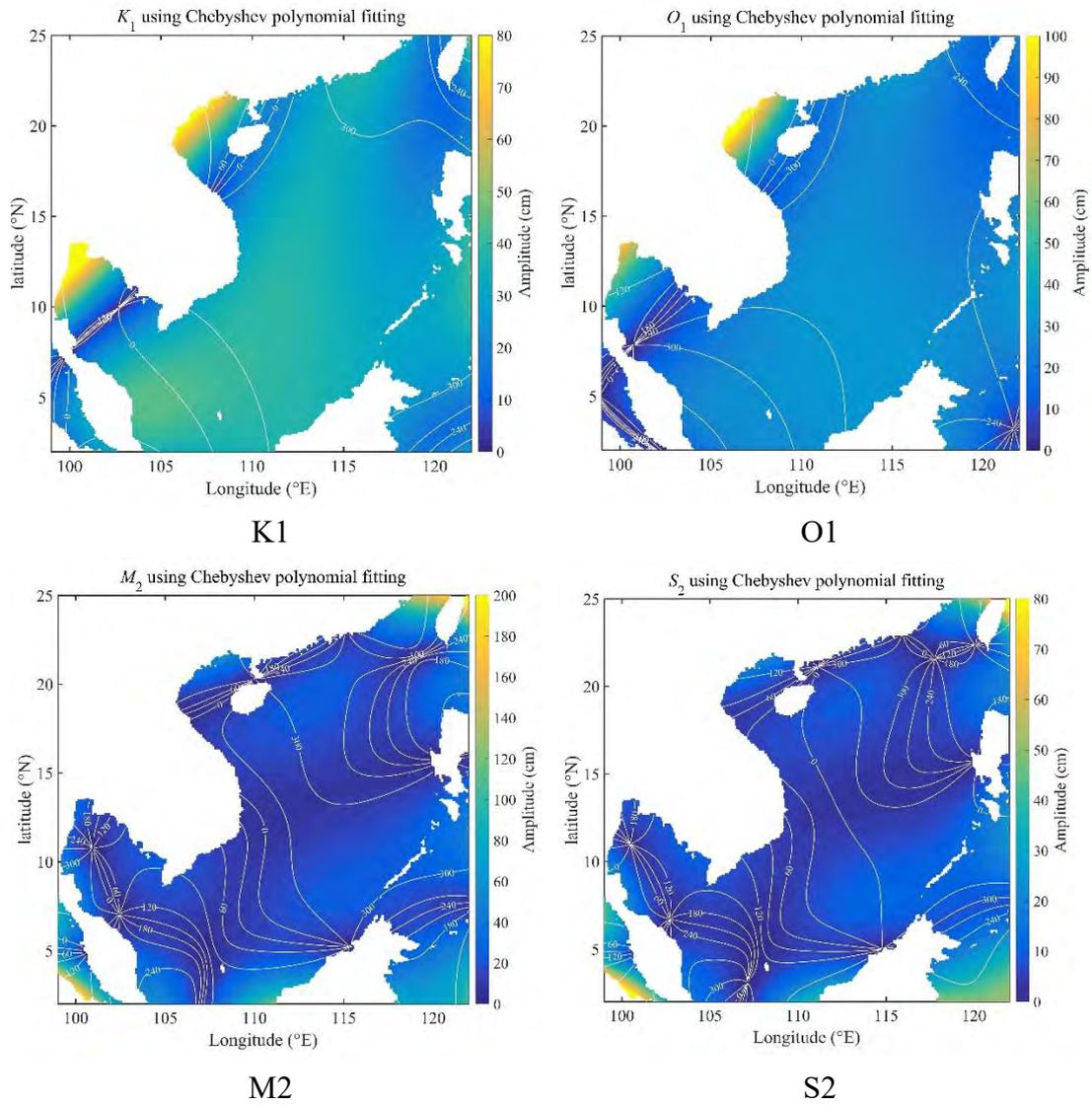


图 5-2 基于车贝雪夫多项式拟合的 S2、M2、O1、K1 四个分潮的同潮图

表 5-1 M2 分潮采用的车贝雪夫多项式的拟合的情况

	x（经度方向）所采用的车贝雪夫多项式的拟合次数													
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	21.10461	19.291	18.38	17.415	18.12	18.674	19.28	22.122	22.98	23.46	23.7878	23.811	23.35	23.71
3	16.67367	14.07	12.02	12.32	14.40	17.64	17.99	19.42	20.02	20.67	20.98	23.01	22.50	22.33
4	16.38815	12.24	11.64	13.51	14.67	17.79	18.38	19.07	20.05	20.79	22.32	22.04	21.70	21.59
5	16.04373	12.74	13.42	14.56	16.70	18.32	18.74	19.74	20.33	22.24	22.36	21.76	22.06	22.07
6	15.34168	12.84	16.01	16.76	18.53	19.12	18.46	19.55	21.88	22.39	22.19	21.47	21.83	21.73
7	18.76334	17.81	17.91	19.44	18.81	19.04	18.53	21.98	21.59	22.25	22.11	22.49	21.56	23.00
8	22.12972	19.34	20.11	20.79	19.55	19.45	21.06	21.32	21.55	22.40	22.66	22.44	22.81	22.57
9	22.1531	21.14	20.67	22.20	19.77	21.84	21.42	21.49	21.94	22.62	22.68	23.17	22.51	22.19
10	23.85448	21.55	22.36	22.40	22.07	22.34	21.94	21.85	22.09	22.75	22.50	22.86	21.71	21.49
11	24.25933	22.69	22.84	22.91	22.33	22.54	21.92	21.84	22.64	22.69	22.07	22.37	21.62	22.26
12	24.08556	23.18	23.29	23.52	23.19	22.55	22.02	22.40	22.28	22.24	21.92	21.92	22.47	22.03
13	24.18251	23.49	23.54	23.34	23.76	22.81	22.76	22.49	22.65	22.77	22.17	23.42	22.52	22.59
14	24.42653	23.51	23.95	23.51	23.47	23.25	22.96	22.89	23.22	23.15	23.19	23.57	22.56	22.33
15	24.20887	24.06	23.96	23.67	23.46	23.21	23.00	23.14	23.14	23.60	23.26	23.30	22.51	22.92

表 5-2 S2 分潮采用的车贝雪夫多项式的拟合的情况

	x (经度方向) 所采用的车贝雪夫多项式的拟合次数													
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	9.593499	8.52	8.334	7.933	8.1349	8.499	8.353	9.50281	9.8	9.911	10.18	10.3	9.91	10.1
3	7.376576	6.07	5.29	5.23	5.95	7.60	7.64	8.27	8.37	8.81	9.08	9.92	9.58	9.49
4	7.234646	5.35	5.17	5.83	6.16	7.59	7.86	7.92	8.45	8.83	9.52	9.41	9.19	9.07
5	7.202539	5.56	6.01	6.28	7.27	8.19	7.78	8.14	8.52	9.39	9.54	9.18	9.36	9.47
6	6.890909	5.59	7.06	7.31	8.32	8.34	7.81	8.29	9.17	9.51	9.34	9.27	9.39	9.46
7	7.97328	7.52	7.79	8.61	8.09	8.13	7.84	9.26	9.11	9.46	9.41	9.73	9.37	9.79
8	9.308901	8.28	8.81	9.00	8.27	8.33	8.84	9.11	9.23	9.68	9.76	9.62	9.67	9.72
9	9.518995	9.42	9.04	9.31	8.43	9.40	9.11	9.30	9.56	9.81	9.74	9.93	9.63	9.60
10	10.27182	9.28	9.53	9.41	9.47	9.57	9.54	9.45	9.43	9.92	9.72	9.84	9.26	9.22
11	10.43568	9.57	9.75	9.69	9.56	9.74	9.45	9.36	9.70	9.77	9.49	9.60	9.18	9.47
12	10.38761	9.80	10.07	9.96	9.87	9.65	9.47	9.48	9.52	9.54	9.47	9.41	9.59	9.41
13	10.4204	10.11	10.19	9.93	10.13	9.73	9.61	9.48	9.59	9.79	9.58	###	9.68	9.68
14	10.47194	10.05	10.29	10.11	10.06	9.82	9.73	9.69	9.87	9.92	10.01	###	9.73	9.58
15	10.366	10.27	10.31	10.08	10.02	9.87	9.79	9.87	9.88	10.07	10.10	9.95	9.67	9.79

表 5-3 K1 分潮采用的车贝雪夫多项式的拟合的情况

	x（经度方向）所采用的车贝雪夫多项式的拟合次数													
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	15.87442	11.33	9.9205	9.396	9.8753	26.0294	26.8212	28.497	29.247	30.289	30.3	31.157	31.204	31.223
3	14.79403	6.33	6.18	17.16	19.75	24.38	25.74	28.70	29.38	29.65	30.39	30.40	30.61	30.97
4	14.25	6.95	13.82	18.78	20.03	25.83	27.15	28.71	29.39	29.87	29.97	29.99	30.52	30.49
5	13.647	12.00	19.04	20.77	25.17	26.23	27.94	28.67	29.40	29.66	29.64	29.67	30.09	30.33
6	15.01291	20.67	23.64	24.33	25.84	28.19	28.37	28.68	29.33	29.43	30.16	29.61	29.91	30.14
7	28.50744	25.99	25.26	27.44	27.69	29.16	28.76	29.20	29.46	29.87	30.50	29.62	30.25	30.18
8	28.13338	26.85	27.51	27.64	29.52	29.02	28.88	28.77	29.14	29.55	29.87	29.43	29.43	29.56
9	28.83045	28.69	27.99	29.08	28.76	29.06	29.42	28.86	29.34	29.52	30.23	29.39	29.70	29.05
10	29.37385	29.31	28.90	29.84	29.42	29.84	29.70	29.91	29.71	29.94	30.22	29.59	29.54	29.15
11	30.14527	29.96	29.85	30.25	29.83	30.18	30.29	29.67	29.66	30.24	30.48	29.68	29.72	29.66
12	30.66335	30.30	30.15	30.54	30.25	30.12	30.31	29.60	30.36	30.17	30.41	29.80	29.96	28.92
13	30.89086	30.82	30.51	30.66	30.40	30.69	30.55	30.55	30.64	30.35	31.14	30.61	30.19	29.07
14	31.51359	30.82	30.76	30.93	30.75	31.32	31.08	30.96	30.74	31.12	31.25	30.72	30.24	29.59
15	31.51592	31.16	31.03	31.11	31.36	31.43	31.24	30.84	31.31	31.11	31.39	30.71	30.65	30.36

表 5-4 O1 分潮采用的车贝雪夫多项式的拟合的情况

	x（经度方向）所采用的车贝雪夫多项式的拟合次数													
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	13.39719	9.8501	8.624	8.2698	9.015	21.77	22.07	23.589	24.61	25.53	25.416	25.724	25.797	25.933
3	12.46407	4.89	5.04	14.91	16.64	20.10	21.36	23.78	24.63	24.70	25.40	25.33	25.47	25.81
4	12.11515	6.25	12.00	16.45	16.72	21.56	22.61	23.95	24.51	24.97	25.24	25.05	25.35	25.31
5	11.64368	10.36	15.97	17.41	20.52	21.69	23.17	23.75	24.49	24.65	24.71	24.54	24.90	25.01
6	12.73649	17.56	19.27	19.97	21.45	23.37	23.62	24.03	24.58	24.42	24.99	24.43	24.64	24.97
7	24.38639	21.39	20.50	23.00	22.99	24.36	24.25	24.59	24.64	24.82	25.38	24.54	25.17	25.07
8	24.074	22.07	23.14	23.19	24.34	24.17	24.11	24.14	24.35	24.55	24.82	24.36	24.26	24.49
9	24.19536	24.15	23.33	24.45	24.05	24.30	24.67	24.11	24.62	24.63	25.18	24.34	24.48	24.13
10	24.54331	24.59	24.20	25.10	24.53	25.13	24.80	24.97	24.89	25.05	25.18	24.47	24.48	24.37
11	25.16003	25.14	24.96	25.40	25.10	25.29	25.27	24.69	24.77	25.12	25.48	24.66	24.70	24.63
12	25.44189	25.39	25.32	25.57	25.23	25.18	25.23	24.49	25.21	24.99	25.28	24.67	24.78	23.92
13	25.65798	25.84	25.53	25.57	25.38	25.64	25.43	25.33	25.53	25.19	25.80	25.33	24.99	24.11
14	26.1129	25.80	25.59	25.79	25.65	26.09	25.78	25.67	25.52	25.84	25.93	25.43	25.09	24.57
15	26.18543	25.93	25.79	25.82	26.05	26.03	25.92	25.56	25.96	25.70	25.94	25.45	25.42	25.20

5.3. 伴随同化方法

在上述第三问的求解过程中，基于南海 20 条轨道上计算得到的正压潮调和常数，分别利用了二维空间插值和 Chebyshev 拟合方法得到了南海四个主要分潮的同潮图。所得结果与验潮站数据的误差较小，但是同潮图与 OSU 潮汐数据所得同潮图在空间结构上还有一定的差异，这主要是因为：无论二维空间插值还是 Chebyshev 方法，都是纯粹的数学方法，在没有物理意义的情况下对于数据进行插值和拟合。

张继才（2008）曾经指出：“数据同化方法指的是，对系统进行状态分析的时候，将基于物理学的数值模式与观测资料作为一个有机的整体来研究海洋或者大气系统状态的演变规律，各种同化方法按照特定的优化标准和方法，将时空分布上稀疏或者残缺不全、具有不同误差分布特点的观测数据与数值模式有机结合，最大限度的提取观测数据所包含的有效信息，同时保证数值模式与数据之间的相互协调。数据同化方法通过提供初始场、边界条件、优化模型控制参数等，将时间和空间上不连续的海洋观测资料同化到数值模式中去，重构海洋要素集并重现海洋过程”。可以看出，数据同化方法亦是一个可以将 TP 卫星轨道点上调和常数数据拓展到整个南海海域，进而得到各个主要分潮的同潮图。

伴随同化方法是建立在严格的数学基础之上的一种有效的四维变分同化技术，它将变分原理与最优控制理论相结合，以海洋动力模型作为约束条件，通过同化可观测到的海洋要素优化控制变量，达到反演无法观测到的海洋要素的目的（张继才，2008）。伴随同化方法已被广泛用于中国近海海域潮汐研究之中，其中，不乏利用伴随同化同化 TP 卫星高度计数据所得主要分潮的调和常数，对研究海域进行潮汐研究的范例：Lv 和 Zhang（2006）利用一个二维潮波伴随同化模型同化 TP 卫星高度计数据所得轨道上 M2 分潮的调和常数，绘制了渤海东海海域 M2 分潮的同潮图；Gao 等（2015）利用一个考虑内潮耗散的二维潮波伴随同化模型同化 TP 卫星高度计数据所得轨道上四个主要分潮的调和常数和沿岸验潮站数据，绘制了南海海域四个主要分潮的同潮图。因此，利用二维潮波伴随同化模型同化 TP 轨道上分潮的调和常数，得到本题目所研究的南海海域各个分潮的同潮图是可行的。因时间原因，此处不再利用伴随同化方法进行实际操作，仅简单介绍该方法可以作为求解第三问的重要方法。

6. 模型的总结与预评

本文以 TOPEX/POSEIDON 卫星高度计观测所得南海区域海面高度异常产品为基础, 利用调和分析方法得到了符合资料长度要求的 TOPEX/POSEIDON 星下观测点处 M_2 、 S_2 、 K_1 和 O_1 四个主要分潮的调和常数; 进而, 在每个轨道上利用多项式拟合方法分离了四个主要分潮的正压潮和内潮部分; 最后, 利用数据插值法和车贝雪夫多项式拟合法两种方法对南海海域 M_2 、 S_2 、 K_1 和 O_1 四个主要分潮的正压潮调和常数进行了二维插值或者拟合, 得到了南海四个主要分潮的同潮图。

针对问题一, 首先确定 TOPEX/POSEIDON 观测数据中 M_2 、 S_2 、 K_1 和 O_1 四个主要分潮的混淆周期, 然后根据 Rayleigh 准则, 计算得到了分离四个主要分潮所需的最短资料长度为 2.97 年, 进而对题目中给出的所有 TOPEX/POSEIDON 星下观测点进行了筛选, 得到了符合要求的星下轨道点共 4309 个。利用调和分析方法, 对于筛选后的 4309 个星下轨道点处的观测数据进行了分析, 得到了上述所有星下轨道点处 M_2 、 S_2 、 K_1 和 O_1 四个主要分潮的调和常数(振幅 H 和迟角 G); 根据星下轨道点和验潮站之间的距离, 选取了两者之间距离小于 15 千米的 40 个验潮站对计算所得四个主要分潮的调和常数进行了检验: 40 个验潮站处, M_2 、 S_2 、 K_1 和 O_1 四个分潮计算值和观测值之间的矢量差的平均值分别为为 4.99 厘米, 3.43 厘米, 4.42 厘米和 4.54 厘米, 说明利用 TOPEX/POSEIDON 观测数据所提取的调和常数结果较准。

针对第二问, 首先基于 TOPEX/POSEIDON 卫星绕地球一圈的时间和轨道重复周期, 依据筛选后的 4309 个星下轨道点处数据的观测时间, 对南海海域 20 条轨道进行了分离和提取, 确定了每条轨道上存在观测数据的星下轨道点的经纬度。利用多项式拟合法对每一条轨道上 $H\cos G$ 和 $H\sin G$ 进行拟合, 所得多项式拟合部分为正压潮, 而剩余部分为内潮。以第四问为启发, 对于多项式拟合的次数进行了遍历, 以 4309 个星下点处调和常数拟合值和观测所得值之间矢量差的平均值作为判别标准, 确定了最优的多项式拟合次数为 8 次。最终, 在所有 20 条轨道上, 利用 8 次多项式对四个主要分潮的 $H\cos G$ 和 $H\sin G$ 进行了拟合, 然后反算出四个分潮正压潮和内潮两个部分的调和常数, 实现了对于正压潮和内潮的分离。

针对第三问, 以第二问所得 4309 个星下轨道点处正压潮的调和常数为基础, 以题目中所给水深数据的经纬度网格为目标区域, 利用基于三角网格的 cubic 插值法(方法 1)和二维车贝雪夫多项式方法(方法 2)分别对星下轨道点处的正压潮调和常数进行了插值或拟合。在利用二维车贝雪夫多项式方法进行拟合时, 以第四问为启发, 对于经度和纬度两个方向的一维车贝雪夫多项式的次数进行了遍历, 得到了最优的多项式次数: 对于 M_2 和 S_2 分潮, 两个方向的最优次数均分别为 4 次和 4 次; 对于 K_1 分潮, 两个方向的最优次数分别为 4 次和 3 次; 对于 O_1 分潮, 两个方向的最优次数分别为 3 次和 3 次。基于三角网格的 cubic 插值法(方法 1)所得 M_2 、 S_2 、 K_1 和 O_1 四个主要分潮的同潮图中, 振幅插值结果较好, 但等迟角线不够平滑; 二维车贝雪夫多项式方法(方法 2)所得 M_2 、 S_2 、 K_1 和 O_1 四个主要分潮的同潮图, 四个分潮振幅和迟角的拟合结果均明显优于方法 1 所得插值结果。需要指出的是, 两种方法所得四个主要分潮的同潮图与实际同潮图还

有一定的差距，相关文献表明，利用伴随同化方法同化 TOPEX/POSEIDON 观测数据所得调和常数，对南海四个主要分潮进行数值模拟与同化研究，将会进一步提升所得同潮图的质量。

7. 参考文献

- [1] 陈宗镛, 潮汐学, 北京: 科学出版社, 1980.
- [2] 方国洪, 郑文振, 陈宗镛, 王骥, 潮汐和潮流的分析与预报, 北京: 海洋出版社, 1986.
- [3] 黄祖珂, 黄磊, 潮汐原理与计算, 青岛, 中国海洋大学出版社, 2005
- [4] 孙丽艳: 渤黄东海潮汐底摩擦系数的优化研究 [硕士学位论文]. 青岛: 中国海洋大学海洋环境学院, 2006.
- [5] 范丽丽: 风暴潮数值同化研究和高度计资料拟合方法研究 [硕士学位论文]. 青岛: 中国海洋大学海洋环境学院, 2011.
- [6] 赵云霞,魏泽勋,王新怡.利用 T/P 卫星高度计资料调和分析南海潮汐信息[J].海洋科学,2012,36(05):10-17.
- [7] 董晓军,马继瑞,黄斌,范振华,韩桂军,许崇金.利用 TOPEX/Poseidon 卫星高度计资料提取黄海、东海潮汐信息的研究[J].海洋与湖沼,2002(04):386-392.
- [8] 张效谦,梁鑫峰,周磊.利用 TOPEX/Poseidon 高度计资料提取的太平洋 M₂ 内潮能通量分布[J].海洋学报(中文版),2005(05):9-14.
- [9] 李立,吴日升,李燕初,甘子钧.TOPEX/POSEIDON 高度计浅海潮汐混淆的初步分析[J].海洋学报(中文版),1999(03):7-14
- [10] 付延光,周兴华,许军,刘森波,杨磊.利用 TOPEX/Poseidon 和 Jason-1 高度计数据提取中国南海潮汐信息[J].武汉大学学报(信息科学版),2018,43(06):901-907.
- [11] 何宜军. TOPEX/POSEIDON 卫星高度计海洋潮波分析[A].中国气象学会.第十三届全国遥感技术学术交流会论文摘要集[C].中国气象学会:,2001:2.[12] 张继才. 三维正压潮汐潮流伴随同化模型数值建模及应用研究: [博士学位论文] 青岛: 中国海洋大学, 2008
- [12] 蔡定军,张明席.用迭套场车贝雪夫多项式展开作暴雨预报[J].气象,1989(02):43-46+8。

