

“华为杯”第十五届中国研究生 数学建模竞赛

题 目 基于卫星高度计海面高度异常资料 获取潮汐调和常数方法及应用

摘 要：

潮汐潮流现象在海岸附近和河口区域非常显著，直接或间接地影响着人们的生产和生活，其运动对波浪、风暴潮、环流、水团等海洋现象和大陆架浅海海洋的研究有重要影响。区域海洋潮汐的数值模拟需要提供开边界的水位调和常数，而目前对区域海洋潮汐的调和常数的研究结果难以令人满意。本文基于已有的高度计资料，对 $(M_2、S_2、K_1、O_1)$ 4 个主要分潮的潮汐调和常数进行提取，对沿轨道的潮汐调和常数进行正压潮和内潮的分离，给出各主要分潮的同潮图。

针对问题一，提取所有星下观测点各主要分潮 $(M_2、S_2、K_1、O_1)$ 的潮汐调和常数，建立了基于最小二乘法提取分潮调和常数的数学模型，应用调和分析方法得到各主要分潮交点因子 f 和订正交 u ，根据高度计资料，建立方程的数量 t 远大于未知数的数量 $m+1$ 的矛盾方程组，用最小二乘法求出各主要分潮的调和常数振幅 H 和迟角 g 。依据验潮站的潮汐调和常数，对求出的各主要分潮的调和常数进行评价和检验，结果表明，基于最小二乘法求出的结果和验潮站的结果相比差别不大，验证了该方法的可靠性。

针对问题二，对沿轨道的各主要分潮 $(M_2、S_2、K_1、O_1)$ 的潮汐调和常数进行正压潮和内潮的分离，本文选取 7 条轨道，采用多项式拟合 ($n=3\sim 10$ 次) 方法对 $H\cos(g)$ 和 $H\sin(g)$ 分别进行沿轨多项式拟合。拟合结果表明，拟合次数与拟合结果的绝均差没有固定的线性关系，8~10 次多项式拟合得到的绝均差最小，提取的各主要分潮的正压潮值更为精确。由于正压潮值并不受内潮波长变化的影

响,通过高通滤波的方法滤掉正压潮部分提取内潮海表面信号,可实现上行轨道与下行轨道各分潮潮汐调和常数正压潮与内潮的分离。

针对问题三,设计数据插值或拟合方法给出南海各主要分潮同潮图,本文基于轨道上的调和常数,设计了一种新的拟合方法(根据点到最近两条上(下)行轨的距离比,在区域内找到一系列点,对这些点的调和常数进行多项式拟合,得到这些点的调和常数。该方法可以推广到开阔海域的任何分潮),利用该方法得到各主要分潮(M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1)的同潮图。将该拟合方法得到的同潮图与潮汐验潮点的同潮图对比,结果表明振幅线走势基本一致,迟角线也匹配的较好,验证了该拟合方法的合理性。

针对问题四,得出特定函数拟合的最佳次数,本文应用多项式拟合调和常数,用高通滤波法将各主要分潮的正压潮和内潮分离。对问题二中多项式拟合次数扩展,得到多项式拟合的最佳范围为8~11次。将此最佳范围应用到问题三的新型拟合方法中,得到整个研究区域的调和常数,结果表明应用最佳范围拟合得到的同潮图与验潮点同潮图更接近,证明了拟合过程能够确定最佳次数的合理性。

最后,对本文应用的数学模型进行评价,对潮汐潮流的数值模拟进行展望。

关键词: 潮汐调和常数; 调和分析; 多项式拟合; 正压潮和内潮; 同潮图

目 录

一、问题背景与重述.....	4
1.1 问题背景.....	4
1.2 问题重述.....	4
二、模型假设.....	5
三、符号说明.....	6
四、问题分析.....	7
4.1 问题一的分析.....	7
4.2 问题二的分析.....	7
4.3 问题三的分析.....	7
4.4 问题四的分析.....	7
五、模型建立与求解.....	8
5.1 问题一的模型建立与求解.....	8
5.1.1 模型建立.....	8
5.1.2 模型求解.....	12
5.2 问题二的模型建立与求解.....	21
5.2.1 模型建立.....	21
5.2.2 模型求解.....	25
5.3 问题三的模型建立与求解.....	37
5.3.1 模型建立.....	37
5.3.2 模型求解.....	40
5.4 问题四的分析与求解.....	45
5.4.1 问题分析.....	45
5.4.2 问题求解.....	46
5.4.3 与问题三的联系.....	47
六、模型评价及展望.....	48
6.1 模型评价.....	48
6.2 模型评价.....	48
参考文献.....	49
附 录.....	50

一、问题背景与重述

1.1 问题背景

海洋潮汐是在天体引潮力作用下形成的长周期波动现象,在水平方向上表现为潮流的涨落,在铅直方向上则表现为潮位的升降。潮汐潮流运动是海洋中的基本运动之一,它是动力海洋学研究的重要组成部分,对它的研究直接影响着波浪、风暴潮、环流、水团等其他海洋现象的研究^[1-3],在大陆架浅海海洋中,对潮汐潮流的研究更具重要性。

海岸附近和河口区域是人类进行生产活动十分频繁的地带,而这个地带的潮汐现象非常显著,它直接或间接地影响着人们的生产和生活。潮汐潮流工作的开展和研究,可为国防建设、交通运输、海洋资源开发、能源利用、环境保护、海港建设和海岸防护提供资料。

1.2 问题重述

区域海洋潮汐的数值模拟需要提供开边界的水位调和常数,而开边界的水位调和常数,或者来源于观测、或者来源于全球海洋潮汐的数值模拟^[4-7];而全球海洋潮汐的数值模拟,相当耗费资源。虽然目前有国外学者或研究机构,能够提供区域海洋潮汐的调和常数,但实质上的评价结果难以令人满意。

从区域海洋潮汐的数值模拟的现状来讲,四个主要分潮(M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1)的单一分潮的数值模拟与同化可以得到令人满意的结果,但其它分潮(N_2 、 K_2 、 P_1 、 Q_1 等)的单一分潮的数值模拟与同化,结果却差强人意^[8-9];这意味着其它分潮的数值模拟,只有与四个主要分潮同时进行数值模拟,才能得到可以接受的结果。从具体操作来讲,其它分潮由于相对较弱,导致模拟结果的精度难以提高。

从各分潮的调和常数获取的发展史来说,通过对已有观测结果进行插值曾经是首选,但发展过程中逐渐被数值模拟方法所取代。高度计资料的出现,引发部分学者开展了插值方法的研究^[10-11],并取得了一些值得一提的结果,尽管被所谓的主流方式淹没,但也难掩其光芒所在。鉴于目前已有高度计资料作为支持,其它分潮及长周期分潮的调和常数获取的插值方法研究大有可为。

根据以上介绍研究下列问题:

问题一: 根据沿轨道的星下观测点的海面高度异常值,提取所有星下观测点各主要分潮(M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1)的潮汐调和常数,注意能有效提取那些分潮的潮汐调和常数取决于相应的资料长度;对提取的潮汐调和常数,应利用潮汐验潮点的调和常数给予评价或检验,并给出评价结果的分析或评价。

问题二: 得到所有星下观测点各主要分潮(M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1)的潮汐调和常数,沿轨道作图后,可发现潮汐调和常数在沿轨道方向,在空间有细结构,而此细结构是内潮对正压潮的调制;请设法对沿轨道的各分潮的潮汐调和常数进行正压潮和内潮的分离。

问题三: 设计数据插值或拟合方法给出南海的各主要分潮的同潮图,并利用潮汐验潮点的调和常数给予评价或检验,并给出评价结果的分析或评价。

问题四: 如果在对沿轨道的潮汐调和常数分离、插值或拟合的过程中,利用了特定的函数进行拟合,是否能够确定出需利用的特定函数的最佳(高)次数?上述结论是否对第3问有启示或帮助。

二、模型假设

- 假设 1: 南海海域在所选的时间段里, 各分潮的潮汐调和常数趋于稳定, 没有发生突变。
- 假设 2: 所选的南海海域在这段时间里, 海洋深度的基准水平面没有受全球气温升高影响而发生变化。
- 假设 3: 在验潮站潮汐调和常数提取中, 忽略海洋动力条件、气象条件以及观测误差的误差因素的影响。
- 假设 4: 根据高度计提取调和常数的过程中, 忽略各分潮的内部相互作用。
- 假设 5: 选取的观测点的数据记录完整。

三、符号说明

符号	符号说明
M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1	主要分潮名称
S_0	余水位
$\mu_{0\sim 6}$	Doodson 数
f_j	交点因子
u_j	交点订正角
$H/\Delta H$	振幅/振幅差
$g/\Delta g$	迟角/迟角差
v_0	初相角
h_n	潮高
J	分潮个数
$f_1(y_k)$	正压潮值
∇^2/∇_k^2	三维 Laplace 算子/水平 Laplace 算子
ξ	波高
ρ	密度场
x_k/y_k	轨道任一观测点的经度/纬度
w	权重
d_1/d_2	点到第 $i/i+1$ 条上行轨的距离
d_3/d_4	点到第 $j/j+1$ 条下行轨的距离

四、问题分析

4.1 问题一的分析

问题一要求根据沿轨道的星下观测点的海面高度异常值,提取所有星下观测点各主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的潮汐调和常数,并将提取的潮汐调和常数,利用潮汐验潮点的调和常数给出合理的分析和评价。

本题首先根据题目所提供的海面高度异常值数据的时间序列,选取上行轨道和下行轨道的交叉点,然后依据调和分析方法建立数学模型,利用最小二乘法求解矛盾方程组得到观测点各主要分潮的潮汐调和常数。最后将选取的上行轨道和下行轨道的交叉点的潮汐调和常数(振幅和迟角)与验潮站资料进行对比可视化,检验在交叉点处的计算结果的可靠性。

4.2 问题二的分析

问题二要求将对沿轨道的各分潮的潮汐调和常数进行正压潮和内潮的分离。

本题首先采用多项式拟合方法对 $H\cos(g)$ 和 $H\sin(g)$ 分别进行沿轨多项式拟合得到的各分潮调和常数以提取内潮海表面信号,以任意轨道作为研究对象,进行不同次数的多项式拟合并进行了比较,以显示不同拟合次数滤波结果的差异性。拟合结果代表了正压潮值并不会受到内潮波长变化的影响。最后通过高通滤波的方法滤掉正压潮部分来提取内潮海表面信号,进而实现上行轨道与下行轨道各分潮的潮汐调和常数的正压潮与内潮的分离。

4.3 问题三的分析

问题三要求设计数据插值或拟合方法给出南海的各主要分潮的同潮图,并利用潮汐验潮点的调和常数给予评价结果的分析或评价。

本题首先设计一种新的拟合方法。即在研究区域内任选一点 P , 根据该点到其最近两条上(下)行轨的距离比,在这两条上(下)行轨间的下(上)行轨上可以找到与该点具有相同距离比的一系列点,对这些点的调和常数进行多项式拟合,从而可得到该点的调和常数。采用该拟合方法,可以得到研究区域内任意点的调和常数。然后由此得到南海的各主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的同潮图。最后并将所得计算结果分别与验潮站资料中的各个分潮的结果进行比较,验证了利用此方法对南海潮波系统研究提所具有的参考价值。

4.4 问题四的分析

问题四要求探索在对沿轨道的潮汐调和常数分离、插值或拟合的过程中,利用了特定的函数进行拟合,是否能够确定出需利用的特定函数的最佳(高)次数?同时并要求思考上述结论是否对第3问有启示或帮助。

本题首先在对沿轨道的潮汐调和常数分离、拟合的过程中,利用了高通滤波法,进行不同次数的多项式拟合并比较,以显示不同拟合次数滤波结果的差异性。然后可视化比较四个主要分潮,确定出需利用的特定函数的最佳次多项式,使得拟合得到的绝均差最小,拟合结果与海表面主要分潮振幅的符合程度最高。最后确定出需利用的特定函数的最佳(高)次数。将上述结果得到的对于不同的分潮多项式拟合的最优次数放在问题三求解过程中,对沿轨道上的点以及轨道外的点的各个分潮进行最优次数的多项式拟合,缩小了求解区间,同潮图的信息就会显示的更加准确。由此判断上述结论对第3问的求解有帮助。

五、模型建立与求解

5.1 问题一的模型建立与求解

5.1.1 模型建立

根据题目所提供的沿轨道的星下观测点的海面高度异常值数据的时间序列，对此时间序列进行调和分析得到观测点各主要分潮的潮汐调和常数。利用调和分析方法建立数学模型。

实际潮汐的分潮在频率上的分布是极不均匀的，而是分成族、群和亚群。在每一个潮族中，具有不同数量的群和亚群。在亚群中的各个分潮的角速度是非常接近的，彼此之间只有微小的差异。因此，在资料长度有限的情况下，亚群中的各个分潮是无法区分的。因此，在实际的潮汐分析中，往往将一个亚群合成一个分潮，此时这一分潮的振幅和迟角不再是常数，而是随着升交点的黄经十分缓慢地变化，一般在较短的时间内可近似看作不变。这样的分潮实质上是准调和的，但习惯上仍叫做调和分潮。

实际水位可以看作是很多个调和分潮迭加的结果，但是在实际分析中只能选取其中有限个较主要的分潮。假设我们选取了 J 个分潮，对于任一点的潮位表达式为

$$h = S_0 + \sum_{j=1}^J f_j h_j \cos(v_j + u_j - g_j) = S_0 + \sum_{j=1}^J f_j h_j \cos(\sigma_j t + v_{0j} + u_j - g_j) \quad (5-1)$$

其中， S_0 为余水位， f_j 为交点因子， u_j 为交点订正角， h_j, g_j 为分潮的调和常数（振幅和迟角）。

(1) 分潮角速度的计算

$$\sigma = \mu_1 \dot{\tau} + \mu_2 \dot{s} + \mu_3 \dot{h}' + \mu_4 \dot{p} + \mu_5 \dot{N}' + \mu_6 \dot{p}' \quad (5-2)$$

其中， σ 为分潮的角速度， $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$ 为 Doodson 数，

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tau} = 14.49205211 \\ \dot{s} = 0.54901653 \\ \dot{h}' = 0.04106864 \\ \dot{p} = 0.00464183 \\ \dot{N}' = 0.00220641 \\ \dot{p}' = 0.00000196 \end{array} \right. \quad (\text{单位：度/平太阳时})$$

(2) 分潮初相位的计算

Y 年 M 月 D 日 t 时刻（实际计算中是观测数据的起始时间）的天文初相角：

$$v_0 = \mu_1 \tau + \mu_2 s + \mu_3 h' + \mu_4 p + \mu_5 N' + \mu_6 p' + \mu_0 90 \quad (5-3)$$

其中， $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$ 为 Doodson 数

$$\begin{cases} s = 277.02 + 129.3848(Y - 1900) + 13.1764(n + i + \frac{t}{24}) \\ h' = 280.19 - 0.2387(Y - 1900) + 0.9857(n + i + \frac{t}{24}) \\ p = 334.39 + 40.6625(Y - 1900) + 0.1114(n + i + \frac{t}{24}) \\ N' = 100.84 + 19.3282(Y - 1900) + 0.0530(n + i + \frac{t}{24}) \\ p' = 281.22 + 0.0172(Y - 1900) + 0.00005(n + i + \frac{t}{24}) \\ \tau = 15t - s + h' \end{cases}$$

式中 i 为 1900 年至 Y 年的闰年数, $i = \text{int}(\frac{Y-1901}{4})$; n 为从 Y 年 1 月 1 日开始计算的累积日期序数, 1 月 1 日的日期序数为 0, t 为时间 (单位: 小时)。以上各式中的单位是度。

表 5.1 部分分潮的 Doodson 数、分潮角速度和交点因子与订正角

分潮符号	Doodson 数							分潮角速度 单位: 度/平太阳时	交点因子与订正角	
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_0		f	u
S_a	0	0	1	0	0	0	0	0.0410686	1	0
S_{sa}	0	0	2	0	0	0	0	0.0821373	1	0
M_m	0	1	0	-1	0	0	0	0.5443747	M_m	M_m
MS_f	0	2	-2	0	0	0	0	1.0158958	M_2	$-M_2$
M_f	0	2	0	0	0	0	0	1.0980331	M_f	M_f
Q_1	1	-2	0	1	0	0	-1	13.3986609	O_1	O_1
O_1	1	-1	0	0	0	0	-1	13.9430356	O_1	O_1
M_1	1	0	0	0	0	0	1	14.4920521	M_1	M_1
P_1	1	1	-2	0	0	0	-1	14.9589314	P_1	P_1
S_1	1	1	-1	0	0	0	2	15.0000000	1	0
K_1	1	1	0	0	0	0	1	15.0410686	K_1	K_1
J_1	1	2	0	-1	0	0	1	15.5854434	J_1	J_1
OO_1	1	3	0	0	0	0	1	16.1391017	OO_1	OO_1
N_2	2	-1	0	1	0	0	0	28.4397295	M_2	M_2
M_2	2	0	0	0	0	0	0	28.9841042	M_2	M_2

L_2	2	1	0	-1	0	0	2	29.5284789	L_2	L_2
S_2	2	2	-2	0	0	0	0	30.0000000	1	0
k_2	2	2	0	0	0	0	0	30.0821373	k_2	k_2
M_4	4	0	0	0	0	0	0	57.9682085	M_2^2	$2M_2$
MS_4	4	2	-2	0	0	0	0	58.9841043	M_2	M_2
M_6	6	0	0	0	0	0	0	86.9523127	M_2^3	$3M_2$

表 5.1 中交点因子及交点订正角的含义说明：例如，表 5.1 中 M_6 分潮的交点因子是 M_2 分潮的交点因子的三次方， M_6 分潮的交点订正角是 M_2 分潮的交点订正角的三倍。

(3) f_j 和 u_j 的计算

由于 f_j 和 u_j 随时间变化非常缓慢，一般情况下取资料序列的中间时刻计算。各分潮的 f_j 、 u_j 的具体计算公式如下

$$\begin{cases} f \cos u = \sum_{m=1}^M \rho_m \cos(\Delta\mu_4^m p + \Delta\mu_5^m N) \\ f \sin u = \sum_{m=1}^M \rho_m \sin(\Delta\mu_4^m p + \Delta\mu_5^m N) \end{cases} \quad (5-4)$$

ρ_m 、 $\Delta\mu_4^m$ 、 $\Delta\mu_5^m$ 和 Doodson 数见表 5.2。

表 5.2 ρ_m 、 $\Delta\mu_4^m$ 、 $\Delta\mu_5^m$ 列表

$\Delta\mu_4$	$\Delta\mu_5$	M_m	M_f	O_1	P_1	K_1	J_1	OO_1	M_2	L_2	k_2
-2	-1					0.00					
-2	0		0.04					0.14			
-2	1							0.02			
0	-2	0.00			0.00	0.00			0.00		
0	-1			0.18							
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1		0.41			0.13	0.19	0.63			0.29
0	2		0.03					0.13			0.03
0	3		-0.00					0.00			
2	-1			0.00						0.00	
2	0								0.00		

2	1	0.00
2	2	

对于 M_m 、 Mf 、 O_1 、 P_1 、 K_1 、 J_1 、 OO_1 、 M_2 、 L_2 、 k_2 分潮的 f 和 u 依照上式计算，其他分潮由这些分潮组合计算，但 M_1 分潮的 f 和 u 由以下公式计算得出

$$\begin{aligned}
f \cos u &= -0.008 \cos(-p - 2N') + 0.094 \cos(-p - N') + 0.510 \cos p - 0.041 \cos(p - N') \\
&\quad + 1.418 \cos p + 0.284 \cos(p + N') - 0.008 \cos(p + 2N') \\
f \sin u &= -0.008 \sin(-p - 2N') + 0.094 \sin(-p - N') - 0.510 \sin p - 0.041 \sin(p - N') \\
&\quad + 1.418 \sin p + 0.284 \sin(p + N') - 0.008 \sin(p + 2N')
\end{aligned}$$

(4) 最小二乘法提取分潮调和常数

最小二乘法则是一种统计学习优化技术，它的目标是 minimized 误差平方之和来作为目标，从而找到最优模型，这个模型可以拟合观察数据。回归学习最常用的损失函数是平方损失函数，在此情况下，回归问题可以用著名的最小二乘法来解决。最小二乘法就是曲线拟合的一种解决方法。最小二乘法的问题分为两类：线性最小二乘法，非线性最小二乘法。如果是线性的则有闭式解，唯一解。理解为所有点都在某条线上，全拟合好了。非线性的经常需要数值方法来求解。比如：随机梯度下降或者牛顿法等，随机梯度下降也可以解决线性问题。

最小二乘法的思想是，寻求一组解，使拟合值与实际值之差的平方和，即下式 5-5 的值达到最小。

假设有一组包含 M 个未知量的 N 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1M}x_M = h_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2M}x_M = h_2 \\
\cdots \cdots \cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nM}x_M = h_n
\end{cases} \quad (5-5)$$

式 5-5 中 a_{nm} 和 h_n ($n=1 \sim N$; $m=1 \sim M$) 为已知， $N > M$ 。在 $N > M$ 的情况下，一般不存在一组 $(x_1, x_2, \cdots, x_M)$ ，带入上式后，各等式两边都相等，即差值 $\delta = h_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nM}x_M)$ 不可能同时为零。

因此寻求一组解，使拟合值与实际值之差的平方和，即式 5-6 的值达到最小。

$$\Delta = \sum_{i=1}^n (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{iM}x_M - h_i)^2 \quad (5-6)$$

在进行潮汐调和分析时，对某一确定的分潮

$$f_j H_j \cos(\sigma_j t + v_{0j} + u_j - g_j)$$

可化为如下形式

$$f_j \cos(\sigma_j t + v_{0j} + u_j) H_j \cos g_j + f_j \sin(\sigma_j t + v_{0j} + u_j) H_j \sin g_j$$

其中， f_j 、 σ_j 、 t 、 u_j 、 V_{0j} 均为已知或可通过简单计算得出。对应 J 个分潮，则有

$$h = S_0 + \sum_{j=1}^J f_j \cos(\sigma_j t + v_{0j} + u_j) H_j \cos g_j + \sum_{j=1}^J f_j \sin(\sigma_j t + v_{0j} + u_j) H_j \sin g_j \quad (5-7)$$

如果在 n 个时刻 $t = t_1, t_2, \cdots, t_n$ ，有 n 个潮高观测值 $h = h_1, h_2, \cdots, h_n$ ，那么

就可以建立如下由 n 个方程构成的方程组：

$$\begin{cases} S_0 + \sum_{j=1}^J x_j f_j \cos(\sigma_j t_1 + v_0 + u_j) + \sum_{j=1}^J y_j f_j \sin(\sigma_j t_1 + v_0 + u_j) = h_1 \\ S_0 + \sum_{j=1}^J x_j f_j \cos(\sigma_j t_2 + v_0 + u_j) + \sum_{j=1}^J y_j f_j \sin(\sigma_j t_2 + v_0 + u_j) = h_2 \\ \dots\dots\dots \\ S_0 + \sum_{j=1}^J x_j f_j \cos(\sigma_j t_n + v_0 + u_j) + \sum_{j=1}^J y_j f_j \sin(\sigma_j t_n + v_0 + u_j) = h_n \end{cases} \quad (5-8)$$

方程组中 x_j 对应 $H_j \cos g_j$ ， y_j 对应 $H_j \sin g_j$ ，它们和 S_0 共同构成了方程组中的全部未知量。潮汐调和分析的目的正是求出 x_j 与 y_j ，从而求出各个分潮的调和常数 H 和 g 。

为了表示的方便，将方程组写成如下形式

$$\begin{cases} S_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = h_1 \\ S_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = h_2 \\ \vdots \\ S_0 + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = h_n \end{cases} \quad (5-9)$$

其中 $m=2J$ ，即所选分潮数的两倍， S_0 与 x_j 为待求解的未知数。

为了尽量减小噪声 r 对分析结果的影响，使调和常数尽可能接近真值，在实际潮汐分析中，总是希望使用更多的观测数据。因此，方程的数量 n 一般远大于未知数的数量 $m+1$ 。对于这样的矛盾方程组，可以用最小二乘法来求解。把矛盾方程的第 i 列和第 j 列系数提取出来，对应的把第一个数与第一个数相乘，第二个数与第二个数相乘，.....，最后把乘积加起来便能求出 x_j 、 y_j 。

5.1.2 模型求解

(1) M_2 的潮汐调和常数

① 初相角的确定

以 TOPEX/POSEIDON 卫星的发射时间（1992 年 8 月 10 日）为观测数据的起始时间，规定发射时刻为 8 时。

1900 年至 1992 年的闰年数

$$i = \text{int}\left(\frac{Y-1901}{4}\right) = \text{int}\left(\frac{1992-1901}{4}\right) = 22 \text{ (年)}$$

累计日期序数 n 为 1992 年 1 月 1 日至 2017 年 1 月 1 日的天数，即

$$n = (2017-1992) \times 365 + 22 = 9147$$

M_2 的天文初相角

$$v_0 = \mu_1 \tau + \mu_2 s + \mu_3 h' + \mu_4 p + \mu_5 N' + \mu_6 p' + \mu_0 90 = -247166 \quad (5-10)$$

其中：

$$\mu_1 = 2$$

$$\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = \mu_0 = 0$$

$$s = 277.02 + 129.3848(Y-1900) + 13.1764(n+i+\frac{t}{24}) = 132999$$

$$h' = 280.19 - 0.2387(Y - 1900) + 0.9857(n + i + \frac{t}{24}) = 9296$$

$$p = 334.39 + 40.6625(Y - 1900) + 0.1114(n + i + \frac{t}{24}) = 5097$$

$$N' = 100.84 + 19.3282(Y - 1900) + 0.0530(n + i + \frac{t}{24}) = 2365$$

$$p' = 281.22 + 0.0172(Y - 1900) + 0.00005(n + i + \frac{t}{24}) = 283$$

$$\tau = 15t - s + h' = -123583$$

将初相角按照余弦化简得 $v_0 = 154$

② 交点因子 f 和订正交 μ 的确定

分潮 M_2 如果以余弦的形式表示, 则

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}(t) &= \sum_j R_j \cos \theta_j \\ &= \sum_j G(\varphi) \bar{H}_j \cos(\mu_1 \tau + \mu_2 s + \mu_3 h' + \mu_4 p + \mu_5 N' + \mu_6 p' + \mu_0 90)_j \quad (5-11) \\ &= \sum_j G(\varphi) \bar{H}_j \cos(\sigma_j t + v_{0j})\end{aligned}$$

式 5-11 中, $\bar{H}_j$ 为分潮 M_2 的系数 A 或 B。

杜德逊展开的分潮中 $f \equiv 1, \mu \equiv 0$ 这是由于杜德逊展开的分辨率高的结果。

为了使 f 和 μ 更精确, 可令

$$\begin{cases} f \cos \mu = 1 - 0.03733 \cos N' + 0.00052 \cos 2N' + 0.00058 \cos 2p + 0.00021 \cos(2p - N') \\ f \sin \mu = -0.03733 \cos N' + 0.00052 \cos 2N' + 0.00058 \cos 2p + 0.00021 \cos(2p - N') \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} f \cos u = \sum_{m=1}^M \rho_m \cos(\Delta \mu_4^m p + \Delta \mu_5^m N') \\ f \sin u = \sum_{m=1}^M \rho_m \sin(\Delta \mu_4^m p + \Delta \mu_5^m N') \end{cases} \quad (5-12)$$

查 ρ_m 、 $\Delta \mu_4^m$ 、 $\Delta \mu_5^m$ 列表可知, 当 $\rho_m = 0.0005$ 时, $\Delta \mu_4 = 0$ 、 $\Delta \mu_5 = -2$; 当 $\rho_m = 0.0006$ 时, $\Delta \mu_4 = 2$ 、 $\Delta \mu_5 = 0$, $M=8$ 。

因此解式 5-12 得 $f = 1.0343$, $\mu = 0.9044^\circ$ 。

③ 基于最小二乘法求解调和常数

假设有一组包含 M 个未知量的 N 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1M}x_M = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2M}x_M = h_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nM}x_M = h_n \end{cases} \quad (5-13)$$

式 5-13 中 a_{nm} 和 h_n ($n=1 \sim N$; $m=1 \sim M$) 为已知, $N > M$ 。在 $N > M$ 的情况下, 一般不存在一组 $(x_1, x_2, \cdots, x_M)$, 带入式 5-13 后, 各等式两边都相等, 即差值 $\delta = h_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nM}x_M)$ 不可能同时为零。

因此寻求一组解，使拟合值与实际值之差的平方和，式 5-14 的值达到最小

$$\Delta = \sum_{i=1}^n (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{iM}x_M - h_i)^2 \quad (5-14)$$

对于潮汐调和分析，实际水位可以看做是许多调和分潮叠加的结果。在实际分析中只能取其中有限个较重要的分潮，对 M_2 分潮有

$$h = S_0 + \sum_{j=1}^J f_j \cos(\sigma_j t + v_{0j} + u_j) H_j \cos g_j + \sum_{j=1}^J f_j \sin(\sigma_j t + v_{0j} + u_j) H_j \sin g_j \quad (5-15)$$

其中， f_j 、 σ_j 、 t 、 u_j 、 v_{0j} 均为已知或可通过简单计算得出。 J 为选取的分潮个数。选取 19 个上行轨道和下行轨道的交叉点，如图 5.1 所示。

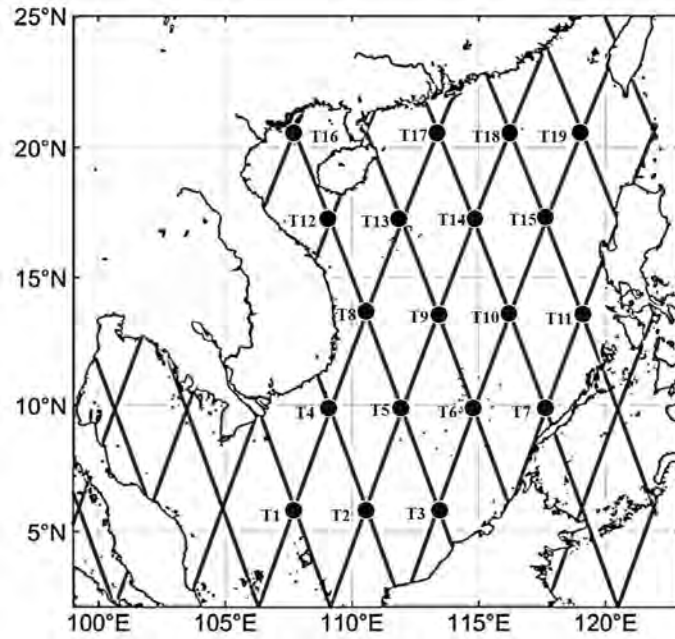


图 5.1 上行轨道和下行轨道交叉点

取探测的潮高的均值见表 5.3，由此可以建立如下由 n 个方程构成的方程组

$$\begin{cases} S_0 + \sum_{j=1}^J x_j f_j \cos(\sigma_j t_1 + v_0 + u_j) + \sum_{j=1}^J y_j f_j \sin(\sigma_j t_1 + v_0 + u_j) = h_1 \\ S_0 + \sum_{j=1}^J x_j f_j \cos(\sigma_j t_2 + v_0 + u_j) + \sum_{j=1}^J y_j f_j \sin(\sigma_j t_2 + v_0 + u_j) = h_2 \\ \dots\dots\dots \\ S_0 + \sum_{j=1}^J x_j f_j \cos(\sigma_j t_n + v_0 + u_j) + \sum_{j=1}^J y_j f_j \sin(\sigma_j t_n + v_0 + u_j) = h_n \end{cases} \quad (5-16)$$

方程组中 x_j 对应 $H_j \cos g_j$ ， y_j 对应 $H_j \sin g_j$ ，它们和 S_0 共同构成了方程组中的全部未知量。潮汐调和分析的目的正是求出 x_j 与 y_j ，从而求出各个分潮的调和常数 H 和 g 。

表 5.3 10 个位置的潮高探测值

交叉点	纬度(°)	经度(°)	潮高(m)
T1	5.9	107.8	1.60
T2	5.9	110.6	1.64
T3	5.9	113.7	1.74
T4	9.8	110.2	1.68
T5	9.8	112	1.70
T6	9.8	115	1.85
T7	9.8	117.9	1.64
T8	13.5	110.6	1.85
T9	13.5	113.7	1.70
T10	13.5	116.4	1.54
T11	13.5	119.1	1.65
T12	17.2	110.2	1.72
T13	17.2	112	1.79
T14	17.2	115	1.64
T15	17.2	117.9	1.64
T16	20.5	107.8	1.62
T17	20.5	113.7	1.72
T18	20.5	116.4	1.77
T19	20.5	119.1	1.68

在实际分析中，不可能事先知道余差值，因此根据式 5-16 得

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 + x_1 f_1 \cos(\sigma_1 t_1 + v_0 + u_1) + x_2 f_2 \cos(\sigma_2 t_1 + v_0 + u_2) + \cdots + x_J f_J \cos(\sigma_J t_1 + v_0 + u_J) \\ + y_1 f_1 \sin(\sigma_1 t_1 + v_0 + u_1) + y_2 f_2 \sin(\sigma_2 t_1 + v_0 + u_2) + \cdots + y_J f_J \sin(\sigma_J t_1 + v_0 + u_J) = h_1 \\ \\ S_0 + x_1 f_1 \cos(\sigma_1 t_2 + v_0 + u_1) + x_2 f_2 \cos(\sigma_2 t_2 + v_0 + u_2) + \cdots + x_J f_J \cos(\sigma_J t_2 + v_0 + u_J) \\ + y_1 f_1 \sin(\sigma_1 t_2 + v_0 + u_1) + y_2 f_2 \sin(\sigma_2 t_2 + v_0 + u_2) + \cdots + y_J f_J \sin(\sigma_J t_2 + v_0 + u_J) = h_2 \\ \\ \dots\dots\dots \\ S_0 + x_1 f_1 \cos(\sigma_1 t_n + v_0 + u_1) + x_2 f_2 \cos(\sigma_2 t_n + v_0 + u_2) + \cdots + x_J f_J \cos(\sigma_J t_n + v_0 + u_J) \\ + y_1 f_1 \sin(\sigma_1 t_n + v_0 + u_1) + y_2 f_2 \sin(\sigma_2 t_n + v_0 + u_2) + \cdots + y_J f_J \sin(\sigma_J t_n + v_0 + u_J) = h_n \end{array} \right.$$

因此

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \left[S_0 + \sum_{j=1}^J x_j f_j \cos(\sigma_j t_i + v_0 + u_j) + \sum_{j=1}^J y_j f_j \sin(\sigma_j t_i + v_0 + u_j) - h_i \right]^2 \quad (5-17)$$

式 5-17 达到最小值的条件是

$$\frac{\partial \Delta}{\partial S_0} = \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} = \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial \Delta}{\partial x_J} = \frac{\partial \Delta}{\partial y_1} = \frac{\partial \Delta}{\partial y_2} = \cdots = \frac{\partial \Delta}{\partial y_J} = 0 \quad (5-18)$$

把矛盾方程的第 i 列和第 j 列系数提取出来，对应的把第一个数与第一个数

相乘，第二个数与第二个数相乘，.....，最后把乘积加起来便能求出 x_j 、 y_j 。

因为 $x_j = H_j \cos g_j$ ， $y_j = H_j \sin g_j$ ，将表 5.3 中 10 组数据带入求出对应的调和常数 H ， g （振幅、迟角），见表 5.4。

表 5.4 M_2 分潮调和常数计算结果

交叉点	振幅 $H(\text{cm})$	迟角 g ($^{\circ}$)
T1	16.34	247.71
T2	15.34	251.73
T3	16.82	253.51
T4	17.03	295.18
T5	17.48	296.25
T6	18.48	303.02
T7	18.92	306.19
T8	16.99	323.04
T9	15.59	325.09
T10	15.89	332.85
T11	16.82	335.06
T12	18.09	228.17
T13	16.34	226.54
T14	13.96	231.81
T15	12.23	231.06
T16	14.14	342.9
T17	29.78	276.03
T18	13.82	281.36
T19	16.36	280.66
平均向量均方根偏差	17.22	282.53

(2) S_2 的潮汐调和常数

① 分潮初相角的确定

由 (1) 可知闰年数 $i = 22$ (年)

累计日期序数 $n = 9147$

M_2 的天文初相角

$$v_0 = \mu_1 \tau + \mu_2 s + \mu_3 h' + \mu_4 p + \mu_5 N' + \mu_6 p' + \mu_0 90 = 240$$

其中

$$\begin{array}{lll} \mu_1 = \mu_2 = 2 & \mu_3 = -2 & \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = \mu_0 = 0 \\ s = 132999 & h' = 9296 & p = 5097 \\ N' = 2365 & p' = 283 & \tau = -123583 \end{array}$$

将初相角按照余弦化简得 $v_0 = 240$ 。

② 交点因子 f 和订正交 μ 的确定

$$\begin{cases} f \cos \mu = 1 + 0.00225 \cos N' + 0.00014 \cos 2p \\ f \sin \mu = 0.00225 \sin N' + 0.00014 \sin 2p \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} f \cos \mu = \sum_{m=1}^M \rho_m \cos(\Delta \mu_4^m p + \Delta \mu_5^m N') \\ f \sin \mu = \sum_{m=1}^M \rho_m \sin(\Delta \mu_4^m p + \Delta \mu_5^m N') \end{cases}$$

由 ρ_m 、 $\Delta \mu_4^m$ 、 $\Delta \mu_5^m$ 列表中的分潮组合得到，当 $\rho_m = 0.00273$ 时， $\Delta \mu_4 = 0$ 、 $\Delta \mu_5 = -1$ ；当 $\rho_m = 0.0052$ 时， $\Delta \mu_4 = 0$ 、 $\Delta \mu_5 = 2$ ， $M=8$ 。
因此解上式得 $f = 0.9979$ ， $\mu = -0.0472^\circ$ 。

③ 基于最小二乘法求解调和常数

根据（1）中的最小二乘法和表 5.3 中的数据，求出 S_2 分潮对应的调和常数 H ， g （振幅、迟角），见表 5.5。

表 5.5 S_2 分潮调和常数计算结果

交叉点	振幅 $H(\text{cm})$	迟角 $g\ (^{\circ})$
T1	5.19	347.97
T2	7.00	350.67
T3	7.77	347.77
T4	7.48	347.17
T5	6.96	338.26
T6	7.54	347.14
T7	7.76	355.64
T8	6.88	258.09
T9	5.95	256.83
T10	5.73	257.54
T11	5.93	258.18
T12	6.50	249.99
T13	6.73	249.49
T14	4.73	237.39
T15	3.43	246.42
T16	3.39	217.21
T17	11.98	251.92
T18	6.11	238.6
T19	5.87	255.81
平均向量均方根偏差	6.71	284.85

（3） K_1 的潮汐调和常数

① 分潮初相角的确定

由（1）可知闰年数 $i = 22$ （年）
累计日期序数 $n = 9147$
 M_2 的天文初相角

$$v_0 = \mu_1 \tau + \mu_2 s + \mu_3 h' + \mu_4 p + \mu_5 N' + \mu_6 p' + \mu_0 90 = 240$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_1 = \mu_2 = \mu_0 = 2 & \quad \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = \mu_0 = 0 \\ s = 132999 & \quad h' = 9296 \quad p = 5097 \\ N' = 2365 & \quad p' = 283 \quad \tau = -123583 \end{aligned}$$

将初相角按照余弦化简得 $v_0 = 146^\circ$ 。

②交点因子 f 和订正交 μ 的确定

$$\begin{cases} f \cos \mu = 1 + 0.1157 \cos N' - 0.0028 \cos 2N' - 0.0002 \cos(2p - N') \\ f \sin \mu = -0.1554 \sin N' + 0.0030 \sin 2N' - 0.0002 \cos(2p - N') \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} f \cos \mu = \sum_{m=1}^M \rho_m \cos(\Delta \mu_4^m p + \Delta \mu_5^m N') \\ f \sin \mu = \sum_{m=1}^M \rho_m \sin(\Delta \mu_4^m p + \Delta \mu_5^m N') \end{cases}$$

查 ρ_m 、 $\Delta \mu_4^m$ 、 $\Delta \mu_5^m$ 表可知, 当 $\rho_m = 0.0001$ 时, $\Delta \mu_4 = 0$ 、 $\Delta \mu_5 = -2$; 当 $\rho_m = 0.1356$ 时, $\Delta \mu_4 = 0$ 、 $\Delta \mu_5 = 1$, $M=8$ 。

因此解上式得 $f = 1.0798$, $\mu = 4.3329^\circ$ 。

③ 基于最小二乘法求解调和常数

根据 (1) 中的最小二乘法和表 5.3 中的数据, 求出 S_2 分潮对应的调和常数 H/g (振幅/迟角), 见表 5.6。

表 5.6 K_1 分潮调和常数计算结果

交叉点	振幅 $H(\text{cm})$	迟角 g°
T1	45.84	369.76
T2	37.37	374.28
T3	35.88	373.66
T4	39.09	315.66
T5	33.53	316.89
T6	32.08	318.85
T7	34.09	322.45
T8	33.55	320.52
T9	32.40	323.49
T10	31.10	323.9
T11	30.22	326.69
T12	24.33	317.63
T13	33.15	318.75
T14	30.50	318.56
T15	26.87	326.47
T16	79.72	312.28
T17	34.00	314.6
T18	27.26	319.49
T19	17.28	332.34
平均向量均方根偏差	36.69	328.75

(4) O_1 的潮汐调和常数

①分潮初相角的确定

由 (1) 可知闰年数 $i = 22$ (年)

累计日期序数 $n = 9147$

M_2 的天文初相角

$$v_0 = \mu_1 \tau + \mu_2 s + \mu_3 h' + \mu_4 p + \mu_5 N' + \mu_6 p' + \mu_0 90 = 240$$

其中

$$\begin{array}{lll} \mu_1 = 1 & \mu_2 = \mu_0 = -1 & \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = 0 \\ s = 132999 & h' = 9296 & p = 5097 \\ N' = 2365 & p' = 283 & \tau = -123583 \end{array}$$

将初相角按照余弦化简得 $v_0 = 8$ 。

②交点因子 f 和订正交 μ 的确定

$$\begin{cases} f \cos \mu = 1 + 0.18844 \cos N' - 0.00568 \cos 2N' - 0.00277 \cos 2p - 0.00388 \cos(2p - 2N') \\ \quad + 0.00083 \cos(p - p_s) - 0.00069 \cos(2p - 3N') \\ f \sin \mu = 0.18844 \cos N' - 0.00568 \cos 2N' - 0.00277 \cos 2p - 0.00388 \cos(2p - 2N') \\ \quad - 0.00083 \cos(p - p_s) + 0.00069 \cos(2p - 3N') \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} f \cos \mu = \sum_{m=1}^M \rho_m \cos(\Delta \mu_4^m p + \Delta \mu_5^m N') \\ f \sin \mu = \sum_{m=1}^M \rho_m \sin(\Delta \mu_4^m p + \Delta \mu_5^m N') \end{cases}$$

查 ρ_m 、 $\Delta \mu_4^m$ 、 $\Delta \mu_5^m$ 表可知, 当 $\rho_m = 0.1885$ 时, $\Delta \mu_4 = 0$ 、 $\Delta \mu_5 = -1$; 当 $\rho_m = 0.0002$ 时, $\Delta \mu_4 = 2$ 、 $\Delta \mu_5 = -1$, $M=8$ 。

因此解上式得 $f = 0.8295$, $\mu = -5.8432^\circ$ 。

③基于最小二乘法求解调和常数

根据 (1) 中的最小二乘法和表 5.3 中的数据, 求出 S_2 分潮对应的调和常数 H , g (振幅、迟角), 见表 5.7。

表 5.7 O_1 分潮调和常数计算结果

交叉点	振幅 $H(\text{cm})$	迟角 g ($^\circ$)
T1	34.80	317.75
T2	32.24	321.11
T3	32.68	327.75
T4	32.03	268.5
T5	30.54	273.49
T6	30.21	272.21
T7	29.71	277.3
T8	30.47	261.97
T9	29.09	261.88

T10	26.63	263.02
T11	28.02	265.6
T12	20.51	250.43
T13	27.44	253.87
T14	25.19	252
T15	27.20	255.04
T16	92.54	245.76
T17	29.16	245.69
T18	26.38	250.03
T19	20.60	244.31
平均向量均方根偏差	35.11	268.83

(5) 调和常数的评价和检验

① 调和常数的评价

由 (1) ~ (4) 得分潮调和常数见表 5.8。

表 5.8 交叉点各分潮的振幅 $H(\text{cm})$ 和迟角 $g(^{\circ})$

交叉点	M_2		S_2		K_1		O_1	
	H	g	H	g	H	g	H	g
T1	16.34	247.71	5.19	347.97	45.84	369.76	34.80	317.75
T2	15.34	251.73	7.00	350.67	37.37	374.28	32.24	321.11
T3	16.82	253.51	7.77	347.77	35.88	373.66	32.68	327.75
T4	17.03	295.18	7.48	347.17	39.09	315.66	32.03	268.5
T5	17.48	296.25	6.96	338.26	33.53	316.89	30.54	273.49
T6	18.48	303.02	7.54	347.14	32.08	318.85	30.21	272.21
T7	18.92	306.19	7.76	355.64	34.09	322.45	29.71	277.3
T8	16.99	323.04	6.88	258.09	33.55	320.52	30.47	261.97
T9	15.59	325.09	5.95	256.83	32.40	323.49	29.09	261.88
T10	15.89	332.85	5.73	257.54	31.10	323.9	26.63	263.02
T11	16.82	335.06	5.93	258.18	30.22	326.69	28.02	265.6
T12	18.09	228.17	6.50	249.99	24.33	317.63	20.51	250.43
T13	16.34	226.54	6.73	249.49	33.15	318.75	27.44	253.87
T14	13.96	231.81	4.73	237.39	30.50	318.56	25.19	252
T15	12.23	231.06	3.43	246.42	26.87	326.47	27.20	255.04
T16	14.14	342.9	3.39	217.21	29.72	312.28	22.54	245.76
T17	29.78	276.03	11.98	251.92	34.00	314.6	29.16	245.69
T18	13.82	281.36	6.11	238.6	27.26	319.49	26.38	250.03
T19	16.36	280.66	5.87	255.81	17.28	332.34	20.60	244.31
RMS	17.22	282.53	6.71	284.85	36.69	328.75	35.11	268.83

经过以上调和分析，可以得到卫星重复轨道交叉点的调和常数，4 个主要分潮上下行轨道的计算结果见表 5.8，其中 H 和 g 分别代表交叉点各分潮的振幅和迟角。通过对 19 个交叉点上下行轨道调和常数的计算结果的分析比较，全日潮 K_1 和 O_1 的平均振幅分别为 36.69 cm 和 35.11 cm，而半日潮 M_2 和 S_2 的平均振幅分别为 17.22 cm 和 6.71cm，可以看出大部分海区呈现比较明显的全

日潮特征。在交叉点 M_2 、 S_2 、 K_1 和 O_1 的振幅和迟角曲线均可可视化，可以看出上下行轨道在交叉点处的计算结果符合良好。

② 调和常数的检验

表 5.9 轨道各交点处与验潮站振幅差和迟角差的比较

交叉点	M_2		S_2		K_1		O_1	
	ΔH	Δg	ΔH	Δg	ΔH	Δg	ΔH	Δg
T1	0.55	4.54	0.39	0.01	4.02	2.49	3.50	5.46
T2	1.07	6.17	0.67	0.08	0.82	4.42	0.46	6.44
T3	1.37	5.64	0.15	4.89	0.81	0.71	1.49	4.41
T4	1.24	3.63	0.16	3.79	0.61	2.69	0.16	3.37
T5	0.10	3.88	0.29	4.51	1.43	2.33	0.79	0.06
T6	0.60	5.46	0.19	6.85	1.24	2.07	1.77	4.16
T7	1.24	4.69	0.14	0.12	1.60	1.9	2.25	2.52
T8	0.30	2.07	0.00	9.77	0.23	4.97	2.24	0
T9	1.53	1.54	0.48	9.08	0.35	6.32	1.86	1.79
T10	1.23	6.08	0.30	6.02	1.37	4.04	1.11	1.1
T11	0.87	6.51	0.14	3.59	1.18	3.44	3.19	0.17
T12	1.37	4.62	0.57	6.87	1.72	4.41	0.39	1.94
T13	1.41	0.62	0.74	4.16	1.61	3.58	0.79	0.78
T14	1.07	5.44	0.06	4.38	2.38	1.28	0.66	3.17
T15	0.16	2.56	0.21	4.24	1.78	8.15	4.70	3.12
T16	6.73	9.14	0.03	3.66	12.76	2.43	16.25	0.21
T17	0.12	0.48	1.08	0.04	0.61	3.38	1.24	1.67
T18	0.40	4.04	1.47	4.95	1.35	5.94	3.44	0.69
T19	4.27	4.07	0.01	10.85	0.50	15.37	2.80	9.46
ΔRMS	1.35	3.43	0.37	3.78	1.92	4.21	2.58	2.66

由于卫星的轨道间隔比较大，为了进一步验证调和和分析结果的可靠性，我们将上述调和和分析得到的四个主要分潮的调和常数与验潮站的调和常数进行比较。表 5.9 给出了轨道各交点处与沿岸验潮站振幅差 $\Delta H(\text{cm})$ 和迟角差 $\Delta g(^{\circ})$ 对比情况。

从表 5.9 可以看出计算结果和验潮站实测结果差别不大，进一步分析可知，四个分潮振幅差 ΔH 的均方根均小于 3cm，最大值和最小值分别为 2.58cm 和 0.37cm。迟角差 $\Delta g(^{\circ})$ 的均方根均小于 5cm，最大值和最小值分别为 4.21cm 和 2.66cm。由于验潮站多在近海区域，近海区域地形变化较为复杂，卫星高度计调和和分析结果与计算结果存在一定差异。经过以上比较，向量均方差均小于 5cm，进一步验证计算结果的可靠性。

5.2 问题二的模型建立与求解

5.2.1 模型建立

(1) 内波基本方程

具有潮频率的内波称为内潮，基于内波动力学方程，利用高度计资料提取内潮信号是一种将分潮中的正压潮和内潮分离的有效方法。内波动力学方程主要分为三大类：

① 平面非线性定形内波基本方程

$$\nabla^2 \psi + \frac{\psi}{C_f^2} N^2 (z - \frac{\psi}{C_f}) = 0 \quad (5-19)$$

② 三维内波基本方程

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_k^2 u = -(\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + f \frac{\partial}{\partial y}) \frac{\partial w}{\partial z}, & \frac{\partial}{\partial t} \nabla_k^2 v = -(\frac{\partial^2}{\partial t \partial y} + f \frac{\partial}{\partial x}) \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \nabla_k^2 p = \rho_o (\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2) \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \nabla_k^2 \rho = \rho_o (\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2) \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\rho_o N^2}{g} \nabla_k^2 w, & \frac{\partial \xi}{\partial t} = w \end{cases} \quad (5-20)$$

边界条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 - \frac{N^2}{g} \frac{\partial}{\partial z}) w + f^2 (\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{N^2}{g} \frac{\partial}{\partial z}) w + N^2(z) \nabla_k^2 w = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial w}{\partial z} + f^2 \frac{\partial w}{\partial z} - g \nabla_k^2 w = \frac{\partial}{\partial t} \nabla_k^2 p_a \\ z=0, \quad w=0, \quad z=-H \end{cases}$$

③ 平行水平流场内波方程

$$\begin{cases} \frac{D}{Dt} (\frac{\partial}{\partial z} \frac{D}{Dt} u) = -[\frac{D}{Dt} (\frac{\partial}{\partial z} w \frac{\partial U}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial x} (\frac{D^2}{Dt^2} + N^2) w] \\ \frac{D}{Dt} (\frac{\partial}{\partial z} \frac{D}{Dt} v) = -[\frac{D}{Dt} (\frac{\partial}{\partial z} w \frac{\partial V}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial y} (\frac{D^2}{Dt^2} + N^2) w] \\ \frac{D}{Dt} \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_o (\frac{D}{Dt^2} + N^2) w \\ g \frac{D}{Dt} (\frac{\rho}{\rho_o}) = N^2 w, \quad \frac{D}{Dt} \xi = w \end{cases} \quad (5-21)$$

边界条件为

$$\begin{cases} w(z=0) = 0 \\ w(z=-H) = 0 \end{cases}$$

其中, ∇^2 表示三维 Laplace 算子, ∇_k^2 表示水平 Laplace 算子, $N^2(z)$ 决定内波的行为, u 和 v 代表水平速度, ρ 代表密度场, p 代表压力场, ξ 代表波高。

(2) 基于多项式的调和常数求解

问题一中调和分析的结果与验潮站的偏差不大,说明根据最小二乘法求解矛盾方程组的结果可靠,为下一步提取四个主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的内潮海表面信号奠定了基础。由于内潮的波长在整个海域保持变化的情况下,多项式拟合方法能较准确地提取整个海区的内潮信号,故相对于利用相同尺度的滑动平均求解,本文拟采用多项式拟合方法对 $H\cos(g)$ 和 $H\sin(g)$ 分别进行沿轨多项式拟合得到的各分潮调和常数,拟合结果代表了正压潮值并不会受到内潮波长变化的影响。最后通过高通滤波的方法滤掉正压潮部分来提取内潮海表面信号,进而实现上行轨道与下行轨道各分潮的潮汐调和常数的正压潮与内潮的分离。

为了便于对沿轨道的各分潮的潮汐调和常数进行正压潮与内潮的分离,本文

对南海地区的星下轨道进行了编号。采用三位数字进行编号，其中第一位代表上行轨道“0”或者下行轨道“1”，后面两位数字代表轨道的序号，具体上行轨道用红色字体表示，下行轨道用蓝色字体表示（例如：上行轨道 001、下行轨道 101），具体的轨道编号如图 5.2 所示。

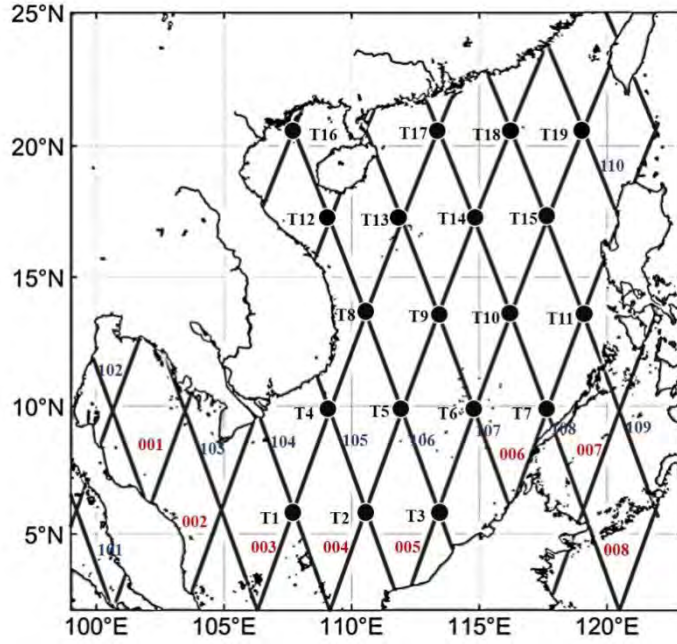


图 5.2 轨道的编号图

① 振幅值 H 和迟角值 g 的求解

通过调和分析构造方程组

$$\begin{cases} S_0 + \sum_{j=1}^J x_j f_j \cos(\sigma_j t_1 + v_0 + u_j) + \sum_{j=1}^J y_j f_j \sin(\sigma_j t_1 + v_0 + u_j) = h_1 \\ S_0 + \sum_{j=1}^J x_j f_j \cos(\sigma_j t_2 + v_0 + u_j) + \sum_{j=1}^J y_j f_j \sin(\sigma_j t_2 + v_0 + u_j) = h_2 \\ \dots\dots\dots \\ S_0 + \sum_{j=1}^J x_j f_j \cos(\sigma_j t_n + v_0 + u_j) + \sum_{j=1}^J y_j f_j \sin(\sigma_j t_n + v_0 + u_j) = h_n \end{cases}$$

方程组中 x_j 对应 $H_j \cos g_j$ ， y_j 对应 $H_j \sin g_j$ ，它们和 S_0 共同构成了方程组中的全部未知量。潮汐调和分析的目的正是求出 x_j 与 y_j ，从而求出各个分潮的调和常数 H 和 g 。

② 拟合多项式的建立

通过上述问题一的调和分析，得到任意一条轨道上的任一观测点的振幅值 H 和迟角值 g 。首先将 H 、 g 转化为 $H \cos(g)$ 和 $H \sin(g)$ ，然后分别对 $H \cos(g)$ 和 $H \sin(g)$ 沿轨进行 $n(n=1, 2, 3, \dots, 10)$ 次多项式拟合，最后通过坐标转换得到内潮的海表面振幅和迟角。

对 $H \cos(g)$ 拟合的多项式为

$$f(y) = a_0 + a_1 y^1 + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n \quad (5-22)$$

对 $H\sin(g)$ 拟合的多项式为

$$g(y) = m_0 + m_1 y^1 + m_2 y^2 + \cdots + m_n y^n \quad (5-23)$$

③ 构造代价函数

$H\cos(g)$ 的代价函数为

$$J(a_n) = \sum_{k=1}^N \left[(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \cdots + a_n y_k^n) - H_k \cos g_k \right] \quad (5-24)$$

$H\sin(g)$ 的代价函数为

$$J(m_n) = \sum_{k=1}^N \left[(m_0 + m_1 y_k + m_2 y_k^2 + \cdots + m_n y_k^n) - H_k \sin g_k \right] \quad (5-25)$$

式 5-24、5-25 中 $k=1, 2, \dots, N$, y_k 代表轨道任一观测点的纬度。

④ 对代价函数求偏导数

对式 5-24 求 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 的偏导数, 并使其为 0 得

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N \left[(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \cdots + a_n y_k^n) - H_k \cos g_k \right] = 0 \\ \sum_{k=1}^N y_k \left[(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \cdots + a_n y_k^n) - H_k \cos g_k \right] = 0 \\ \sum_{k=1}^N y_k^2 \left[(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \cdots + a_n y_k^n) - H_k \cos g_k \right] = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^N y_k^n \left[(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \cdots + a_n y_k^n) - H_k \cos g_k \right] = 0 \end{cases} \quad (5-26)$$

对式 5-25 求 $m_0, m_1, \dots, m_n$ 的偏导数, 并使其为 0 得

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N \left[(m_0 + m_1 y_k + m_2 y_k^2 + \cdots + m_n y_k^n) - H_k \sin g_k \right] = 0 \\ \sum_{k=1}^N y_k \left[(m_0 + m_1 y_k + m_2 y_k^2 + \cdots + m_n y_k^n) - H_k \sin g_k \right] = 0 \\ \sum_{k=1}^N y_k^2 \left[(m_0 + m_1 y_k + m_2 y_k^2 + \cdots + m_n y_k^n) - H_k \sin g_k \right] = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^N y_k^n \left[(m_0 + m_1 y_k + m_2 y_k^2 + \cdots + m_n y_k^n) - H_k \sin g_k \right] = 0 \end{cases} \quad (5-27)$$

引入记号

$$\begin{aligned} M_{i,j} &= \sum_{k=1}^N y_k^{i+j-2} \\ b_i &= \sum_{k=1}^N y_k^{i-1} H_k \cos(g_k) \\ c_i &= \sum_{k=1}^N y_k^{i-1} H_k \sin(g_k) \end{aligned}$$

其中 $i, j=1, 2, \dots, n+1$ 。

进而上式可以表述为

$$\begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,n+1} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & M_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n+1,1} & M_{n+1,2} & \cdots & M_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n+1} \end{bmatrix} \quad (5-28)$$

$$\begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,n+1} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & M_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n+1,1} & M_{n+1,2} & \cdots & M_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{bmatrix} \quad (5-29)$$

求解上述线性方程组可分别求出系数 $a_0, a_1, \dots, a_n, m_0, m_1, \dots, m_n$ 的值。

⑤求解内潮贡献

求解上述线性方程组可分别求出系数 $a_0, a_1, \dots, a_n, m_0, m_1, \dots, m_n$ 的值，并带入式 5-28、5-29 可以得到正压潮值 $f_1(y_k)$ 和 $g_1(y_k)$ 。

将 $H_k \cos(g_k)$ 与其拟合值之差 $f_2(y_k)$ 记为

$$f_2(y_k) = H_k \cos(g_k) - f_1(y_k) \quad (5-30)$$

将 $H_k \sin(g_k)$ 与其拟合值之差 $g_2(y_k)$ 记为

$$g_2(y_k) = H_k \sin(g_k) - g_1(y_k) \quad (5-31)$$

⑥ 求 H_k 、 g_k

通过坐标转换即可求得内潮海表面振幅 H_k 、迟角 g_k 。

5.2.2 模型求解

(1) 调和常数绝均差求解

在问题一中通过调和分析构造矛盾方程组，并根据最小二乘法已经求解出上行轨道和下行轨道在交叉点处的四个主要分潮的振幅值 H 和迟角值 g ，本文选取 3 个上行轨道和 4 条下行轨道各轨道上的观测点以及各观测点分潮的振幅和迟角如表 5.10 所示。

表 5.10 各轨道上的观测点以及各观测点分潮的振幅和迟角

轨道号	交叉点	M_2		S_2		K_1		O_1	
		H	g	H	g	H	g	H	g
003	T1	16.34	247.71	5.19	347.97	45.84	369.76	34.80	317.75
	T4	17.03	295.18	7.48	347.17	39.09	315.66	32.03	268.5
	T8	16.99	323.04	6.88	258.09	33.55	320.52	30.47	261.97
	T13	16.34	226.54	6.73	249.49	33.15	318.75	27.44	253.87
	T17	29.78	276.03	11.98	251.92	34.00	314.6	29.16	245.69
004	T2	15.34	251.73	7.00	350.67	37.37	374.28	32.24	321.11
	T5	17.48	296.25	6.96	338.26	33.53	316.89	30.54	273.49
	T9	15.59	325.09	5.95	256.83	32.40	323.49	29.09	261.88
	T14	13.96	231.81	4.73	237.39	30.50	318.56	25.19	252.05
	T18	13.82	281.36	6.11	238.6	27.26	319.49	26.38	250.03

005	T3	16.82	253.51	7.77	347.77	35.88	373.66	32.68	327.75
	T6	18.48	303.02	7.54	347.14	32.08	318.85	30.21	272.21
	T10	15.89	332.85	5.73	257.54	31.10	323.9	26.63	263.02
	T15	12.23	231.06	3.43	246.42	26.87	326.47	27.20	255.04
	T19	16.36	280.66	5.87	255.81	17.28	332.34	20.60	244.31
106	T3	16.82	253.51	7.77	347.77	35.88	373.66	32.68	327.75
	T5	17.48	296.25	6.96	338.26	33.53	316.89	30.54	273.49
	T8	16.99	323.04	6.88	258.09	33.55	320.52	30.47	261.97
	T12	18.09	228.17	6.50	249.99	24.33	317.63	20.51	250.43
107	T6	18.48	303.02	7.54	347.14	32.08	318.85	30.21	272.21
	T9	15.59	325.09	5.95	256.83	32.40	323.49	29.09	261.88
	T13	16.34	226.54	6.73	249.49	33.15	318.75	27.44	253.87
108	T7	18.92	306.19	7.76	355.64	34.09	322.45	29.71	277.3
	T10	15.89	332.85	5.73	257.54	31.10	323.9	26.63	263.02
	T14	13.96	231.81	4.73	237.39	30.50	318.56	25.19	252
	T17	29.78	276.03	11.98	251.92	34.00	314.6	29.16	245.69
109	T11	16.82	335.06	5.93	258.18	30.22	326.69	28.02	265.6
	T15	12.23	231.06	3.43	246.42	26.87	326.47	27.20	255.04
	T18	13.82	281.36	6.11	238.6	27.26	319.49	26.38	250.03

本文以 004 号轨道的 M_2 分潮为例，在该轨道上的观测点有五个分别为 T1、T4、T8、T13、T17 五个点， M_2 分潮的振幅值 H 和迟角值 g ，见表 5.11。

表 5.11 轨道 003 号上 M_2 分潮的振幅 $H(\text{cm})$ 和迟角 $g(^{\circ})$

交叉点	M_2	
	H	g
T1	16.34	247.71
T4	17.03	295.18
T8	16.99	323.04
T13	16.34	226.54
T17	29.78	276.03

① M_2 分潮的内潮与正压潮分离

以 T1 观测点为例： $H=16.34$ 、 $g=247.71$ ，从而有 $H\cos(g)=-6.20$ 和 $H\sin(g)=-15.12$

从而有各个观测点 M_2 分潮的 $H\cos(g)$ 、 $H\sin(g)$ ，见表 5.12。

表 5.12 M_2 分潮的 $H\cos(g)$ 、 $H\sin(g)$ 值

观测点	M_2			
	H	g	$H\cos(g)$	$H\sin(g)$
T1	16.34	247.71	-14.5249	7.484818
T4	17.03	295.18	16.88694	-2.20276
T8	16.99	323.04	-14.537	8.79402
T13	16.34	226.54	15.37535	5.531192
T17	29.78	276.03	27.06709	-12.4186

② 拟合多项式的建立

$H\cos(g)$ 拟合的多项式为

$$f(y) = a_0 + a_1y^1 + a_2y^2 + \cdots + a_ny^n$$

$H\sin(g)$ 拟合的多项式为

$$g(y) = m_0 + m_1y^1 + m_2y^2 + \cdots + m_ny^n$$

式中 n 代表了多项式拟合的次数, $n = 3 \sim 10$ 。

③ 代价函数的构建

$$J(a_n) = \sum_{k=1}^N [(a_0 + a_1y_k + a_2y_k^2 + \cdots + a_ny_k^n) - H_k \cos g_k]$$

$$J(m_n) = \sum_{k=1}^N [(m_0 + m_1y_k + m_2y_k^2 + \cdots + m_ny_k^n) - H_k \sin g_k]$$

式中 $k = 1, 4, 8, 13, 17$, y_k 代表观测点的纬度。

对式 (3) (4) 分别对 $a_0, a_1, \cdots, a_n, m_0, m_1, \cdots, m_n$ 求偏导数, 当多项式次数 $n = 3$ 时可得方程组

$$\begin{cases} [(a_0 + a_1y_1 + a_2y_1^2 + a_3y_1^3) + \cdots + (a_0 + a_1y_{17} + a_2y_{17}^2 + a_3y_{17}^3)] \\ - [H_1 \cos g_1 + \cdots + H_{17} \cos g_{17}] = 0 \\ [y_1(a_0 + a_1y_1 + a_2y_1^2 + a_3y_1^3) + \cdots + y_{17}(a_0 + a_1y_{17} + a_2y_{17}^2 + a_3y_{17}^3)] \\ - [y_1 H_1 \cos g_1 + \cdots + y_{17} H_{17} \cos g_{17}] = 0 \\ [y_1^2(a_0 + a_1y_1 + a_2y_1^2 + a_3y_1^3) + \cdots + y_{17}^2(a_0 + a_1y_{17} + a_2y_{17}^2 + a_3y_{17}^3)] \\ - [y_1^2 H_1 \cos g_1 + \cdots + y_{17}^2 H_{17} \cos g_{17}] = 0 \\ [y_1^3(a_0 + a_1y_1 + a_2y_1^2 + a_3y_1^3) + \cdots + y_{17}^3(a_0 + a_1y_{17} + a_2y_{17}^2 + a_3y_{17}^3)] \\ - [y_1^3 H_1 \cos g_1 + \cdots + y_{17}^3 H_{17} \cos g_{17}] = 0 \\ [(m_0 + m_1y_1 + m_2y_1^2 + m_3y_1^3) + \cdots + (m_0 + m_1y_{17} + m_2y_{17}^2 + m_3y_{17}^3)] \\ - [H_1 \sin g_1 + \cdots + H_{17} \sin g_{17}] = 0 \\ [y_1(m_0 + m_1y_1 + m_2y_1^2 + m_3y_1^3) + \cdots + y_{17}(m_0 + m_1y_{17} + m_2y_{17}^2 + m_3y_{17}^3)] \\ - [y_1 H_1 \sin g_1 + \cdots + y_{17} H_{17} \sin g_{17}] = 0 \\ [y_1^2(m_0 + m_1y_1 + m_2y_1^2 + m_3y_1^3) + \cdots + y_{17}^2(m_0 + m_1y_{17} + m_2y_{17}^2 + m_3y_{17}^3)] \\ - [y_1^2 H_1 \sin g_1 + \cdots + y_{17}^2 H_{17} \sin g_{17}] = 0 \\ [y_1^3(m_0 + m_1y_1 + m_2y_1^2 + m_3y_1^3) + \cdots + y_{17}^3(m_0 + m_1y_{17} + m_2y_{17}^2 + m_3y_{17}^3)] \\ - [y_1^3 H_1 \sin g_1 + \cdots + y_{17}^3 H_{17} \sin g_{17}] = 0 \end{cases}$$

求解上述线性方程组可得系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n, m_0, m_1, \cdots, m_n$ 。

将 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 带入式 (1) 可得正压潮值 $f_1(y_k)$, 拟合值之差 $f_2(y_k)$ 为

$$f_2(y_k) = H_k \cos(g_k) - f_1(y_k)$$

将 $m_0, m_1, \dots, m_n$ 带入式 (2) 可得正压潮值 $g_1(y_k)$, 拟合值之差 $g_2(y_k)$ 为

$$g_2(y_k) = H_k \cos(g_k) - g_1(y_k)$$

当多项式次数 $n=3$ 时 003 号轨道上的内潮表面振幅 H_k 、迟角 g_k , 从而可以得到轨道 003 号上的各分潮内潮的振幅绝对均差。

(2) 多项式拟合结果及分析

① M_2 分潮

利用多项式拟合方法对得到所有星下观测点各主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的潮汐调和常数沿轨进行 3~10 次多项式拟合来提取四个分潮内潮海表面信号, 图 5.7 是水深分布。

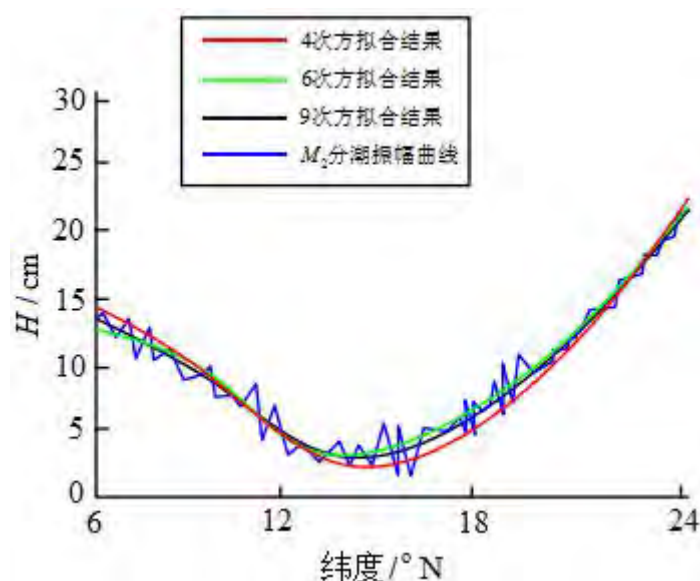


图 5.3 003 号轨道拟合 M_2 分潮振幅曲线

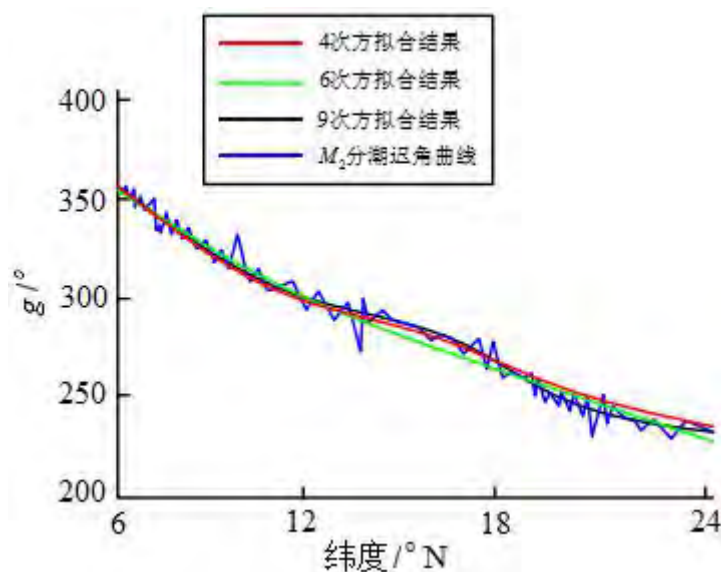


图 5.4 003 号轨道拟合 M_2 分潮迟角曲线

表 5.13 和表 5.14 给出了沿不同轨道 3-10 次多项式拟合得到的 M_2 分潮振幅

和迟角绝均差。由表 5.13 和表 5.14 可以清晰的看出拟合次数与拟合结果的绝均差并没有固定的线性关系。从量级上讲, 7、8、9、10 次多项式拟合的振幅均差基本吻合, 并且明显优于其他次数的拟合结果。相同的是, 多项式拟合的迟角均差所反映的结果和振幅均差也基本一致, 9 次多项式拟合得到的绝均差最小。以 003 号轨道作为研究对象, 采用上述方法进行不同次数的多项式拟合, 并且选取了 4、6、9 次多项式拟合的结果进行了比较, 以显示不同拟合次数滤波结果的差异性, 如图 5.3、5.4 所示。

由表 5.13 可知, 沿 003 号轨道分别进行 4、6、9 次多项式拟合得到的振幅平均绝均差分别为 0.58 cm, 0.57 cm, 0.56cm, 9 次多项式拟合绝均差最小。由图 5.3 可以看出, 虽然 4、6、9 次多项式拟合结果都反映海表面 M_2 分潮振幅的变化趋势, 但不同次数多项式的拟合结果与海表面 M_2 分潮振幅的符合程度存在明显差异。4 次多项式的拟合结果明显偏离调和分析得到的 M_2 分潮振幅值, 不能正确地拟合出正压潮值; 6 次多项式拟合结果在某些位置同样存在偏离现象, 即拟合结果不能准确地表示正压潮值; 而 9 次多项式拟合结果与海表面 M_2 分潮振幅的符合程度最高, 能准确地表示正压潮值, 从而保证内潮提取结果的准确性。结合表 5.13 与图 5.3 可以看出, 多项式拟合结果与海表面 M_2 分潮振幅绝均差越小, 拟合结果与海表面 M_2 分潮振幅的符合程度就越高。表 5.14 与图 5.4 也同样表现这种关系。

表 5.13 沿不同轨道 3~10 次多项式拟合 M_2 分潮振幅的绝均差

轨道	次 数							
	3	4	5	6	7	8	9	10
003	0.69	0.68	0.72	0.72	0.74	0.74	0.74	0.74
004	0.35	0.35	0.45	0.45	0.45	0.38	0.38	0.38
005	0.43	0.44	0.46	0.46	0.45	0.46	0.46	0.46
106	0.34	0.34	0.45	0.44	0.43	0.43	0.44	0.44
107	0.61	0.55	0.55	0.59	0.61	0.61	0.59	0.59
108	0.78	0.78	0.76	0.76	0.76	0.76	0.74	0.74
109	0.58	0.56	0.58	0.56	0.56	0.58	0.58	0.58
均方差	0.60	0.60	0.57	0.57	0.57	0.56	0.53	0.56

表 5.14 沿不同轨道 3-10 次多项式拟合 M_2 分潮迟角的绝均差

轨道	次 数							
	3	4	5	6	7	8	9	10
003	5.95	5.83	6.01	6.23	5.98	5.73	6.09	6.10
004	6.35	6.53	6.89	7.02	7.09	6.89	6.30	6.24
005	8.51	8.46	8.47	7.83	7.85	7.89	7.79	7.80
106	7.32	7.30	7.02	6.98	7.05	7.16	7.23	7.02
107	7.69	7.98	7.62	7.31	7.01	6.98	7.31	7.20
108	5.31	5.62	5.31	5.20	5.01	4.98	5.30	5.32
109	5.61	5.50	5.30	5.98	6.01	5.62	5.31	5.10
均方差	6.68	6.75	6.66	6.65	6.57	6.46	6.38	6.40

如图 5.5、5.6 所示，在海区 $10^{\circ}\sim 15^{\circ}\text{N}$ ， $112^{\circ}\sim 118^{\circ}\text{E}$ 附近， M_2 分潮内潮运动非常活跃，内潮振幅明显大于其他海域，本文得出的结论与利用 T/P 高度计资料得到的资料相近。

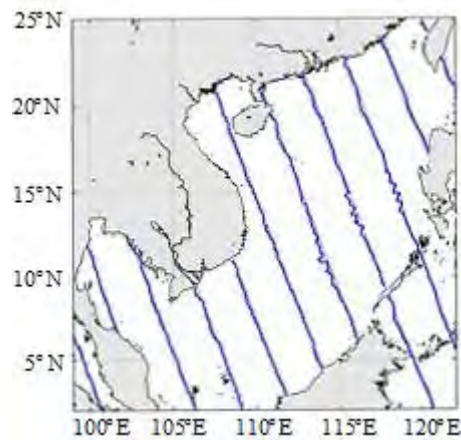


图 5.5 振幅沿上升轨分布

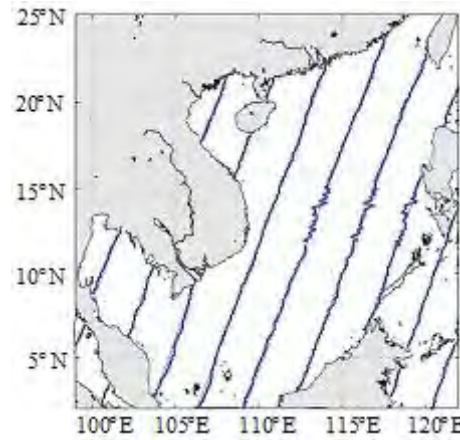


图 5.6 振幅沿下降轨分布

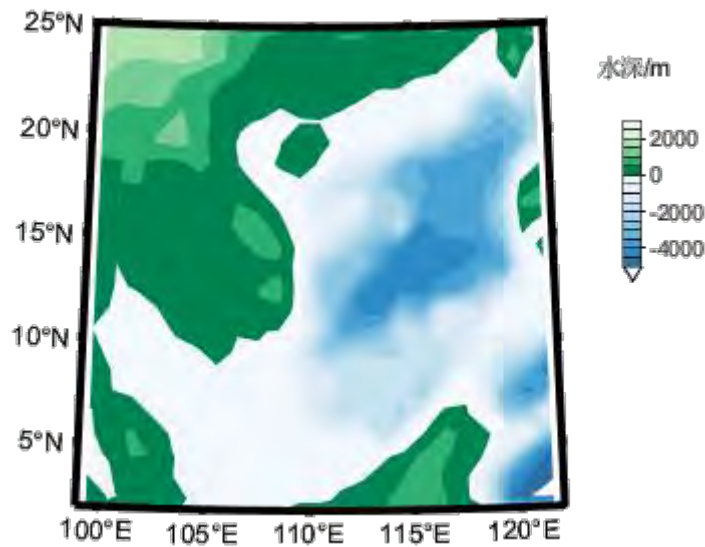


图 5.7 水深分布

② S_2 分潮

表 5.15 和表 5.16 给出了沿不同轨道 3~10 次多项式拟合得到的 S_2 分潮振幅和迟角绝均差。由表 5.15 和表 5.16 可以清晰的看出拟合次数与拟合结果的绝均差并没有固定的线性关系。从量级上讲，8、9、10 次多项式拟合的振幅均差基本吻合，并且明显优于其他次数的拟合结果。相同的是，多项式拟合的迟角均差所反映的结果和振幅均差也基本一致，9 次多项式拟合得到的绝均差最小。以 003 号轨道作为研究对象，采用上述方法进行不同次数的多项式拟合，并且选取了 3、5、9 次多项式拟合的结果进行了比较，以显示不同拟合次数滤波结果的差异性，如图 5.8、5.9 所示。

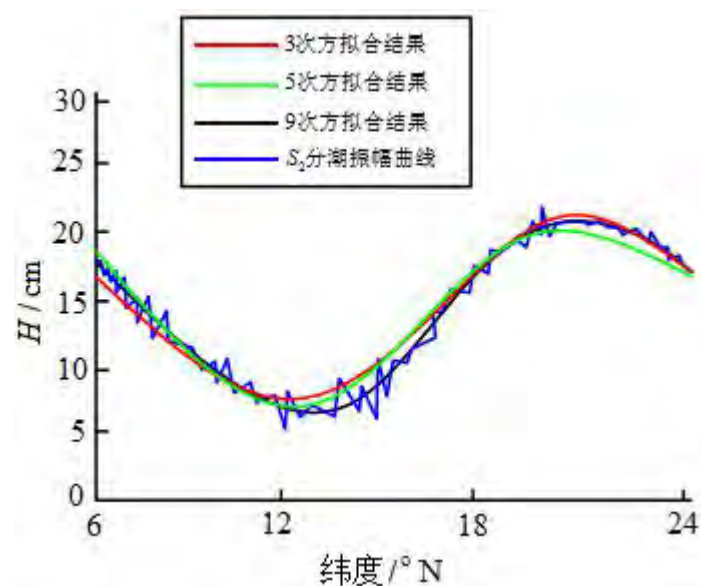


图 5.8 003 号轨道拟合 S_2 分潮振幅曲线

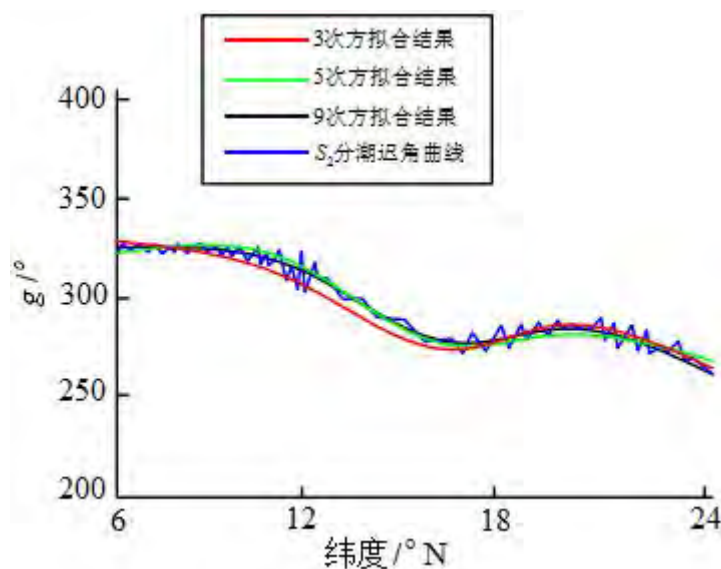


图 5.9 003 号轨道拟合 S_2 分潮迟角曲线

表 5.15 沿不同轨道 3-10 次多项式拟合 S_2 分潮振幅的绝均差

轨道	次 数							
	3	4	5	6	7	8	9	10
003	0.46	0.46	0.46	0.44	0.46	0.46	0.44	0.44
004	0.78	0.78	0.76	0.78	0.78	0.78	0.78	0.78
005	1.02	1.04	1.04	1.02	1.02	1.04	1.04	1.02
106	0.56	0.56	0.58	0.58	0.56	0.56	0.58	0.58
107	0.34	0.34	0.35	0.34	0.34	0.34	0.35	0.35
108	0.23	0.23	0.21	0.25	0.25	0.23	0.23	0.23
109	0.68	0.68	0.66	0.65	0.65	0.65	0.66	0.66
均方差	0.60	0.68	0.59	0.62	0.58	0.58	0.53	0.58

表 5.16 沿不同轨道 3-10 次多项式拟合 S_2 分潮迟角的绝均差

轨道	次 数							
	3	4	5	6	7	8	9	10
003	4.27	3.8	3.45	3.31	3.04	2.83	2.75	2.51
004	5.31	3.23	7.32	5.61	3.92	3.93	4.35	4.34
005	9.03	7.49	7.48	7.48	7.49	7.48	7.47	7.44
106	4.86	4.52	4.11	3.9	3.63	3.33	3.11	2.93
107	8.55	7.73	7.62	6.76	5.46	5.4	5.29	5.23
108	4.99	5.71	5.27	4.79	4.79	4.01	5.21	5.2
109	8.49	8.90	8.83	9.01	8.95	8.62	8.50	8.64
均方差	6.50	5.91	6.30	5.84	5.33	5.09	5.04	5.18

由表 5.16 可知, 沿 003 号轨道分别进行 3、5、9 次多项式拟合得到的迟角平均绝均差分别为 6.50cm, 6.30cm, 5.04cm, 9 次多项式拟合绝均差最小。由图 5.9 可以看出, 虽然 3、5、9 次多项式拟合结果都反映海表面 S_2 分潮迟角的变化趋势, 但不同次数多项式的拟合结果与海表面 S_2 分潮迟角的符合程度存在明显差异。3 次多项式的拟合结果明显偏离调和和分析得到的 S_2 分潮迟角值, 不能正确地拟合出正压潮值; 5 次多项式拟合结果在某些位置同样存在偏离现象, 即拟合结果不能准确地表示正压潮值; 而 9 次多项式拟合结果与海表面 S_2 分潮迟角的符合程度最高, 能准确地表示正压潮值, 从而保证内潮提取结果的准确性。结合表 5.16 与图 5.9 可以看出, 多项式拟合结果与海表面 S_2 分潮迟角绝均差越小, 拟合结果与海表面 S_2 分潮迟角的符合程度就越高。表 5.15 与图 5.8 也同样表现这种关系。

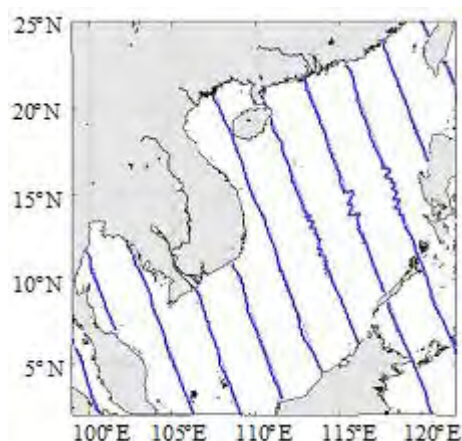


图 5.10 振幅沿上升轨分布

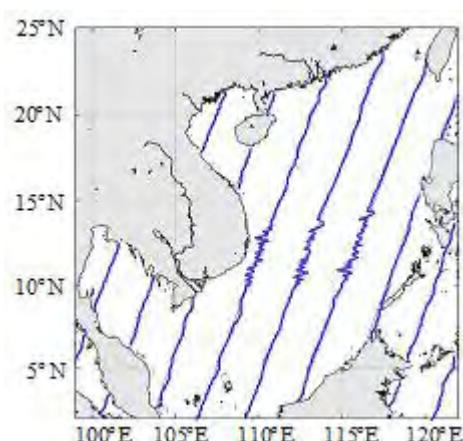


图 5.11 振幅沿下降轨分布

如图 5.10、5.11 所示, 在海区 $10^{\circ}\sim 17^{\circ}\text{N}$, $108^{\circ}\sim 118^{\circ}\text{E}$, S_2 分潮内潮运动活跃, 内潮振幅明显大于其他海域, 本文的结论与利用 T/P 高度计资料得到的资料相近。

③ K_1 分潮

表 5.17 和表 5.18 给出了沿不同轨道 3~10 次多项式拟合得到的 K_1 分潮振幅和迟角绝均差。由表 5.17 和表 5.18 可以清晰的看出拟合次数与拟合结果的绝均差并没有固定的线性关系。从量级上讲, 8、9、10 次多项式拟合的振幅均差基

本吻合，并且明显优于其他次数的拟合结果。相同的是，多项式拟合的迟角均差所反映的结果和振幅均差也基本一致，8次多项式拟合得到的绝均差最小。以003号轨道作为研究对象，采用上述方法进行不同次数的多项式拟合，并且选取了4、5、8次多项式拟合的结果进行了比较，以显示不同拟合次数滤波结果的差异性，如图5.12、5.13所示

由表5.18可知，沿003号轨道分别进行4、5、8次多项式拟合得到的迟角平均绝均差分别为5.94cm，5.26cm，4.69cm，8次多项式拟合绝均差最小。由图5.13可以看出，虽然4、5、8次多项式拟合结果都反映海表面 K_1 分潮迟角的变化趋势，但不同次数多项式的拟合结果与海表面 K_1 分潮迟角的符合程度存在明显差异。4次多项式的拟合结果明显偏离调和与分析得到的 K_1 分潮迟角值，不能正确地拟合出正压潮值；5次多项式拟合结果在某些位置同样存在偏离现象，即拟合结果不能准确地表示正压潮值；而8次多项式拟合结果与海表面 K_1 分潮迟角的符合程度最高，能准确地表示正压潮值，从而保证内潮提取结果的准确性。结合表5.18与图5.13可以看出，多项式拟合结果与海表面 K_1 分潮迟角绝均差越小，拟合结果与海表面 K_1 分潮迟角的符合程度就越高。表5.17与图5.12也同样表现这种关系。

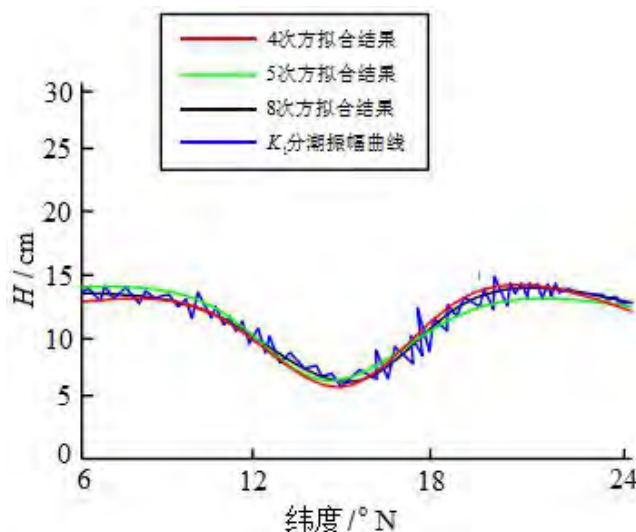


图 5.12 003 号轨道拟合 K_1 分潮振幅曲线

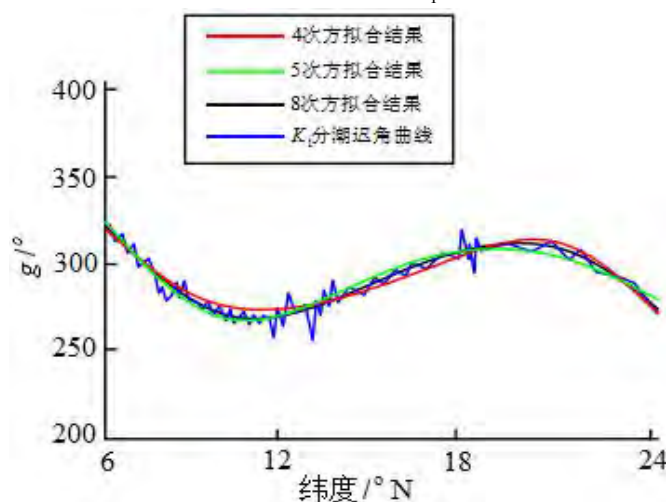


图 5.13 003 号轨道拟合 K_1 分潮迟角曲线

表 5.17 沿不同轨道 3~10 次多项式拟合 K_1 分潮振幅的绝均差

轨道	次 数							
	3	4	5	6	7	8	9	10
003	0.23	0.23	0.21	0.22	0.23	0.23	0.21	0.21
004	0.76	0.76	0.76	0.77	0.77	0.77	0.77	0.76
005	1.02	1.02	1.00	1.00	1.02	1.00	1.02	1.02
106	0.68	0.68	0.66	0.66	0.66	0.68	0.67	0.67
107	0.53	0.53	0.55	0.55	0.53	0.53	0.53	0.53
108	0.34	0.34	0.33	0.33	0.34	0.34	0.33	0.35
109	0.44	0.46	0.46	0.46	0.44	0.44	0.46	0.46
均方差	0.62	0.63	0.58	0.59	0.57	0.45	0.47	0.47

表 5.18 沿不同轨道 3~10 次多项式拟合 K_1 分潮迟角的绝均差

轨道	次 数							
	3	4	5	6	7	8	9	10
003	8.49	8.48	8.48	7.79	7.79	7.79	7.78	7.78
004	5.95	5.71	4.83	4.97	4.3	4.37	3.96	4.02
005	3.74	3.14	2.79	2.65	2.47	2.31	2.29	2.07
106	6.05	5.76	5.89	5.43	4.96	4.55	4.05	4.35
107	7.69	5.36	4.71	4.69	4.1	4.11	4.09	4.66
108	7.49	7.41	4.73	5.45	5.33	4.94	4.5	4.88
109	6.11	5.72	5.38	5.29	5.15	4.78	4.61	4.34
均方差	6.50	5.94	5.26	5.18	4.87	4.39	4.47	4.59

如图 5.14、5.15 所示,在海区 $15^{\circ}\sim 20^{\circ}\text{N}$, $112^{\circ}\sim 118^{\circ}\text{E}$ 附近, K_1 分潮内潮运动非常活跃,内潮振幅明显大于其他海域,本文得出的结论与利用 T/P 高度计资料得到的资料相近。

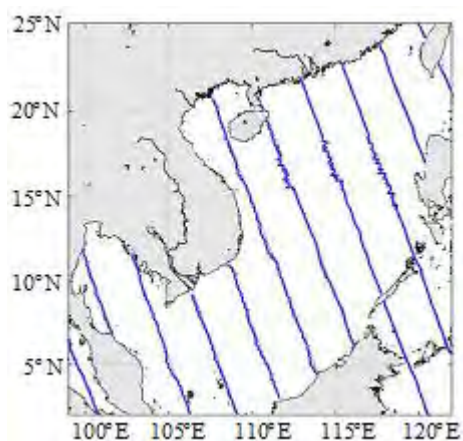


图 5.14 振幅沿上升轨分布

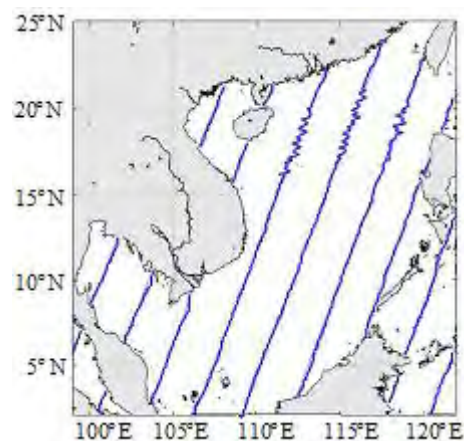


图 5.15 振幅沿下降轨分布

④ O_1 分潮

表 5.19 和表 5.20 给出了沿不同轨道 3~10 次多项式拟合得到的 O_1 分潮振幅和迟角绝均差。由表 5.19 和表 5.20 可以清晰的看出拟合次数与拟合结果的绝均差并没有固定的线性关系。从量级上讲, 7、8、9、10 次多项式拟合的振幅均差

基本吻合，并且明显优于其他次数的拟合结果。相同的是，多项式拟合的迟角均差所反映的结果和振幅均差也基本一致，10次多项式拟合得到的绝均差最小。以 003 号轨道作为研究对象，采用上述方法进行不同次数的多项式拟合，并且选取了 3、5、10 次多项式拟合的结果进行了比较，以显示不同拟合次数滤波结果的差异性，如图 5.16、5.17 所示。

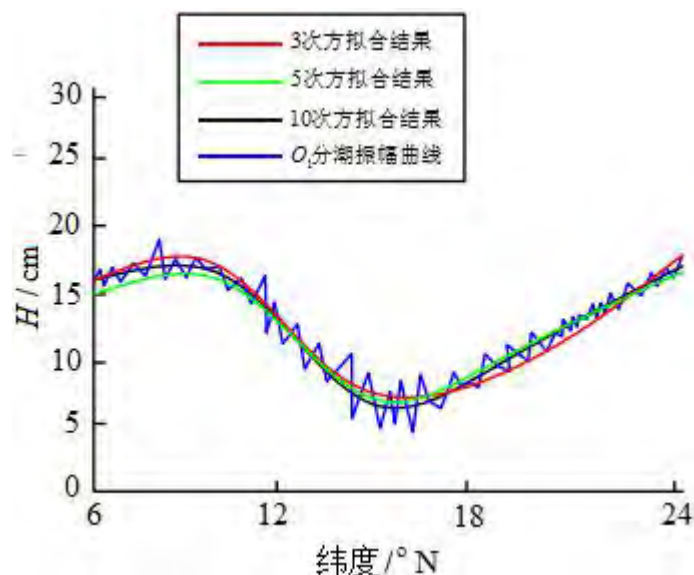


图 5.16 003 号轨道拟合 O_1 分潮振幅曲线

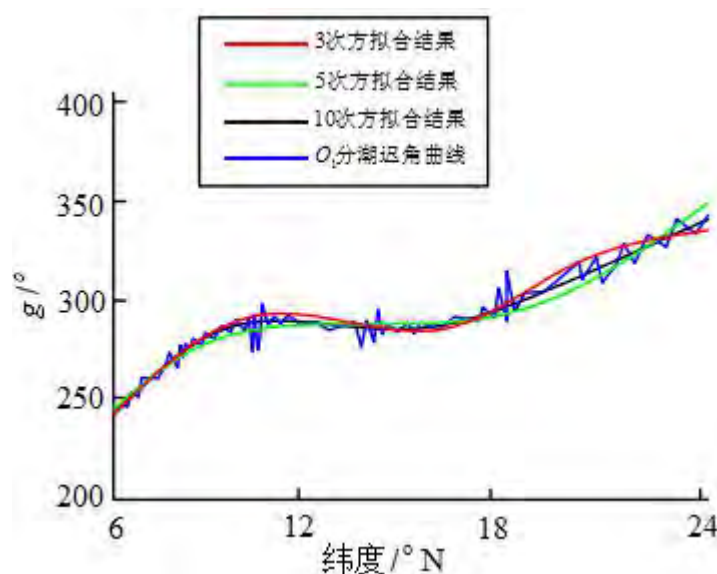


图 5.17 003 号轨道拟合 O_1 分潮迟角曲线

由表 5.19 可知，沿 003 号轨道分别进行 3、5、10 次多项式拟合得到的振幅平均绝均差分别为 0.56cm，0.62cm，0.42cm，10 次多项式拟合绝均差最小。由图 5.16 可以看出，虽然 3、5、10 次多项式拟合结果都反映海表面 O_1 分潮振幅的变化趋势，但不同次数多项式的拟合结果与海表面 O_1 分潮振幅的符合程度存在明显差异。3 次多项式的拟合结果明显偏离调和和分析得到的 O_1 分潮振幅值，不能正确地拟合出正压潮值；5 次多项式拟合结果在某些位置同样存在偏离现象，即

拟合结果不能准确地表示正压潮值；而 10 次多项式拟合结果与海表面 O_1 分潮振幅的符合程度最高，能准确地表示正压潮值，从而保证内潮提取结果的准确性。结合表 5.19 与图 5.16 可以看出，多项式拟合结果与海表面 O_1 分潮振幅绝对均差越小，拟合结果与海表面 O_1 分潮振幅的符合程度就越高。表 5.20 与图 5.17 也同样表现这种关系。

表 5.19 沿不同轨道 3~10 次多项式拟合 O_1 分潮振幅的绝对均差

轨道	次 数							
	3	4	5	6	7	8	9	10
003	0.25	0.25	0.25	0.26	0.26	0.26	0.26	0.25
004	0.58	0.58	0.56	0.56	0.58	0.58	0.58	0.56
005	0.45	0.45	0.45	0.42	0.42	0.42	0.42	0.44
106	0.69	0.69	0.70	0.68	0.68	0.68	0.68	0.68
107	0.77	0.76	0.76	0.77	0.76	0.76	0.76	0.77
108	0.70	0.70	0.72	0.72	0.72	0.72	0.71	0.71
109	0.21	0.21	0.23	0.21	0.22	0.22	0.22	0.22
均方差	0.56	0.62	0.62	0.55	0.52	0.52	0.52	0.42

表 5.20 沿不同轨道 3~10 次多项式拟合 O_1 分潮迟角的绝对均差

轨道	次 数							
	3	4	5	6	7	8	9	10
003	5.31	3.23	7.32	5.61	3.92	3.93	4.35	4.34
004	8.08	7.08	6.53	6.17	6.17	6.53	4.24	4.58
005	5.85	6.03	4.2	2.96	2.84	3.17	2.68	2.29
106	9.24	8.21	7.22	7.71	8.23	9.17	6.02	6.03
107	8.21	7.9	5.12	4.68	4.89	4.87	5.49	5.49
108	7.92	7.41	5.94	5.95	5.95	5.58	5.96	6.33
109	4.77	4.78	4.46	4.41	4.41	4.24	4.23	4.12
均方差	7.05	6.38	5.83	5.36	5.20	5.36	4.71	4.68

如图 5.18、5.19 所示，在海区 $5^{\circ}\sim 10^{\circ}\text{N}$ ， $110^{\circ}\sim 115^{\circ}\text{E}$ 附近， O_1 分潮内潮运动非常活跃，内潮振幅明显大于其他海域，本文得出的结论与利用 T/P 高度计资料得到的资料相近。

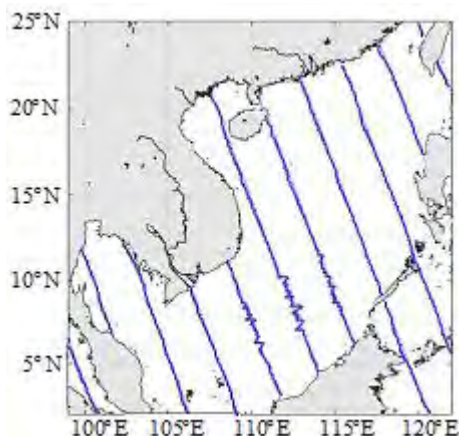


图 5.18 振幅沿上升轨分布

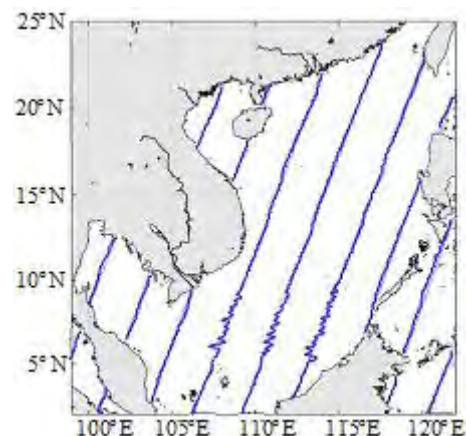


图 5.19 振幅沿下降轨分布

本文通过调和分析得到四个主要分潮（ M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1 ）信号，然后利用多项式拟合方法提取海区内四个主要分潮内潮海表面信号。本文利用多项式拟合方法对沿轨数据 $H\sin(g)$ 和 $H\cos(g)$ 进行分别拟合完全可以得到良好的四个主要分潮内潮海表面信号结果。结果表明，利用该简便方法提取内潮海表面信号非常有效，极大地简化之前复杂的内潮提取过程。

5.3 问题三的模型建立与求解

5.3.1 模型建立

问题一、问题二已经得出沿轨道的各分潮的潮汐调和常数以及对各分潮调和常数进行了正压潮和内潮的分离。要画出各主要分潮的同潮图，现需要对轨道间的点进行提取调和常数。

基于轨道上的调和常数，本文设计一种新的拟合方法。即在研究区域内任选一点 P ，根据该点到其最近两条上(下)行轨的距离比，在这两条上(下)行轨间的下(上)行轨上可以找到与该点具有相同距离比的一系列点，对这些点的调和常数进行多项式拟合，从而可得到该点的调和常数。采用该拟合方法，可以得到研究区域内任意点的调和常数。以下就这种拟合方法进行详细介绍。

(1) 确定与点 p 最近的四条轨道

在研究区域内，上行轨和下行轨交错相交构成了一系列四边形，如图 5.20 所示。若要得到区域内任意一点的调和常数，首先我们要确定这个点具体位于哪个四边形内，通过确定该点所位于的四边形，从而可确定出与该点最近的两条上行轨和两条下行轨。

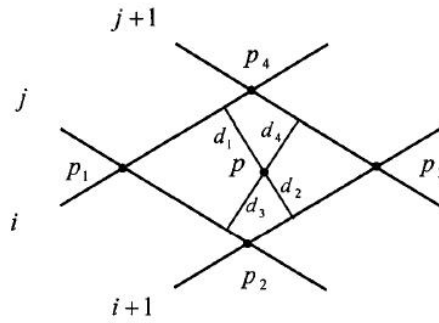


图 5.20 点 p 和与其最近的四条轨道以及到轨道的距离

如图 5.20 所示，第 i 、 $i+1$ 条上行轨与第 j 、 $j+1$ 条下行轨相交围成一个四边形，设该四边形的四个顶点坐标分别为 $p_1(x_1, y_1)$ 、 $p_2(x_2, y_2)$ 、 $p_3(x_3, y_3)$ 、 $p_4(x_4, y_4)$ ，在这个四边形区域内，可近似地认为四边形的每一条边都是条直线。那么点 $p(x, y)$ 位于该四边形内的判断依据是

- ① 点 p 在直线段 p_1p_4 之下 $\leftrightarrow y < \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1}(x - x_1) + y_1$;
- ② 点 p 在直线段 p_2p_3 之上 $\leftrightarrow y < \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}(x - x_3) + y_3$;
- ③ 点 p 在直线段 p_1p_2 之上 $\leftrightarrow y < \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) + y_2$;

$$\textcircled{4} \text{ 点 } p \text{ 在直线段 } p_3p_4 \text{ 之下} \leftrightarrow y < \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}(x - x_4) + y_4;$$

如果同时满足以上四个条件，则确定点 P 位于四边形 $p_1p_2p_3p_4$ 内，从而可确定出与点 p 最近的四条轨道：第 i 、 $i+1$ 条上行轨与第 j 、 $j+1$ 条下行轨。

(2) 计算点 p 到其最近四条轨道的距离

根据点 p 和其所在四边形四个顶点的经纬度，可计算出该点到其所在四边形四条边的距离，进而可得点 p 到其最近四条轨道的距离。在此，以计算点 p 到边 p_1p_4 的距离为例来说明。

① 计算 Δpp_1p_4 三条边的长度

利用球面上两点间的距离公式

$$L = R \cdot \arccos[\sin\beta_1\sin\beta_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)] \quad (5-32)$$

式 5-32 中 R 为地球半径， α_1 、 α_2 分别为两点的经度， β_1 、 β_2 分别为两点的纬度，可以计算出 Δpp_1p_4 三条边的长度。

② 计算 Δpp_1p_4 的面积

根据三角形面积公式

$$s = \sqrt{l(l - pp_1)(l - pp_4)(l - p_1p_4)} \quad (5-33)$$

式 5-33 中 $l = \frac{pp_1 + pp_4 + p_1p_4}{2}$ ，可以计算出 Δpp_1p_4 的面积。

③ 计算点 p 到 p_1p_4 的距离

Δpp_1p_4 的面积还可以表示为

$$s = \frac{d_1 \times p_1p_4}{2} \quad (5-34)$$

式 5-34 中 d_1 为点 p 到的距离，从而可以计算出

$$d_1 = \frac{2\sqrt{l(l - pp_1)(l - pp_4)(l - p_1p_4)}}{p_1p_4} \quad (5-35)$$

其中 $l = \frac{pp_1 + pp_4 + p_1p_4}{2}$ 。

同理，我们可计算出点 p 到其它三条边 p_2p_3 、 p_1p_2 、 p_3p_4 的距离 d_2 、 d_3 、 d_4 。从而可知点 P 到第 i 、 $i+1$ 条上行轨的距离 d_1 、 d_2 ，到第 j 、 $j+1$ 条下行轨的距离 d_3 、 d_4 (如图 5.20 所示)。

④ 轨道间点的调和常数的拟合

根据该点到其最近的两条上(下)行轨间的距离比，在这两条上(下)行轨间的下(上)行轨上可以找到与该点具有相同距离比的一系列点，对这些点的调和常数进行多项式拟合，根据拟合得到的多项式从而得到该点的调和常数。

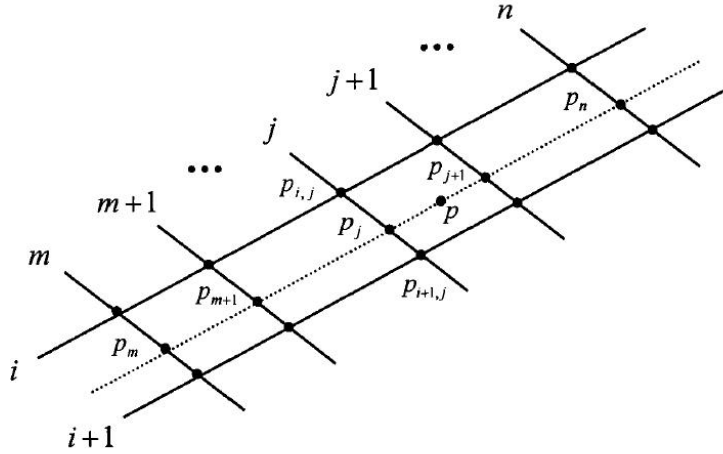


图 5.21 点 P 以及上行轨间的下行轨上与其具有相同距离比的一系列点

在此,以拟合上行轨与下行轨上的一系列点得到点 P 的调和常数为例来详细说明。

1) 如图 5.21 所示,点 p 位于第 i 和 $i+1$ 第条上行轨之间,在这两条上行轨间又有 $n-m+1$ 条下行轨。根据点 p 到这两条上行轨间的距离比,在 $n-m+1$ 条下行轨上可以确定出与点 p 具有相同距离比的一系列点 $p_m, p_{m+1}, \dots, p_j, p_{j+1}, \dots, p_n$ 。

例如在第 j 条下行轨上可确定出点 p_j

$$o\bar{p} = w_1 \times o\bar{p}_{i,j} + w_2 \times op_{i+1,j} \quad (5-36)$$

其中 0 为坐标原点, w_1 、 w_2 分别为点 p 到第 i 和第 $i+1$ 条上行轨的权重,且

$$w_1 = \frac{d_2}{d_1 + d_2}, \quad w_2 = \frac{d_1}{d_1 + d_2}。$$

2) 根据问题二中的多项式拟合方法,可以得到轨道上任意点的函数值 $\hat{f}(y)$ 、 $\hat{g}(y)$, 其中 $\hat{f}(y) = H\cos(g)$ 、 $\hat{g}(y) = H\sin(g)$ 所以我们可得到 $p_m, p_{m+1}, \dots, p_j, p_{j+1}, \dots, p_n$ 这一系列点相应的函数值 $H_j\cos(g_j)$ 、 $H_j\sin(g_j)$, 其中 $j = m, m+1, \dots, n$ 。

3) 对上述 $n-m+1$ 个点的函数值 $H_j\cos(g_j)$ 、 $H_j\sin(g_j)$ ($j = m, m+1, \dots, n$) 分别进行 3~10 次的多项式拟合(方法同问题二)。依据残差的大小,选择最佳拟合次数

$$f(y) = a_0 + a_1y^1 + a_2y^2 + \dots + a_ny^n$$

$$g(y) = m_0 + m_1y^1 + m_2y^2 + \dots + m_ny^n$$

根据拟合得到的多项式可获取点 p 的函数值 $\hat{f}(y)$ 、 $\hat{g}(y)$: $\hat{f}(y) = H\cos(g)$, $\hat{g}(y) = H\sin(g)$ 最后通过坐标转化,可得该点的振幅(H)和迟角(g)。

同理,拟合下行轨间上行轨上的一系列点也可得到点 p 的振幅和迟角。

综上所述,研究区域内的任意点,可以通过拟合上行轨上的点,也可以通过拟合下行轨上的点来获取该点的振幅和迟角。本文依据拟合点的个数进行选取,如果上行轨上的拟合点的个数多于下行轨上的拟合点的个数,则选择通过拟合上

行轨上的点获得该点的振幅和迟角；反之，则选择通过拟合下行轨上的点获得该点的振幅和迟角。

5.3.2 模型求解

基于本文上述设计的一种新的拟合方法，即在研究区域内任选一点，根据该点到其最近两条上(下)行轨的距离比，在这两条上(下)行轨间的下(上)行轨上可以找到与该点具有相同距离比的一系列点，对这些点的调和常数进行多项式拟合，从而可得到该点的调和常数。由此得到南海的各主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的同潮图如下列所示。

本文设计的这种拟合方法可以推广到世界开阔海域的任何分潮。本文利用此方法获得南海的各主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的调和常数，并将所得计算结果分别与验潮站资料中的各个分潮的结果进行比较。

(1) 与验潮站资料的对比

① M_2 分潮与验潮站资料的对比

由于卫星的轨道间隔比较大，为了进一步验证根据上述设计的拟合方法所获得计算结果，我们将调和与分析得到的四个主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的调和常数与 6 个验潮站(位置见图 5.22)资料进行了对比，并给出了计算结果与沿岸验潮站实测结果的对比情况。

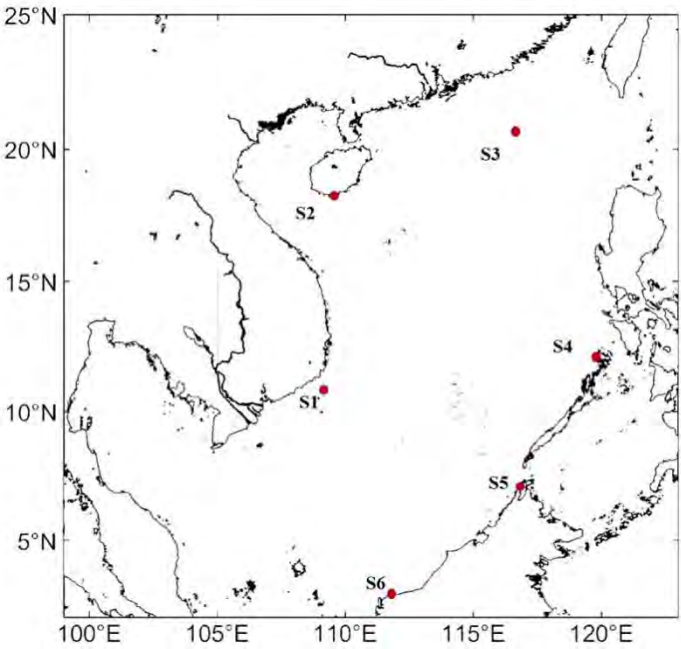


图 5.22 验潮站位置

表 5.21 根据拟合方法得到 M_2 分潮的调和常数与验潮站资料的比较

验潮站	°E/°N	ΔH	Δg
S1	109.2/11.883	2.01	2.63
S2	109.533/18.217	2.38	2.40
S3	116.717/20.683	0.09	1.60
S4	119.95/11.8	1.65	4.23

S5	116.85/6.883	1.40	3.89
S6	118.583/4.95	2.03	2.67
RMS		1.60	2.90

从表 5.21 可以看出，计算结果与验潮站实测结果差别不大，进一步分析可知，验潮站的振幅差和矢量差的均方根分别是 1.60cm 和 2.90cm，振幅差的迟角差的最小值分别是 0.09cm 和 1.60cm。利用本文设计的拟合方法得到的 M_2 分潮的调和常数与验潮站资料所显示的吻合性较大，因此证明本文所设计的拟合方法具有较大的可行性。

根据本文设计的拟合方法所得到的同潮图（图 5.24、5.25）与验潮站的同潮图（图 5.23）比较显示： M_2 分潮的振幅线与验潮站振幅线走势基本吻合，迟角线也大致接近，具有良好的匹配性。进一步证实本文所设计的拟合方法具有可实行性。

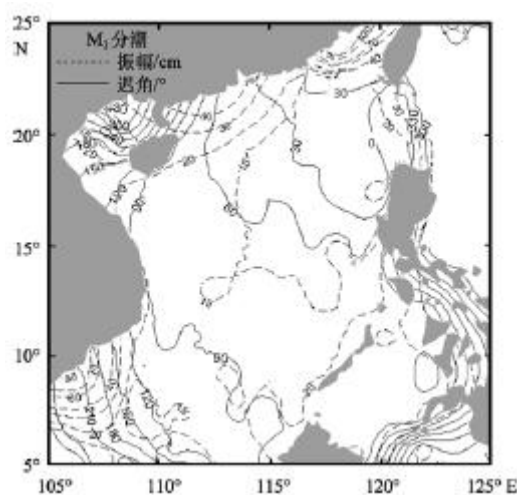


图 5.23 验潮站 M_2 分潮同潮图

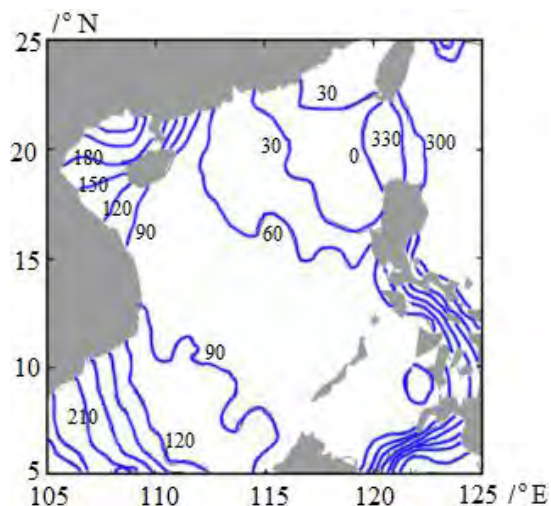


图 5.24 迟角的同潮图(单位: °)

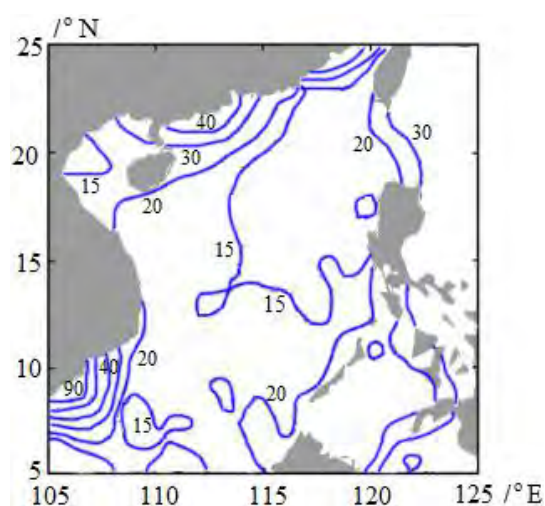


图 5.25 振幅的同潮图(单位: cm)

② S_2 分潮与验潮站资料的对比

表 5.22 根据拟合方法得到 S_2 分潮的调和常数与验潮站资料的比较

验潮站	$^{\circ}\text{E}/^{\circ}\text{N}$	ΔH	Δg
S1	109.2/11.883	1.89	2.36
S2	109.533/18.217	2.61	2.85
S3	116.717/20.683	0.97	1.30
S4	119.95/11.8	1.49	4.53
S5	116.85/6.883	1.68	4.89
S6	118.583/4.95	2.83	3.67
RMS		1.91	3.27

从表 5.22 可以看出，计算结果与验潮站实测结果差别不大，进一步分析可知，验潮站的振幅差和矢量差的均方根分别是 1.91cm 和 3.27cm，振幅差的迟角差的最小值分别是 0.97cm 和 1.30cm。利用本文设计的拟合方法得到的 S_2 分潮的调和常数与验潮站资料所显示的吻合性较大，因此证明本文所设计的拟合方法具有较大的可行性。

根据本文设计的拟合方法所得到的同潮图（图 5.27、5.28）与验潮站的同潮图（图 5.26）比较显示： S_2 分潮的振幅线与验潮站振幅线走势基本吻合，迟角线也大致接近，具有良好的匹配性。证实本文所设计的拟合方法具有可实行性。

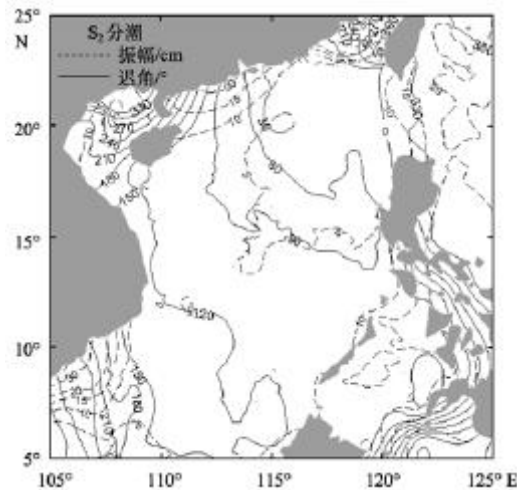


图 5.26 验潮站 S_2 分潮同潮图

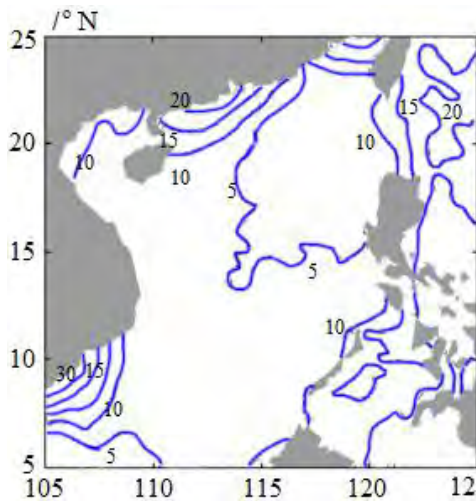


图 5.27 迟角的同潮图(单位: $^{\circ}$)

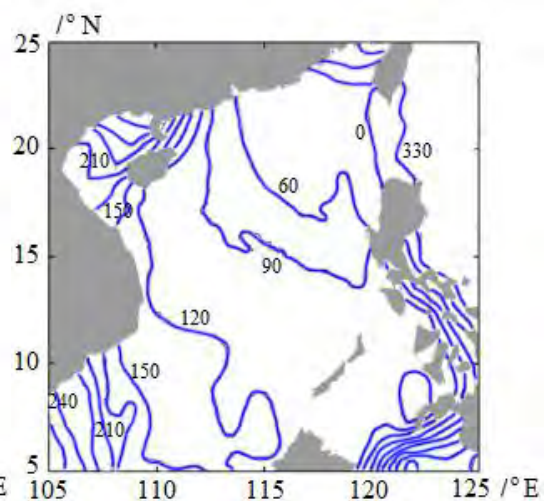


图 5.28 振幅的同潮图(单位: cm)

③ K_1 分潮与验潮站资料的对比

表 5.23 根据拟合方法得到 K_1 分潮的调和常数与验潮站资料的比较

验潮站	$^{\circ}\text{E}/^{\circ}\text{N}$	ΔH	Δg
S1	109.2/11.883	1.69	2.33
S2	109.533/18.217	1.98	2.64
S3	116.717/20.683	0.89	1.20
S4	119.95/11.8	1.65	4.23
S5	116.85/6.883	1.39	3.79
S6	118.583/4.95	2.23	3.17
RMS		1.64	2.89

从表 5.23 可以看出, 计算结果与验潮站实测结果差别不大, 进一步分析可知, 验潮站的振幅差和矢量差的均方根分别是 1.64cm 和 2.89cm, 振幅差的迟角差的最小值分别是 0.89cm 和 1.20cm。利用本文设计的拟合方法得到的 K_1 分潮的调和常数与验潮站资料所显示的吻合性较大, 因此证明本文所设计的拟合方法具有较大的可行性。

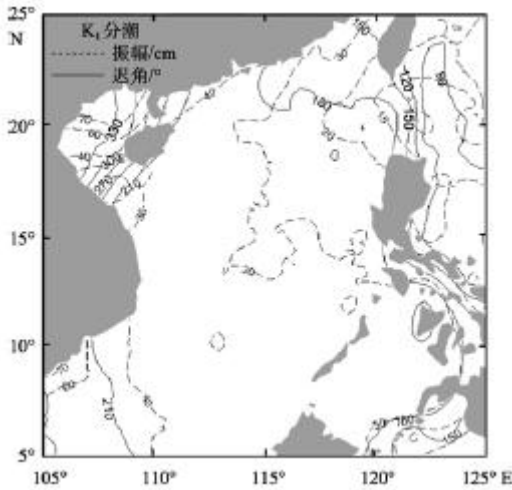


图 5.29 验潮站 K_1 分潮同潮图

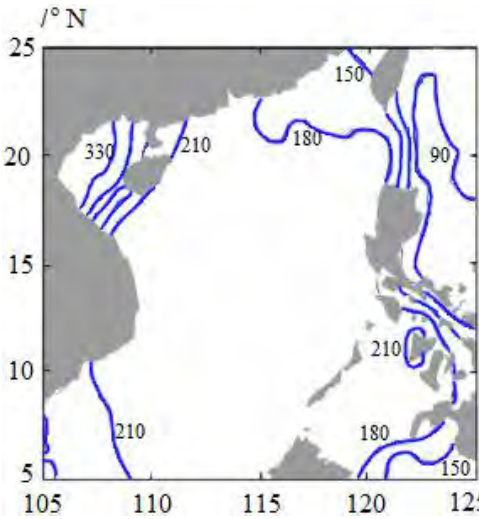


图 5.30 迟角的同潮图(单位: $^{\circ}$)

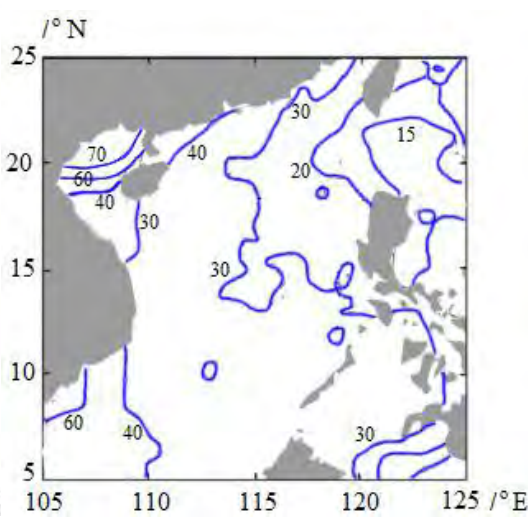


图 5.31 振幅的同潮图(单位: cm)

根据本文设计的拟合方法所得到的同潮图（图 5.30、5.31）与验潮站的同潮图（图 5.29）比较显示： K_1 分潮的振幅线与验潮站振幅线走势基本吻合，迟角线也大致接近，具有良好的匹配性。进一步证实本文所设计的拟合方法具有可行性。

④ O_1 分潮与验潮站资料的对比

表 5.24 根据拟合方法得到 O_1 分潮的调和常数与验潮站资料的比较

验潮站	$^{\circ}\text{E}/^{\circ}\text{N}$	ΔH	Δg
S1	109.2/11.883	2.31	2.93
S2	109.533/18.217	2.48	2.50
S3	116.717/20.683	0.79	1.20
S4	119.95/11.8	2.65	4.83
S5	116.85/6.883	1.97	3.69
S6	118.583/4.95	2.13	2.77
RMS		2.06	2.99

从表 5.24 可以看出，计算结果与验潮站实测结果差别不大，进一步分析可知，验潮站的振幅差和矢量差的均方根分别是 2.06cm 和 2.99cm，振幅差的迟角差的最小值分别是 0.79cm 和 1.20cm。利用本文设计的拟合方法得到的 O_1 分潮的调和常数与验潮站资料所显示的吻合性较大，因此证明本文所设计的拟合方法具有较大的可行性。

根据本文设计的拟合方法所得到的同潮图（图 5.33、5.34）与验潮站的同潮图（图 5.32）比较显示： O_1 分潮的振幅线与验潮站振幅线走势基本吻合，迟角线也大致接近，具有良好的匹配性。进一步证实本文所设计的拟合方法具有可行性。

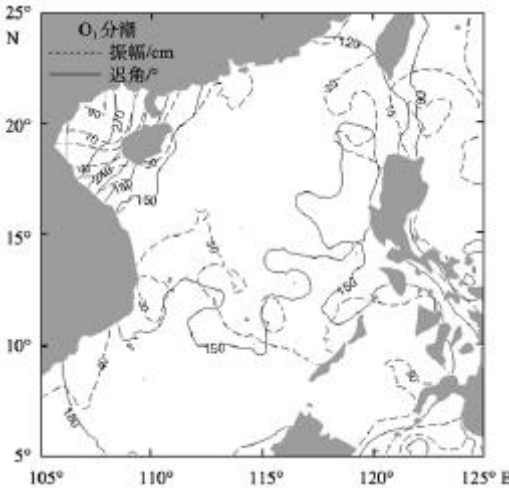


图 5.32 验潮站 O_1 分潮同潮图

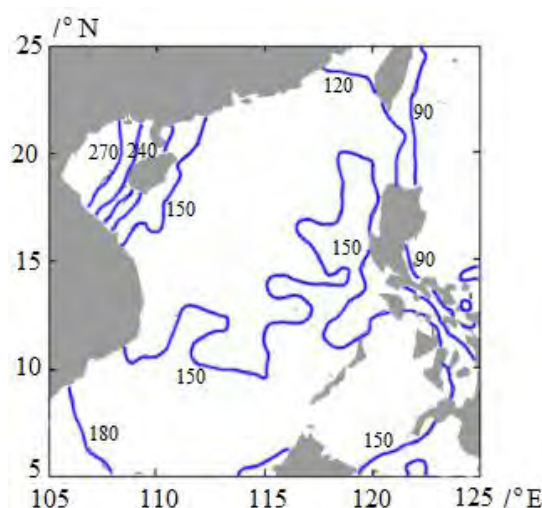


图 5.33 迟角的同潮图(单位: °)

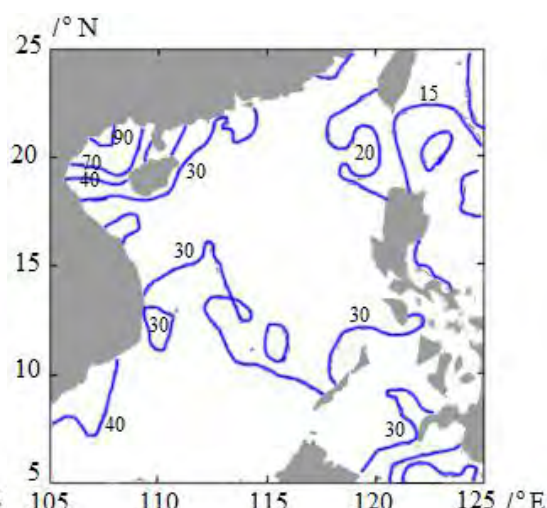


图 5.34 振幅的同潮图(单位: cm)

根据本文设计的拟合方法模型,可计算出南海研究区域分潮的调和常数,获取了 T/P 卫星每个星下点处 4 个主要分潮的调和常数,通过拟合计算,给出了南海区域 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的同潮图(图 3)。由图 3 可见,南海的潮汐主要以全日潮为主。我们所研究的四个主要分潮在深海区的传播速度较快,等值线相对来说比较稀疏,这四个主要分潮的位相变化比较慢,粗略估计分潮在深海区中的传播速度约为 800 km/h,此结果与水深为 4 000 m 左右的重力波的传播速度基本吻合。相比而言,南海大部分区域中 K_1 分潮的振幅都大于 25cm。同时在北部湾区域中, K_1 分潮的振幅要显著地大于其他海区,最大振幅甚至接近 45cm。 O_1 分潮相对 K_1 分潮的调和常数较小一些,但在南海大部分区域 O_1 分潮振幅都也在 30cm 左右,最大振幅达到 92cm。相对于全日潮,南海大部分海区的半日潮影响较小,但其传播较为复杂,振幅变化也相对来说不显著,大小约为 15cm, M_2 最大振幅超过 90 cm。北部湾里面 M_2 分潮的振幅在 20 cm 左右,依据得出的同潮图同样可以看出, S_2 分潮在南海的振幅较小,大部分海区小于 10 cm,只在个别入海口处比较大,最大值超过 30 cm。

本文通过利用拟合模型以及以上的比较,给出 4 个主要分潮同潮图,均验证了利用此方法对南海潮波系统研究提供了较可靠的资料依据,有一定的参考价值。

5.4 问题四的分析与求解

5.4.1 问题分析

在对沿轨道的潮汐调和常数分离、拟合的过程中,利用了高通滤波法,多项式进行拟合,能够确定出需利用的特定函数的最佳(高)次数。以下对其进行具体简述。

(1) 高通滤波原理

高通滤波是一种过滤方式,使高频信号能正常通过,而低于设定临界值的低频信号则被阻隔、减弱。但是阻隔、减弱的幅度则会依据不同的频率以及不同的滤波目的改变,高通滤波也被叫做低频去除过滤,是低通滤波的对立。

采用高通滤波的方法滤掉正压潮部分提取内潮海表面信号,可实现上行轨道

与下行轨道各分潮潮汐调和常数正压潮与内潮的分离，如图 5.36 所示。

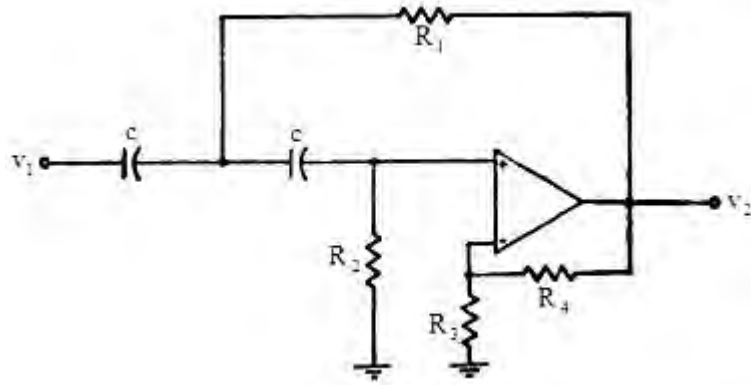
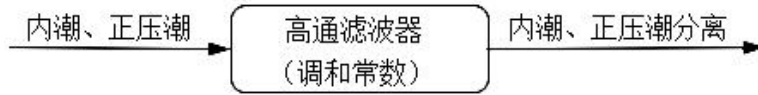


图 5.35 常见高通滤波器原理图（二阶 VCVS）



（2）多项式拟合

令 $H = H\cos(g)$, $g = H\sin(g)$, 对 $H\cos(g)$ 、 $H\sin(g)$ 进行 n 次多项式拟合。拟合多项式为

$$f(y) = a_0 + a_1y + a_2y^2 + \cdots + a_ny^n$$

等价函数

$$J(a_n) = \sum_{k=1}^N [(a_0 + a_1y_k + a_2y_k^2 + \cdots + a_ny_k^n) - A_k \cos G_k]^2, (k=1 \sim N)$$

式中, y_k 代表轨道任意观测点的纬度。

某一轨道任意观测点 $p(x, y)$, x 代表经度, y 代表纬度。对 J 求偏导, 令偏导数为 0, 得到关于的线性方程组并求解, 将结果带入拟合多项式得到正压潮值 $f_1(y_k)$ 。记

$$f_2(y_k) = H_k \cos(g_k) \text{ 或 } f_2(y_k) = H_k \sin(g_k)$$

通过坐标转换得到振幅和迟角。

5.4.2 问题求解

利用多项式拟合方法对得到所有星下观测点各主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的潮汐调和常数沿轨进行 3~15 次多项式拟合来提取四个分潮内潮海表面信号, 表 5.25 和表 5.26 给出了沿不同轨道 3~15 次多项式拟合得到的各分潮振幅和迟角的均方差。

表 5.25 各分潮振幅绝均差的均方差

分潮	次数												
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
M_2	0.60	0.60	0.57	0.57	0.57	0.56	0.53	0.51	0.50	0.57	0.59	0.61	0.61
S_2	0.60	0.68	0.59	0.62	0.58	0.58	0.51	0.58	0.51	0.56	0.60	0.60	0.63
K_1	0.62	0.63	0.58	0.59	0.57	0.45	0.47	0.47	0.43	0.46	0.50	0.51	0.51
O_1	0.56	0.62	0.62	0.55	0.52	0.52	0.52	0.42	0.41	0.41	0.43	0.51	0.52

表 5.26 各分潮迟角绝均差的均方差

分潮	次数												
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
M_2	6.68	6.75	6.66	6.65	6.57	6.46	6.38	6.40	6.36	6.37	6.42	6.50	6.53
S_2	6.50	5.91	6.30	5.84	5.33	5.09	5.04	5.08	5.03	5.03	5.05	5.09	5.09
K_1	6.50	5.94	5.26	5.18	4.87	4.39	4.47	4.59	4.39	4.40	4.43	4.49	4.49
O_1	7.05	6.38	5.83	5.36	5.20	5.36	4.71	4.62	4.65	4.67	4.67	4.70	4.72

本文以 003 号轨道作为研究对象, 进行不同次数的多项式拟合并进行了比较, 以显示不同拟合次数滤波结果的差异性。表 5.25 和表 5.26 给出了沿不同轨道 3~15 次多项式拟合得到的四个主要分潮振幅和迟角绝均差。由表 5.25 和表 5.26 可以看出拟合次数与拟合结果的绝均差并没有固定的线性关系。从量级上讲, 9、10、11、12 次多项式拟合的振幅均差基本吻合, 并且明显优于其他次数的拟合结果。相同的是, 多项式拟合的迟角均差所反映的结果和振幅均差也基本一致, 但不同次数多项式的拟合结果与海表面分潮振幅和迟角的符合程度存在明显差异, 其中四个主要分潮均能够确定出需利用的特定函数的最佳次多项式, 使得拟合得到的绝均差最小, 拟合结果与海表面主要分潮振幅的符合程度最高, 能准确地表示正压潮值, 从而保证内潮提取结果的准确性。

5.4.3 与问题三的联系

上述结论对第 3 问的求解有帮助。

上述结果表明, 对于不同的分潮多项式拟合的最优次数不同, 其中 M_2 、 S_2 的最优拟合次数为 11 次, K_1 的拟合次数为 10 次, O_1 的拟合次数为 12 次。所以在第三问的求解过程中, 可以对沿轨道上的点以及轨道外的点的各个分潮进行最优次数的多项式拟合, 缩小了求解区间, 得到的数据更加符合真实值, 同潮图的信息就会显示的更加准确。

六、模型评价及展望

6.1 模型评价

根据题设要求及所提供的原始数据, 本文完成了所有的建模、优化及求解, 针对每个问题都给出了相应的解答和注释, 简要总结如下:

针对问题一, 本文建立基于最小二乘法的调和分析模型, 通过对 19 个 TOPEX/POSEIDON 卫星高度计星下观测点所在轨道交叉点的海面高度异常原始数据的处理, 应用基于最小二乘法调和分析模型求解, 得到 4 个主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的调和常数振幅 H 和迟角 g , 经过与验潮站长期检测给出调和常数的对比分析, 证明本模型根据 TOPEX/POSEIDON 卫星高度计资料所提取的各分潮调和常数与验潮站的分潮调和常数吻合, 说明了本模型的有效性。

针对问题二, 本文建立多项式拟合模型, 通过对 3 个上行轨道和 4 个下行轨道上的观测点高度计的原始数据进行提取 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 4 个分潮的调和常数, 应用多项式拟合模型的对各轨道上的各个观测点的 $H\cos(g)$ 和 $H\sin(g)$ 分别进行次数 $n=3\sim 10$ 的拟合, 得到各个观测点分潮的内潮表面振幅和迟角, 进而得到每条轨道上的各分潮内潮的振幅和迟角绝对均差。结果表明, 利用该简便方法提取内潮海表面信号非常有效, 极大地简化之前复杂的内潮提取过程。

针对问题三, 本文建立一种基于距离的新型拟合模型, 通过该点到其最近两条上下行轨的距离比, 在上下行轨道上找到与该点具有相同距离比的一系列点, 应用新型拟合模型, 可得到该点的调和常数。进而求得轨道外任意一点的调和常数, 将所得计算结果分别与 7 个验潮站资料中的各个分潮的结果进行比较, 可得该模型的计算结果与验潮站实测结果差别不大, 得到的各分潮振幅和迟角的同潮图与验潮站的同潮图走势基本吻合, 具有良好的匹配性。证明本文所设计的拟合方法具有的可实行性。

针对问题四, 本文以问题二的多项式拟合模型为基础, 进行了次数 $n=3\sim 15$ 的多项式拟合, 得到各分潮振幅和迟角的均方差。可以看出拟合次数与拟合结果的绝对均差并没有固定的线性关系。但不同次数多项式的拟合结果与海表面分潮振幅和迟角的符合程度存在明显差异。确定出各分潮需利用的特定函数的最佳次数多项式, 使得拟合得到的绝对均差最小, 拟合结果与海表面主要分潮振幅的符合程度最高, 保证内潮提取结果的准确性。在第三问的求解过程中, 可以对沿轨道上的点以及轨道外的点的各个分潮进行最优次数的多项式拟合, 缩小了求解区间, 得到的数据更加符合真实值, 同潮图的信息就会显示的更加准确。

6.2 模型评价

这种依据 TOPEX/POSEIDON 卫星高度计资料, 利用基于最小二乘法的调和分析模型提取南海星下观测点各分潮的调和常数, 及利用多项式拟合模型沿轨道对南海观测点各分潮进行正压潮和内潮分离的方法, 可以推广到开阔海域内的任何分潮。抛弃了曾经对已有与现存的模式和方法相比, 抛弃了曾经对已有观测结果进行插值方法, 本文的拟合方法使计算量大大减少。这种拟合方法的提出不仅增加了一种获取同潮图的方法, 而且也拓宽了高度计资料的应用, 使区域海洋潮汐的数值模拟更加简单有效, 并在评价结果上更加优秀。

参考文献

- [1] 孙丽艳. 渤黄东海潮汐底摩擦系数的优化研究[D].中国海洋大学,2006.
- [2] 范丽丽. 风暴潮数值同化研究和高度计资料拟合方法研究[D].中国海洋大学,2011.
- [3] Fan L L, Wang B, Lv X Q. Cotidal Charts near Hawaii Derived from TOPEX/Poseidon Altimetry Data[J]. Journal of Atmospheric & Oceanic Technology, 2011, 28(4):606-614.
- [4] 王斌,张晓爽,吕咸青.高度计资料提取内潮信号的方法[J].解放军理工大学学报(自然科学版),2015,16(03):266-272.
- [5] Wang Y, Fang G, Wei Z, et al. Cotidal charts and tidal power input atlases of the global ocean from TOPEX/Poseidon and JASON-1 altimetry[J]. Acta Oceanologica Sinica, 2012, 31(4):11-23.
- [6] Yanagi T, Morimoto A, Ichikawa K. Co-tidal and Co-range Charts for the East China Sea and the Yellow Sea Derived from Satellite Altimetric Data[J]. Journal of Oceanography, 1997, 53.
- [7] 王如云,童章龙,陈耀登.基于连续函数最小二乘法的潮汐迭代调和分析方法[J].中国水运(学术版),2007(03):116-118.
- [8] 赵云霞,魏泽勋,王新怡.利用 T/P 卫星高度计资料调和分析南海潮汐信息[J].海洋科学,2012,36(05):10-17.
- [9] 暴景阳,许军.中国沿岸验潮站潮汐调和常数的精度评估[J].海洋测绘,2013,33(01):1-4.
- [10] Wang Y.H, FANG G. H, Wei Z. X. Cotidal charts and tidal power input atlases of the global ocean from TOPEX/Poseidon and JASON-1 altimetry[J].Acta Oceanol. Sin,2012, 31, 4, 11-23.
- [11] 王庆业,王湘文.南海西北部正压潮的数值模拟[J].广东海洋大学学报,2009,29(03):64-67.

附 录

绘制2°~25°N,99°~122°E地图

```
clear all

clc

bndry_lon=[-128.8 -128.8 -128.3 -128 -126.8 -126.6 -128.8];

bndry_lat=[49 50.33 50.33 50 49.5 49 49];

clf;

m_proj('lambert','lon',[99 122],'lat',[2,25],'rectbox','on');

m_gshhs_i('color','k');

m_gshhs_i('speckle','color','k');

m_line(bndry_lon,bndry_lat,'linewi',2,'color','k');

m_hatch(bndry_lon,bndry_lat,'single',30,5,'color','k');

m_grid('linewi',2,'linest','none','tickdir','out','fontsize',12);

title('2°~25°N,99°~122°E','fontsize',14);

m_text(-128,48,5,{'Pacific','Ocean'},'fontsize',18);
```

绘制 2°~25°N,99°~122°E 水深图程序

```
clear all

clc

m_proj('lambert','lon',[99 122],'lat',[2,25]);

[CS,CH]=m_tbase('contourf',[-5000:500:3000],'edgecolor','none');

m_grid('linestyle','none','tickdir','out','linewidth',3);

colormap([ m_colmap('blues',40); m_colmap('greens',24)]);

brighten(.5);

ax=m_contfbar(1,[.5 .8],CS,CH);

title(ax,{'水深/m','});
```

调和分析程序

```
clear all

clc

fid=fopen('TP.dat','r');

data0=fread(fid,inf,'float',[744,268*315]);

fclose(fid);

lont=99:0.05:122;

latt=2:0.05:25

lat=zeros(315*268,1);

for i=1:315

lat(268*i-267:268*i)=latt(i);

end

n=268*315;

m=12*24;

a=zeros(n,4);

p=zeros(n,4);

for i=1:n

[nameu,fu,tidecon,xout]=t_tide(data0(:,i),'interval',1,'start
time',[1980,8,1,0,0,0],'latitude',lat(i));

[row, col] = size(struct.name);

for j = 1:row

if (strcmp(struct.name(j,:), 'M2 '))

a(i,3)=struct.tidecon(3,1);
```

```

p(i,3)=struct.tidecon(3,3);

end

if (strcmp(struct.name(j,:), 'S2 '))

a(i,3)=struct.tidecon(3,1);

p(i,3)=struct.tidecon(3,3);

end

if (strcmp(struct.name(j,:), 'K1 '))

a(i,3)=struct.tidecon(3,1);

p(i,3)=struct.tidecon(3,3);

end

if (strcmp(struct.name(j,:), 'O1 '))

a(i,3)=struct.tidecon(3,1);

p(i,3)=struct.tidecon(3,3);

end

end

end

```

对振幅的 n 次多项式拟合程序

```
clear all
```

```
clc
```

```
x=[Hcos(g)];
```

```
y=[ $\tilde{H}_k$ ];
```

```
P=polyfit(x,y,n);
```

```
xi=0:0.1:3.5;
```

```
yi=polyval(P,xi);
```

```
plot(xi,yi,x,y,'r*');
```

```
[a,b]=polyfit(x,y,n)
```

对迟角的 n 次多项式拟合程序

```
clear all
```

```
clc
```

```
x=[ Hsin(g)];
```

```
y=[ $\tilde{g}_k$ ];
```

```
P=polyfit(x,y,n);
```

```
xi=0:0.1:3.5;
```

```
yi=polyval(P,xi);
```

```
plot(xi,yi,x,y,'r*');
```

```
[a,b]=polyfit(x,y,n)
```

同潮图作图程序

```
clc;

clear all;

aa=load('rho_m2.dat');

cc=load('thet_m2.dat');

bb=flipud(aa);

cc=flipud(cc);

bb(find(bb<0.01))=NaN;

cc(find(cc<0.01))=NaN;

m_proj('miller','lon',[117.50 126.83],'lat',[34 41]);

lon1=linspace(117.50,126.83,56);

lat1=linspace(34,41,43);

[lon1,lat1]=meshgrid(lon1,lat1);

[c,h]=m_contour(lon1,lat1,bb,15);

m_coast('patch',[0 0 0])

hold on

dd=cc;

dd(find(dd>340|dd<20))=NaN;

[c,h]=m_contour(lon1,lat1,dd,[30:30:330]);

clabel(c,h,'FontSize',10, 'Color','r','Rotation',0);

hold on

a2=find(cc>340&cc<360);
```

```

cc(a2)=cc(a2)-360;

[c,h]=m_contour(lon1,lat1,cc,[0 0]);

clabel(c,h,'FontSize',10, 'Color','r','Rotation',0);

m_gshhs_h('save','topodata');

m_usercoast('topodata','patch',[0 0 0],'linewidth',1.2);

m_grid('box','fancy')

xlabel('Longitude')

ylabel('Latitude')

title('等振幅线与同潮时线')

```

调和分析样本程序

```
echo on
```

```
echo on
```

```
load t_example
```

```
infername=['P1';'K2'];
```

```
inferfrom=['K1';'S2'];
```

```
infamp=[.33093;.27215];
```

```
infphase=[-7.07;-22.40];
```

```
[tidestruc,pout]=t_tide(tuk_elev, 'interval',1, 'start',tuk_time(1), 'latitude',69+27/60,  
'inference',infername,inferfrom,infamp,infphase, 'shallow','M10', 'error','linear',  
'synthesis',1);
```

```
echo off
```

```
clf;
```

```
orient tall;
```

```
subplot(411);
```

```
plot(tuk_time-datenum(1975,1,0),[tuk_elev pout]);
```

```
line(tuk_time-datenum(1975,1,0),tuk_elev-pout,'linewi',2,'color','r');
```

```
xlabel('Days in 1975');
```

```
ylabel('Elevation (ft)');
```

```
text(190,5.5,'Original Time series','color','b');
```

```
text(190,4.75,'Tidal prediction from Analysis','color',[0 .5 0]);
```

```
text(190,4.0,'Original time series minus Prediction','color','r');
```

```
title('Demonstration of t\_tide toolbox');
```

```

subplot(412);

fsig=tidestruc.tidecon(:,1)>tidestruc.tidecon(:,2); % Significant peaks

semilogy([tidestruc.freq(~fsig),tidestruc.freq(~fsig)], [.0005*ones(sum(~fsig),1),tidestruc.tidecon(~fsig,1)]', '-r');

line([tidestruc.freq(fsig),tidestruc.freq(fsig)], [.0005*ones(sum(fsig),1),tidestruc.tidecon(fsig,1)]', 'marker', '.', 'color', 'b');

line(tidestruc.freq, tidestruc.tidecon(:,2), 'linestyle', ':', 'color', [0 .5 0]);

set(gca, 'ylim', [.0005 1], 'xlim', [0 .5]);

xlabel('frequency (cph)');

text(tidestruc.freq, tidestruc.tidecon(:,1), tidestruc.name, 'rotation', 45, 'vertical', 'base');

ylabel('Amplitude (ft)');

text(.27, 4, 'Analyzed lines with 95% significance level');

text(.35, 2, 'Significant Constituents', 'color', 'b');

text(.35, 1, 'Insignificant Constituents', 'color', 'r');

text(.35, .05, '95% Significance Level', 'color', [0 .5 0]);

subplot(413);

errorbar(tidestruc.freq(~fsig), tidestruc.tidecon(~fsig,3), tidestruc.tidecon(~fsig,4), 'r');

hold on;

errorbar(tidestruc.freq(fsig), tidestruc.tidecon(fsig,3), tidestruc.tidecon(fsig,4), 'o');

hold off;

set(gca, 'ylim', [-45 360+45], 'xlim', [0 .5], 'ytick', [0:90:360]);

xlabel('frequency (cph)');

ylabel('Greenwich Phase (deg)');

```

```

text(.27,330,'Analyzed Phase angles with 95% CI');

text(.35,290,'Significant Constituents','color','b');

text(.35,250,'Insignificant Constituents','color','r');

subplot(414);

ysig=tuk_elev;

yerr=tuk_elev-pout;

nfft=389;

bd=isnan(ysig);

gd=find(~bd);

bd([1:(min(gd)-1) (max(gd)+1):end])=0;

ysig(bd)=interp1(gd,ysig(gd),find(bd));

[Pxs,F]=pwelch(ysig(isfinite(ysig)),hanning(nfft),ceil(nfft/2),nfft,1);

Pxs=Pxs/2;

yerr(bd)=interp1(gd,yerr(gd),find(bd));

[Pxe,F]=pwelch(yerr(isfinite(ysig)),hanning(nfft),ceil(nfft/2),nfft,1);

Pxe=Pxe/2;

semilogy(F,Pxs);

line(F,Pxe,'color','r');

xlabel('frequency (cph)');

ylabel('m^2/cph');

text(.17,1e4,'Spectral Estimates before and after removal of tidal energy');

text(.35,1e3,'Original (interpolated) series','color','b');

text(.35,1e2,'Analyzed Non-tidal Energy','color','r');

```