

“华为杯”第十五届中国研究生

数学建模竞赛

题目

基于卫星高度计海面高度异常资料

获取潮汐调和常数方法及应用

摘要:

本文主要通过对 TOPEX/POSEIDON 卫星高度计在若干位置点观测得到的高度信息,在相关理论和经验公式的基础上,通过最小二乘法提取分潮调和常数。进一步,在相关数学模型基础上,沿轨道方向对各分潮的潮汐调和常数进行正压潮和内潮的分离,并作出各主要分潮的同潮图。所有模型均以验潮站数据作为参考值,以期获得观测点数量阈值、拟合函数阶数等与模型精度之间的关系,最终获得最优调和常数相关模型。具体工作详述如下:

针对问题一,通过对该调和常数模型分析可看出,各分潮的调和常数与潮高观测值存在线性关系,该模型的求解需采用调和常数线性最小二乘法模型。另一方面,资料中给出的部分沿轨道星下观测点所对应的观测次数较少,若引入调和常数计算将严重影响结果精度,故使用观测数阈值模型评估能有效提取分潮的观测次数最小值。此外,沿轨道星下观测点与潮汐验潮点的地理位置不完全一致,地理位置的差距对潮汐调和常数的影响较大,因此提出了误差模型,其能匹配离验潮点位置最近的观测点来检验模拟得到的潮汐调和常数。参数估计过程中,假定除了四个分潮(M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1)外,其他分潮对实际水位的影响可忽略不计。将调和常数最小二乘模型、阈值模型及误差反馈模型有机结合起来,构成了问题一最终需要的调和常数估计模型——**H-g-阈值-误差模型**。经分析,当观测位置观测数阈值为 75 时(即某位置观测数据大于 75 则计入模型计算),计算得到的各主要分潮的调和常数较为理想。判断依据为,模型仿真结果与所有实际观测值振幅最大误差基本在 ± 10 cm 以内,平均误差小于 5 cm。四个分潮中 K_1 分潮振幅误差最小, M_2 分潮振幅误差最大。对于迟角,大部分观测站误差均小于 10 度,少数观测站绝对误差出现超过 50 度的现象,主要原因可能是原始调和常数计算模型中参数设置有一定的误差。因此本文的解题过程中,均选取观测次数大于 75 的沿轨道星下观测点数据。将各分潮调和常数与验潮站进行比较,得到 M_2 分潮的振幅差的均方根为 5.8328 cm,迟角差的均方根为 9.9258°。 S_2 分潮的振幅差的均方根为 4.7543 cm,迟角差的均方根为 10.7530°。 K_1 分潮的振幅差的均方根为 7.6919 cm,迟角差的均方根为 18.9871°。 O_1 分潮的振幅差的均方根为 10.1969

cm, 迟角差的均方根为 7.8207° 。说明本文的结果具有较高计算精度, 为问题 2 内潮信号与正压潮信号的分离奠定了扎实基础。

针对问题二, 需要对沿轨道各分潮潮汐调和常数进行正压潮和内潮的分离, 本文为此建立了沿轨分离模型。首先对数据进行分段预处理。对数据进行初步分析可知, 给出的数据总共可分为 20 条轨道, 将这 20 段轨道逐一标号, 并分段提取观测数据。在正压潮和内潮的分离问题上, 参考相关文献, 采用了多项式拟合的方法对问题 1 中求出的调和常数进行展开。首先将幅度 H 和迟角 g 转化为极坐标形式 $H\cos g$ 和 $H\sin g$, 并分别进行拟合, 然后通过构造代价函数, 将拟合过程转换为求解 n 个方程构成的线性方程组, 最后采用最小二乘法求解该类方程分离得到该分潮的正压潮属性。在拟合过程中, 选取拟合次数为 3~15 次, 经过误差比较、分系, 可得到 **11 次多项式拟合结果与海表面分潮振幅的符合程度最高**, 能准确地表示正压潮值, 从而保证内潮提取结果的准确性, **其幅度误差均在 2 cm 以内, 迟角误差则不超过 2°** 。正文中给出了四个主要分潮的内潮和正压潮的振幅与迟角分布图。

针对问题三, 由于沿轨道星下观测点数据有限, 只能得到一定数量的数据。现需要绘制出南海的各主要分潮的同潮图, 则需要得到研究区域内的任意点的调和常数。本文建立了两种数学模型, 分别是基于**多项式拟合的求解任意点调和常数的数学模型**和**二维空间属性插值模型**。针对第一种模型, 我们需要对数据进行预处理, 得到轨道交点坐标, 在研究区域内任选一点, 得到该点到其最近两条上(下)行轨的距离比, 在这两条上(下)行轨间的下(上)行轨上可以找到与该点具有相同距离比的一系列点, 对这些点的调和常数进行多项式拟合。针对第二种模型, 本文主要选取反距离加权插值算法和基于 B 样条函数插值算法进行研究, 进行分别求解。正文中给出了两种模型所求解出的同潮图。

针对问题四, 是对问题二和问题三中拟合或插值次数的探讨。问题二中已经对拟合次数对模型结果的影响作了初步的探讨, 结合问题二中各个分潮不同拟合次数下潮汐调和常数的结果, 得到拟合次数越高拟合结果的绝均差不一定越小。其中, 拟合次数分别为 7、8、9、10、11、12 及 14 时, 多项式拟合的振幅绝均差相当, 明显好于其他次数的拟合结果; **多项式拟合次数为 11 时, 多项式拟合得到的迟角绝均差最小**。因此本文选取多项式拟合次数为 11, 并将该结论运用到问题三。通过调整问题三模型的拟合次数, 得到的同潮图与相关文献更相近。

关键词: 潮汐调和常数、最小二乘法、同潮图、多项式拟合

1、问题重述

1.1 问题背景

海洋潮汐是在天体引潮力作用下形成的长周期波动现象，在水平方向上表现为潮流的涨落，在铅直方向上则表现为潮位的升降。潮汐潮流运动是海洋中的基本运动之一，它是动力海洋学研究的重要组成部分，对它的研究直接影响着波浪、风暴潮、环流、水团等其他海洋现象的研究，在大陆架浅海海洋中，对潮汐潮流的研究更具重要性。海岸附近和河口区域是人类进行生产活动十分频繁的地带，而这个地带的潮汐现象非常显著，它直接或间接地影响着人们的生产和生活。潮汐潮流工作的开展和研究，可为国防建设、交通运输、海洋资源开发、能源利用、环境保护、海港建设和海岸防护提供资料。例如，沿海地区的海滩围垦、农田排灌，水产的捕捞和养殖，制盐，海港的选址及建设，以至于潮能发电等活动，无不与潮汐潮流现象有着密切的关系。

从区域海洋潮汐的数值模拟的现状来讲，四个主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的单一分潮的数值模拟与同化可以得到令人满意的结果，但其它分潮 (N_2 、 K_2 、 P_1 、 Q_1 等) 的单一分潮的数值模拟与同化，结果却差强人意；这意味着其它分潮的数值模拟，只有与四个主要分潮同时进行数值模拟，才能得到可以接受的结果。从具体操作来讲，其它分潮由于相对较弱，导致模拟结果的精度难以提高。

从各分潮的调和常数获取的发展史来说，通过对已有观测结果进行插值曾经是首选，但发展过程中逐渐被数值模拟方法所取代。高度计资料的出现，引发部分学者开展了插值方法的研究，并取得了一些值得一提的结果，尽管被所谓的主流方式淹没，但也难掩其光芒所在。鉴于目前已有高度计资料作为支持，其它分潮及长周期分潮的调和常数获取的插值方法研究大有可为。

1.2 问题描述

本题主要任务是根据卫星高度计海面高度异常资料，建立获取潮汐调和常数并进行评价分析的数学模型，主要包括：正确提取各主要分潮的潮汐调和常数，对各分潮进行正压潮和内潮的分离，正确绘出南海各主要分潮的同潮图。根据题目和附件所提供的相关信息及数据，主要要求 我们解决以下问题：

问题 1：根据沿轨道的星下观测点的海面高度异常值，建立数学模型提取所有星下观测点各主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的潮汐调和常数，是否有效提取那些分潮的潮汐调和常数取决于相应的资料长度；对提取的潮汐调和常数，利用潮汐验潮点的调和常数给予评价或检验，并给出评价结果的分析或评价。

问题 2：得到所有星下观测点各主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的潮汐调和常数，沿轨道作图后，可发现潮汐调和常数在沿轨道方向，在空间有细结构，而此细结构是内潮对正压潮的调制；请设法对沿轨道的各分潮的潮汐调和常数进行正压潮和内潮的分离。

问题 3：设计数据插值或拟合方法给出南海的各主要分潮的同潮图，并利用潮汐验潮点的调和常数给予评价或检验，并给出评价结果的分析或评价。

问题 4：如果在对沿轨道的潮汐调和常数分离、插值或拟合的过程中，利用了特定的函数进行拟合，是否能够确定出需利用的特定函数的最佳（高）次数，上述结论是否对第 3 问有启示或帮助。

2、问题分析

针对问题 1，附件中给出了南海海面高度异常数据，并且详细介绍了 f 、 u 潮汐模型的相关数学表达式及相应参数含义。通过对此模型分析可以看出，实际水位 h 与调和常数 (h_j, g_j) 呈非线性关系，分别使 x_j 对应 $H_j \cos g_j$ ， y_j 对应 $H_j \sin g_j$ ，可以建立 n 个方程构成的线性方程组，再根据相应结果提取参数。为减小噪声 r 对分析结果的影响，提取了大量观测数据，因此方程的数量 n 远大于未知数的数量 $m+1$ 。针对该模型的特点，为实现对不等时距潮汐资料的分析，本文采用最小二乘法进行各主要分潮调和常数的提取。在提取 4520 个观测点的四个主要分潮的调和常数时，假设当观测时间序列小于某个阈值时，等于没有此数据。通过附件中给出的验潮站四个主要分潮的调和常数，对该模型进行了检验，绘制了模型求解值与验潮站实测值之间误差分布图，并列出了模型求解值与验潮站实测值的 ΔH 及 ΔG ，对该检验进行分析。

针对问题 2，问题 1 中我们已经求得所有星下观测点各主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的潮汐调和常数,包括振幅 H 和迟角 g 。对潮汐调和常数沿轨道作图,便是根据位置(经纬度),将某条轨道上某个分潮的调和常数 H 和 g 用图像表示。因此,首先要对数据进行分段处理,分离出相应数量的轨道。对数据进行初步分析可知,给出的数据总共可以分为 20 条轨道。问题中指出,沿轨道作图后,发现潮汐调和常数在沿轨道方向的空间上有细结构,而该细结构是内潮对正压潮的调制。在正压潮和内潮的分离问题上,参考相关文献,本文采用多项式拟合的方法展开问题 1 中求出的调和常数。首先将 H 和 g 转化为极坐标形式 $H \cos g$ 和 $H \sin g$, 并分别进行拟合,然后通过构造代价函数,将拟合过程转换为求解 n 个方程构成的线性方程组,最后采用最小二乘法求解该类方程并确保拟合的精确度。得到的拟合结果代表正压潮值,通过与该点原数据间的运算以及坐标转换便可得内潮值。

针对问题 3,建立了两种数学模型,分别是基于多项式拟合的求解任意点调和常数的数学模型和二维空间属性插值模型。针对第一种模型,我们需要对数据进行预处理,得到轨道交点坐标,在研究区域内任选一点,得到该点到其最近两条上(下)行轨的距离比,在这两条上(下)行轨间的下(上)行轨上可以找到与该点具有相同距离比的一系列点,对这些点的调和常数进行多项式拟合。针对第二种模型,本文主要选取反距离加权插值算法和基于 B 样条函数插值算法进行研究,进行分别求解。对于两种模型所求解出的结果绘制等潮图。

针对问题 4,此题是对问题 2 和问题 3 的总结。在建立数学模型进行求解的过程,所使用的数学模型中一些改变可以明显改善结果的正确性。在拟合的过程,不同拟合次数可以得出不同的结果,当拟合次数为一定的值时,拟合效果最好,不能过大或过小,由此得出最佳拟合次数。在进行插值时,不同的插值算法效果也不相同,在问题 3 中,根据不同的插值算法,可以绘制出对应的同潮图,与相关资料进行对比,从而判断性能。

3、符号说明

符号	符号说明
h	海面高度值
H	分潮调和常数的振幅
g	分潮调和常数的迟角
S_0	余水位
f	交点因子
u	交点订正角
v_0	初相位
σ	分潮的角速度
$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$	Doodson 数
J	潮数
S_0	余水位
t	时刻
D	日
M	月
Y	年

4、问题假设

在问题求解过程中，考虑到实际情况与简化计算的需要，采用了以下相关的假设：

- (1) 卫星测量所得数据需要考虑诸多因素并进行各种订正，假定本文数据近似等于海面高度；
- (2) 题目所涉及的经纬度范围相对较小，所以近似为平面区域；
- (3) 相对于其他分潮，分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 各自单一分潮的数值模拟与同化结果较好，因此只需对这四个主要分潮进行分析求解；
- (4) 假设径向轨道误差对本题计算值的影响可以忽略不计；
- (5) 观测点数据只与海洋潮汐有关，不存在其它外力导致水位的波动；
- (6) 验潮站调和常数观测数据准确无误。

5、模型建立与分析

5.1 问题 1 H 、 g -阈值-误差模型及分析

5.1.1 H 、 g -阈值-误差模型建模

1、调和常数线性最小二乘法模型

实际水位可以看作是很多个调和分潮迭加的结果。根据区域海洋潮汐的数值模拟的现状，四个主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的单一分潮的数值模拟与同化可以得到令人满意的结果，而其它分潮的数值模拟与同化的结果却差强人意。因此本文忽略其它分潮对水位的影响，在分析中只考虑四个主要分潮。则对于任一点

的潮位表达式为:

$$h = S_0 + \sum_{j=1}^J f_j H_j \cos(v_j + u_j - g_j) = S_0 + \sum_{j=1}^J f_j H_j \cos(\sigma_j t + v_{0j} + u_j - g_j) \quad (1)$$

可化为如下形式:

$$h = S_0 + \sum_{j=1}^J f_j \cos(\sigma_j t + v_{0j} + u_j) H_j \cos g_j + \sum_{j=1}^J f_j \sin(\sigma_j t + v_{0j} + u_j) H_j \sin g_j \quad (2)$$

其中, J 为 4, 其余变量均为已知或可通过简单计算得出, 以下将分析需要计算的变量的获取。 v_0 为分潮初相位, 即 Y 年 M 月 D 日 t 时刻 (实际计算中是观测数据的起始时间) 的天文初相角:

$$v_0 = \mu_1 \tau + \mu_2 s + \mu_3 h' + \mu_4 p + \mu_5 N' + \mu_6 p' + \mu_0 90 \quad (3)$$

其中, $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$ 为 Doodson 数, 它们的系数均为 Y, i, n, t 的函数, i 为 1900 年至 Y 年的闰年数, $i = \text{int}((Y-1901)/4)$; n 为从 Y 年 1 月 1 日开始计算的累积日期序数, 1 月 1 日的日期序数为 0, t 为时间 (单位: 小时)。

由于提供的高度计数据资料中观测的时刻是以 2000 年 1 月 1 日 0 点 0 分 0 秒 (北京时间) 开始计算, 考虑到时间处理的复杂程度, 我们将观测数据的起始时刻定为 2000 年 1 月 1 日 0 点 0 分 0 秒 (北京时间), 而得到固定的 Y, i, n, t 值, 由此计算得到的 v_0 也是固定不变的, 即同一分潮的分潮初相位不随时间改变, 也与空间点的位置无关。 f_j 为交点因子, u_j 为交点订正角, 各分潮的 f_j, u_j 的具体计算公式如下:

$$\begin{cases} f \cos u = \sum_{m=1}^M \rho_m \cos(\Delta\mu_4^m p + \Delta\mu_5^m N') \\ f \sin u = \sum_{m=1}^M \rho_m \sin(\Delta\mu_4^m p + \Delta\mu_5^m N') \end{cases} \quad (4)$$

一般情况下 (短时间, 比如一年之内) 可以取资料序列的中间时刻计算, 但这里是跨度 25 年的资料, 取中间时刻会导致分析结果有偏差。 $\rho_m, \Delta\mu_4^m, \Delta\mu_5^m$ 和 Doodson 数可查表得出。

在确定了所有的参数之后, 由 n 个时刻 $t=t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ 及其对应的潮高观测值 $h=h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$, 那么, 就可以建立如下由 n 个方程构成的方程组:

$$\begin{cases} S_0 + \sum_{j=1}^J x_j f_j \cos(\sigma_j t_1 + V_0 + u_j) + \sum_{j=1}^J y_j f_j \sin(\sigma_j t_1 + V_0 + u_j) = h_1 \\ S_0 + \sum_{j=1}^J x_j f_j \cos(\sigma_j t_2 + V_0 + u_j) + \sum_{j=1}^J y_j f_j \sin(\sigma_j t_2 + V_0 + u_j) = h_2 \\ \vdots \\ S_0 + \sum_{j=1}^J x_j f_j \cos(\sigma_j t_n + V_0 + u_j) + \sum_{j=1}^J y_j f_j \sin(\sigma_j t_n + V_0 + u_j) = h_n \end{cases} \quad (5)$$

方程组 x_j 对应 $H_j \cos g_j$, y_j 对应 $H_j \sin g_j$, 它们和 S_0 共同构成了方程组中的全部未知量。潮汐调和的目的正是求出 x_j 与 y_j , 从而求出各个分潮的调和常

数 H 和 g 。

为表示的方便，将方程组写成如下形式：

$$\begin{cases} S_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = h_1 \\ S_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = h_2 \\ \vdots \\ S_0 + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = h_n \end{cases} \quad (6)$$

其中 $m=2J$ ，即所选分潮数的两倍， S_0 与 x_j 为待求解的未知数。

为尽量减小噪声 r 对分析结果的影响，使调和常数尽可能接近真值，在实际潮汐分析中，总是希望使用更多的观测数据。因此，方程的数量 n 一般远大于未知数的数量 $m+1$ 。对于这样的矛盾方程组，从线性代数这门学科的角度来考虑，矛盾方程组只是一个线性代数中的超定方程组，只需要直接解这个超定方程组即可，基于 Matlab 内部函数功能求解线性方程组能很好地解决这一问题，并且方程组所得解即为最小二乘解，从而简化了调和分析的算法。有多少样本，就有多少个方程，更能体现最小二乘法的灵活性，完全不受等时或非等时取样的限制。

最小二乘法的思想是，寻求一组解，使拟合值与实际值之差的平方和，即下式的值达到最小：

$$\Delta = \sum_{i=1}^n (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m + S_0 - h_i)^2 \quad (7)$$

根据多元函数微分的理论，这要求 Δ 相对于各未知数的偏导数均为 0，即：

$$\frac{\partial \Delta}{\partial S_0} = \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} = \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial \Delta}{\partial x_m} = 0 \quad (8)$$

这样就可得到关于分潮调和常数的线性方程组，进而可提取出分潮的调和常数。

2、阈值模型

位置点的观测数量是起决定作用的指标，如果观测次数过少的话，计算得到的潮汐调和常数可靠性会降低。本题数据的时间跨度长达 25 年，所以观测数目过少的点基本上等同于没有观测，其若引入调和常数计算将严重影响结果精度，故需要区别对待。

为此，本文提出了观测点数量阈值模型，即某一位置处观测点数达到或超过该阈值时，则能有效提取主要分潮的潮汐调和常数。为获得合理阈值区间，本文分别选取阈值初始值为 0、50、100、200、300、500，分别来计算各主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的潮汐调和常数，通过所得数据的连续性、误差大小来判断阈值选取的合理程度。

3、误差分析模型

由于高度计观测点和验潮站对应的经纬度不尽相同，本文将从中选取经纬度相同或相近的观测点进行潮汐调和常数的对比，以此来验证上述模型的精度。对各个主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 有：

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_j \quad \varepsilon_j = \sqrt{(\text{lon}_i - \text{lon}_j)^2 + (\text{lat}_i - \text{lat}_j)^2} \\ \Delta H_i = |H_i(\text{lon}_i, \text{lat}_i) - H_j(\text{lon}_j, \text{lat}_j)| \\ \Delta g_i = |g_i(\text{lon}_i, \text{lat}_i) - g_j(\text{lon}_j, \text{lat}_j)| \\ \Delta H = \sum_i \Delta H_i \\ \Delta g = \sum_i \Delta g_i \end{array} \right. \quad (9)$$

其中：

$$\left\{ \begin{array}{l} 99^\circ \text{ E} < \text{lon}_i, \text{lon}_j < 122^\circ \text{ E} \\ 2^\circ \text{ N} < \text{lat}_i, \text{lat}_j < 25^\circ \text{ N} \end{array} \right.$$

这里 ε 的求取参考了距离公式，显然经纬度之差并不能对应相应的距离，但其与距离成正比： $\varepsilon \propto d = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ ，其中 $x_{i,j}$ 、 $y_{i,j}$ 分别对应高度计观测点和验潮站的距离坐标，因此 ε 确实能从一定程度表征两个位置点的相近程度。

4、H、g-阈值-误差模型实现过程

本文提出的调和常数计算模型主要算法流程图如图 5-1 所示，主要包括阈值设置并刷选观测点数据、参数计算、最小二乘法估计调和常数，模型检验几个部分。由于存在阈值-误差的反馈机制，本文模型将在已有数据的质量基础上达到非常高的计算精度。

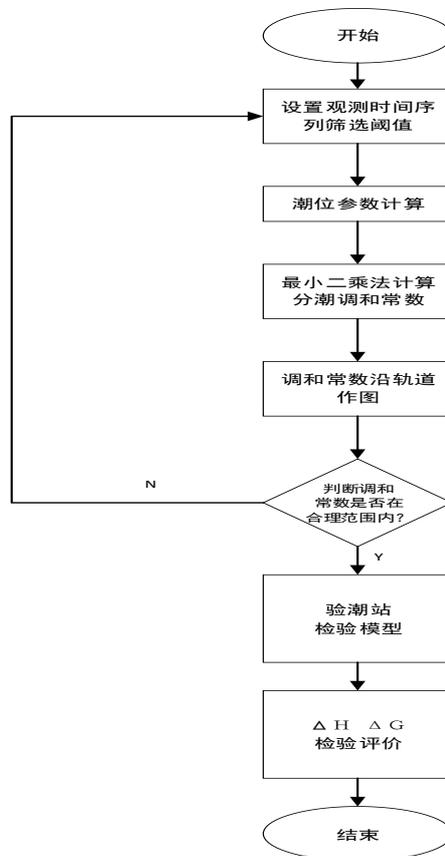
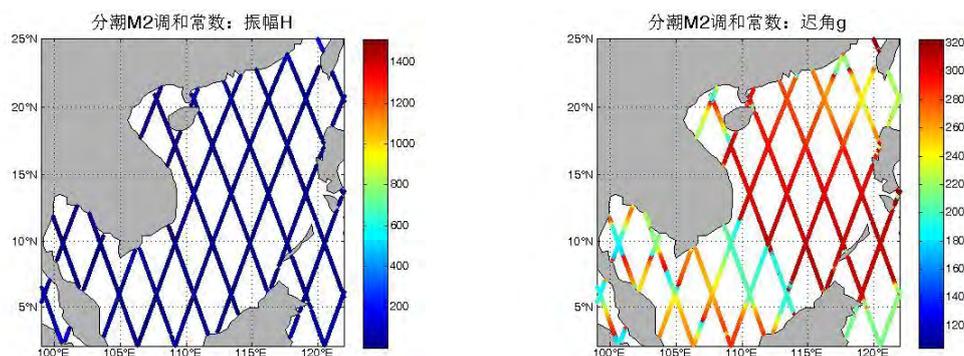


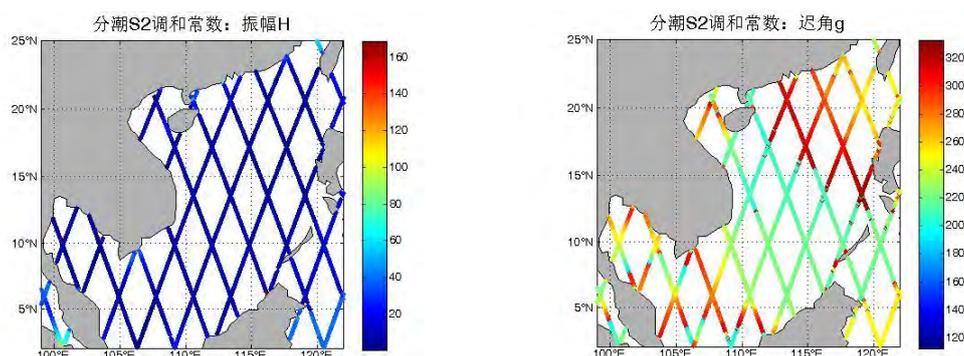
图 5-1 H、g-阈值-误差模型流程图

5.1.2 模型的求解与验证分析

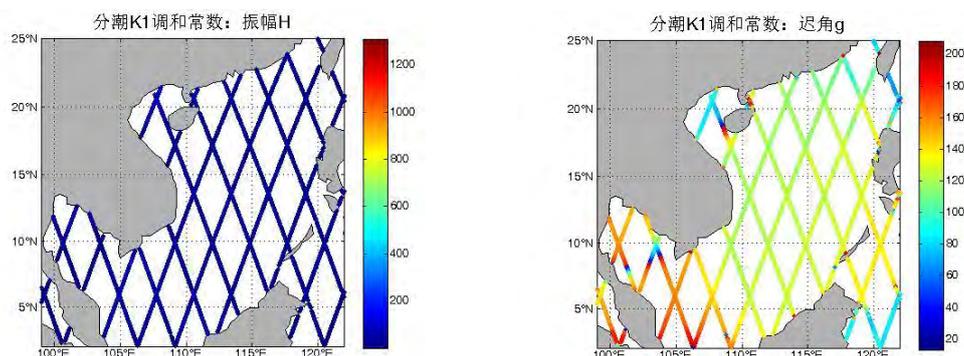
根据附件高度计中沿轨道星下观测点的海面高度异常值,通过最小二乘法求解出所有星下观测点各主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的潮汐调和常数。在求解过程中,发现当时间序列过小,该点所计算出的各主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的潮汐调和常数误差非常大。为此,本文选取观测次数分别大于 0、75、100、300、500 (即阈值) 的观测点,用以计算各主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的汐调和常数,并调用 matlab 中的 `m_map` 函数沿轨道作图。结果如下所示:



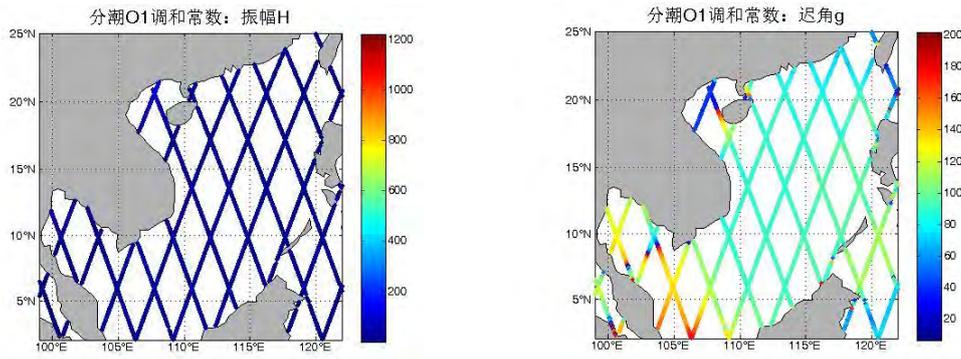
(a) 分潮 M_2 振幅、迟角分布



(b) 分潮 S_2 振幅、迟角分布

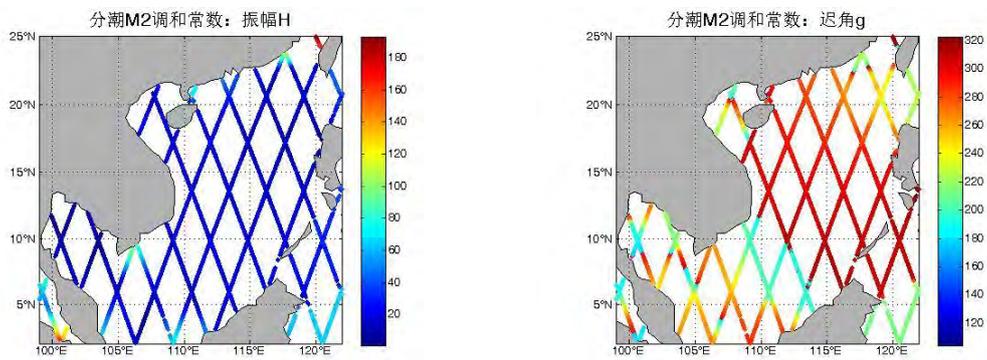


(c) 分潮 K_1 振幅、迟角分布

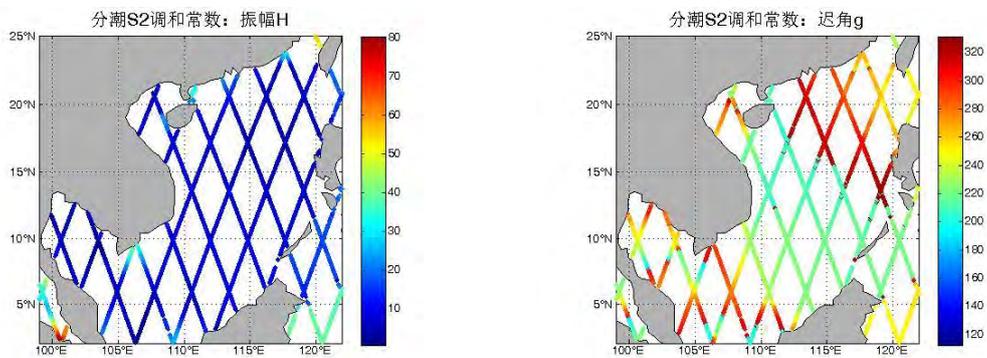


(d) 分潮 O_1 振幅、迟角分布

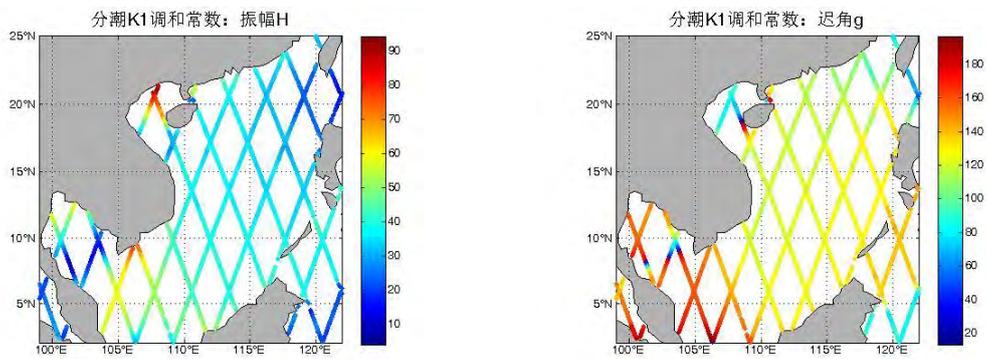
图 5-2 阈值为 0 时各分潮振幅迟角分布计算结果



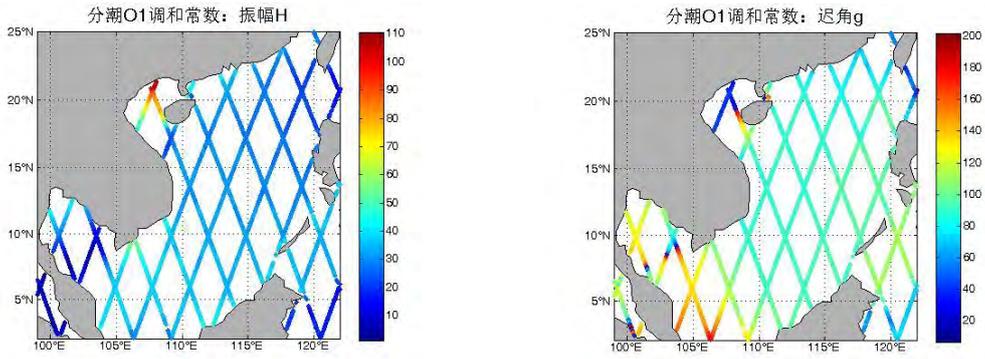
(a) 分潮 M_2 振幅、迟角分布



(b) 分潮 S_2 振幅、迟角分布

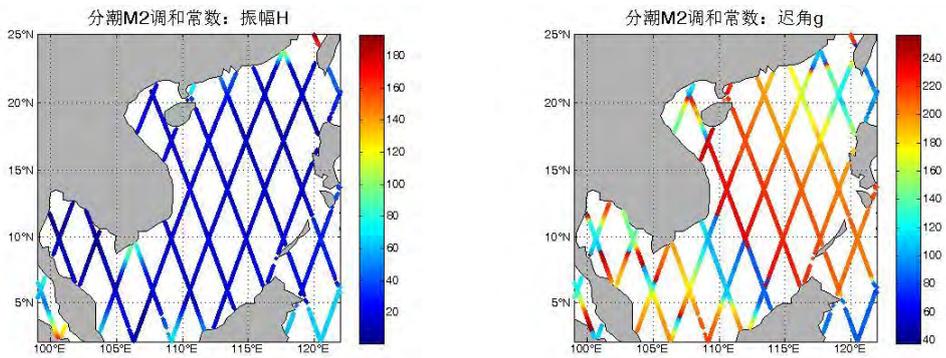


(c) 分潮 K_1 振幅、迟角分布

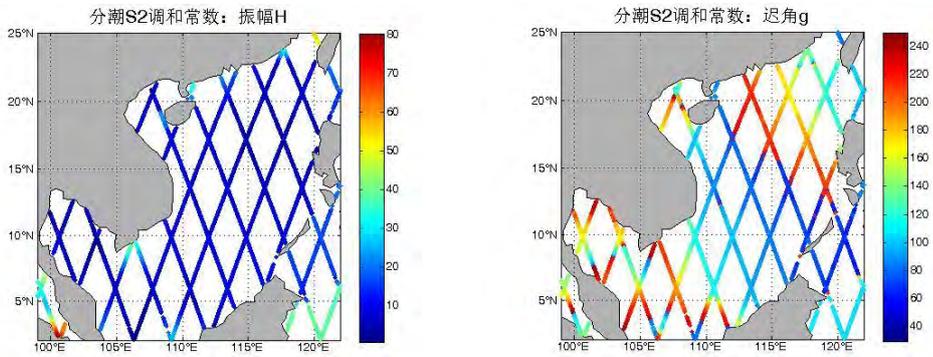


(d) 分潮 O_1 振幅、迟角分布

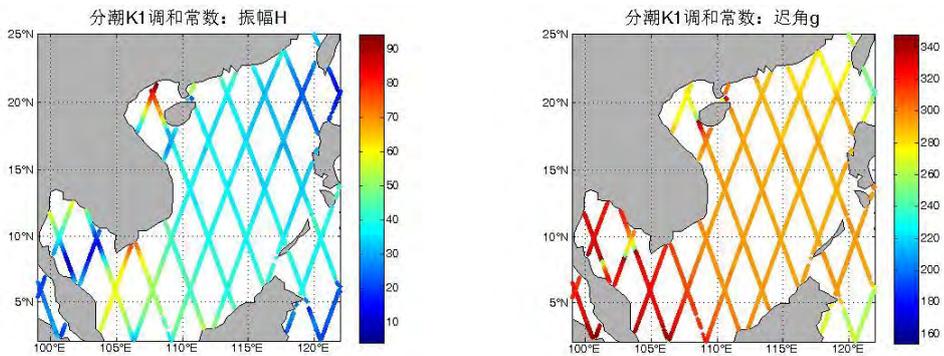
图 5-3 阈值为 75 时各分潮振幅迟角分布计算结果



(a) 分潮 M_2 振幅、迟角分布

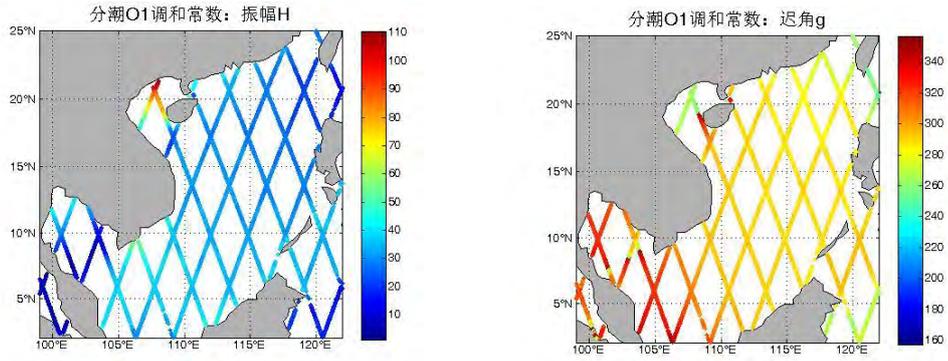


(b) 分潮 S_2 振幅、迟角分布



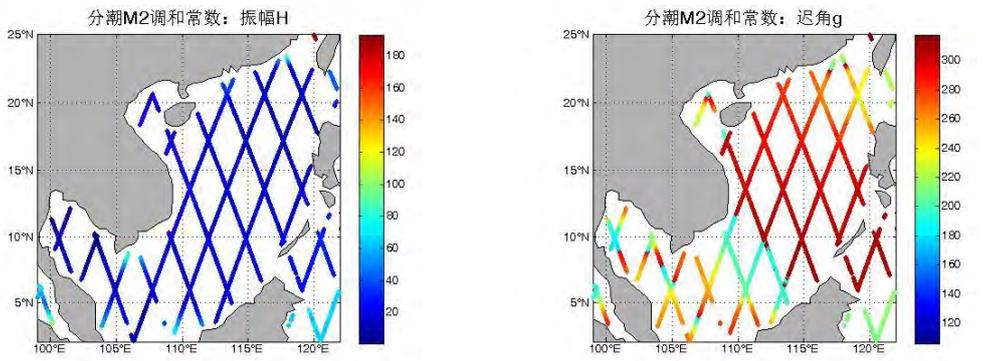
(c) 分潮 K_1 振幅、迟角分布

5

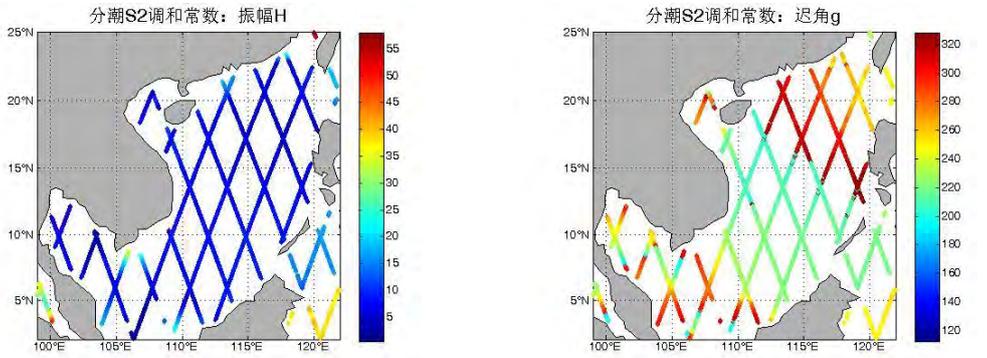


(d) 分潮 O_1 振幅、迟角分布

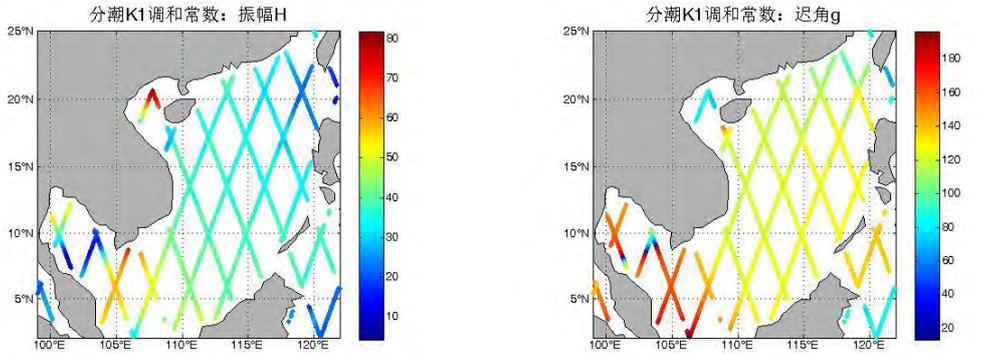
图 5-4 阈值为 100 时各分潮振幅迟角分布计算结果



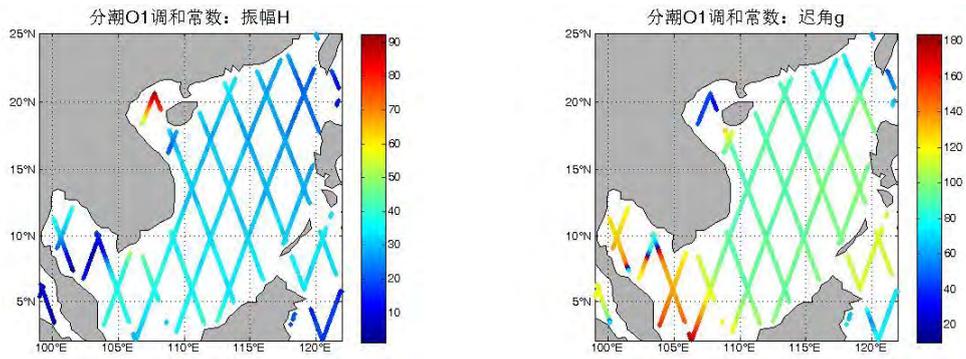
(a) 分潮 M_2 振幅、迟角分布



(b) 分潮 S_2 振幅、迟角分布

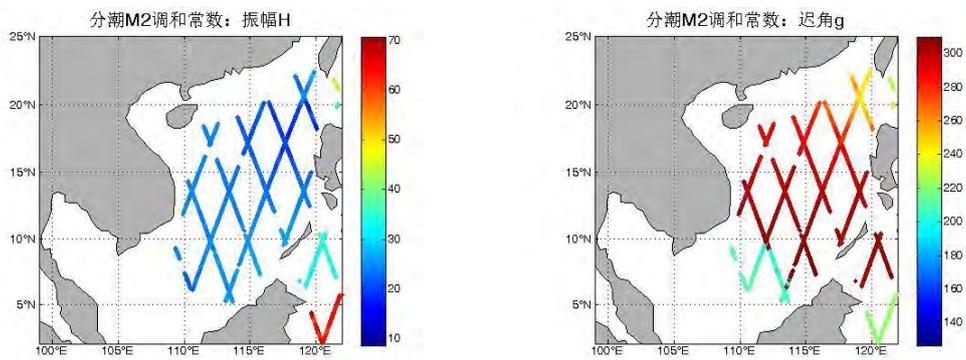


(c) 分潮 K_1 振幅、迟角分布

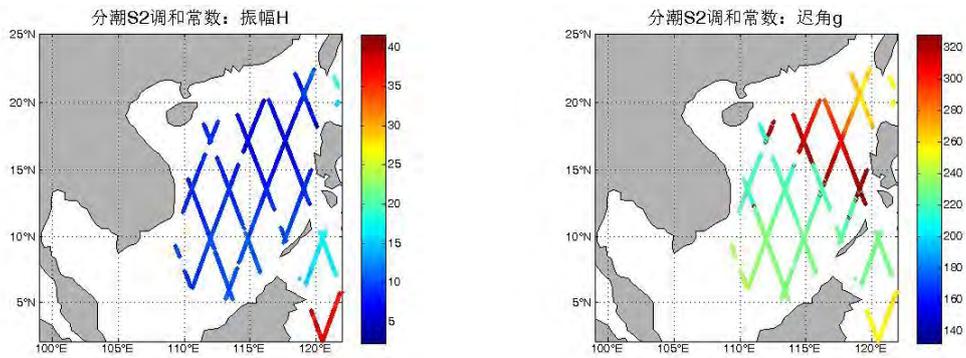


(d) 分潮 O_1 振幅、迟角分布

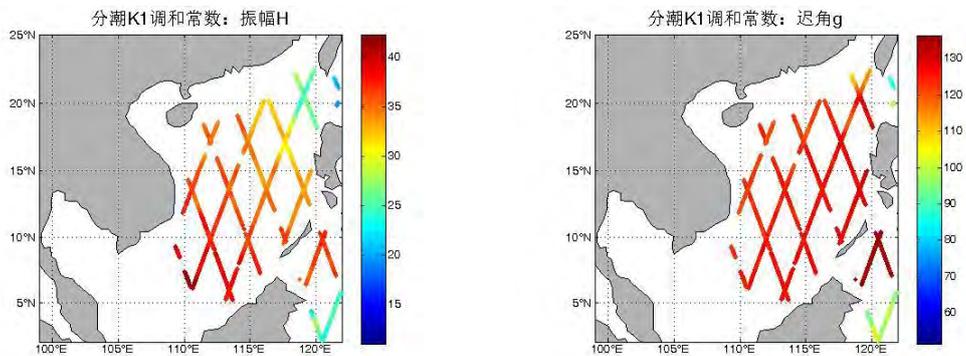
图 5-5 阈值为 300 时各分潮振幅迟角分布计算结果



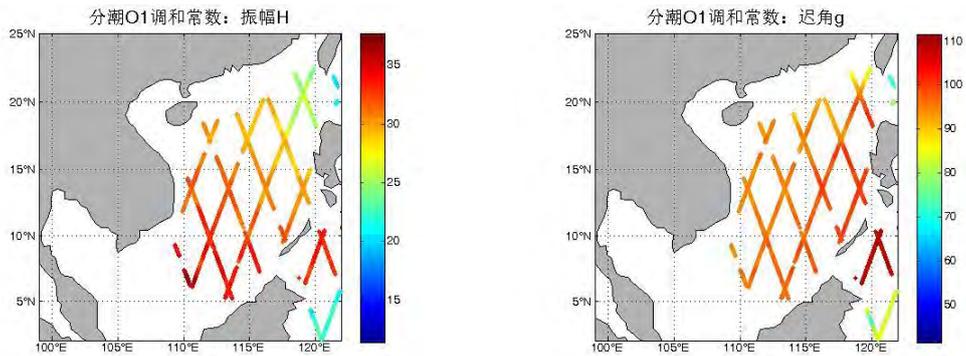
(a) 分潮 M_2 振幅、迟角分布



(b) 分潮 S_2 振幅、迟角分布



(c) 分潮 K_1 振幅、迟角分布



(d) 分潮 O_1 振幅、迟角分布

图 5-6 阈值为 500 时各分潮振幅迟角分布计算结果

从定性分析的角度来看,分析上面的多个分潮在不同阈值下的调和常数分布图,可以发现,若不对观测时间序列进行筛选,数据极其异常,误差非常大。可以得出结论,实际上观测次数是起决定作用的指标。如果观测次数过少的话,不可能提取出一定数目的分潮。时间跨度为 25 年,观测数目过少的点基本上等同于没有观测,所以我们设置阈值为 0、75、100、300、500,分别算出各主要分潮的调和常数,并沿轨道作图进行定性分析,可以得出当阈值为 75 时,效果理想。同时发现,若阈值过大,如 500 时,轨道上数据丢失严重,无法进行后面模型的检验与分析。

针对上述定性分析的结果,设阈值为 75,选取资料中给出的所有验潮站四个主要分潮的调和常数对高度计资料的分析结果进行验证。其中验潮站位置如图 5-7 所示,基本分布于高度计轨道附近。各对比站点高度计分析值与验潮站实测值之间误差分布如图 5-8 所示。南海主要分潮振幅值相对于中国近海其他海区较小,使用相对误差衡量更为合理,但为方便与前人研究成果对比,本文仍采用平均绝对误差。

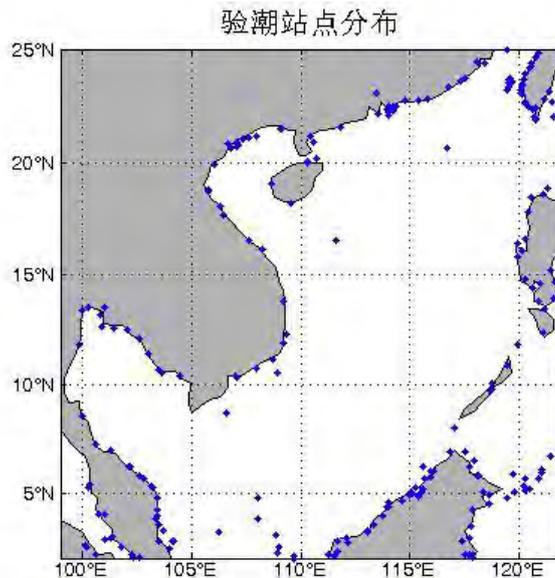
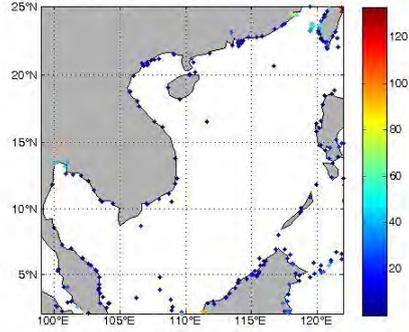
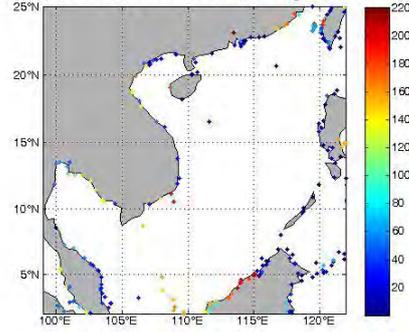


图 5-7 验潮站点位置分布图

分潮M2计算结果与验潮站实际振幅H的误差图

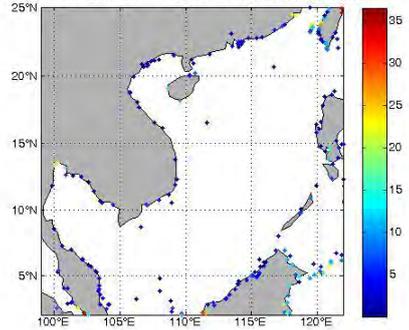


分潮M2计算结果与验潮站实际迟角g的误差图

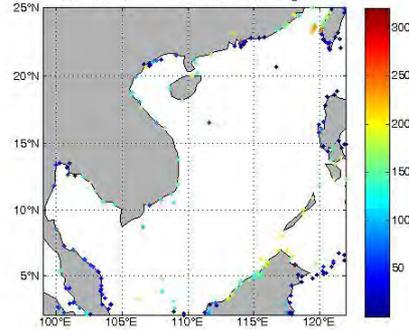


(a) 分潮 M_2 高度计计算结果与验潮站实测振幅误差值分别

分潮S2计算结果与验潮站实际振幅H的误差图

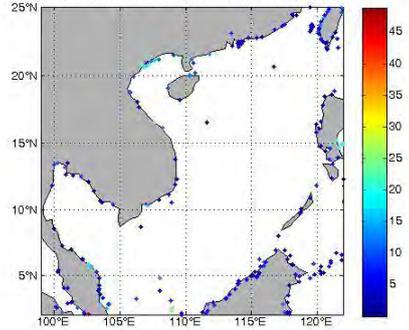


分潮S2计算结果与验潮站实际迟角g的误差图

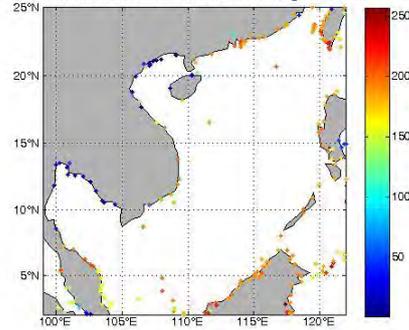


(b) 分潮 S_2 高度计计算与验潮站实测振幅误差值分别

分潮K1计算结果与验潮站实际振幅H的误差图

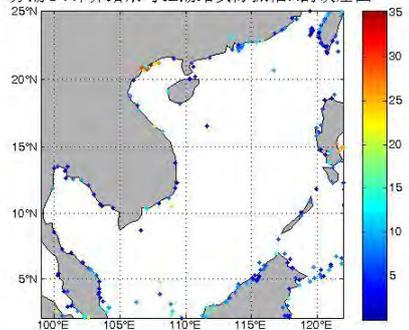


分潮K1计算结果与验潮站实际迟角g的误差图

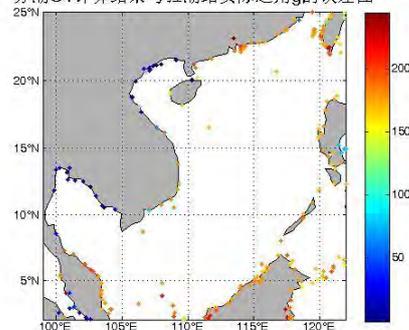


(c) 分潮 K_1 高度计计算结果与验潮站实测振幅误差值分别

分潮O1计算结果与验潮站实际振幅H的误差图



分潮O1计算结果与验潮站实际迟角g的误差图



(d) 分潮 O_1 高度计计算结果与验潮站实测振幅误差值分别

图 5-8 模型计算结果与验潮站调和常数比较

分析图 5-8 (a) ~ (d) 可知, 高度计振幅最大误差基本在 $\pm 10\text{ cm}$ 以内, 平均误差小于 5 cm , 四个分潮中 K_1 分潮振幅误差最小, M_2 分潮振幅误差最大。在振幅误差分布中, M_2 和 S_2 分潮误差较大值主要分布于古晋达图湾附近及台湾海峡, 该地区也是 M_2 和 S_2 分潮振幅较大值地区。 K_1 和 O_1 误差较大值主要分布于北部湾附近, 与 M_2 及 S_2 分潮类似, 该地区也是 K_1 与 O_1 振幅较大值地区。总体表明四个主要分潮振幅平均绝对误差较小, 误差较大地区同时也是振幅较大地区, 误差略有提升也是合理的。对于迟角, 少数观测站误差超过 100 度, 主要原因可能是原始调和常数计算模型中参数设置有一定的误差。

从定量分析的角度来看, 针对各阈值计算出的各主要分潮的调和常数, 在计算结果中筛选出与验潮站经纬度最为接近的点, 根据前文提出的误差模型, 对两者的调和常数计算二范数误差, 结果如表 5-1 所示:

表 5-1 各阈值的主要分潮调和常数与验潮站数据的二范数误差

	0	50	75	100	200	300	500
M_2	1559.588	404.8849	404.8332	404.353	479.2393	463.8387	766.6222
S_2	500.5844	153.5991	153.1191	153.1191	177.9313	175.1307	274.2805
K_1	1307.229	135.5661	135.0854	136.0854	139.9785	142.4854	235.3656
O_1	1303.19	154.3568	148.4822	146.7334	131.6052	114.6126	242.6747

综合分析上表中的数据, 可得出结论, 当阈值为 75 时, 二范数误差最为理想, 结果与沿轨道作图进行定性分析的结果相同, 说明之前得出的结论正确, 即实际上观测次数是起决定作用的指标。

当阈值为 75 时, 对求解数据进行验证, 将各分潮调和常数与验潮站进行比较, 选取经纬度最为接近的点作比较比较结果如表 表 表 所示 (鉴于篇幅, 表中只列出一部分的比较结果)。表中 ΔH 、 ΔG 分别为观测点与网格点处的振幅绝对均差和迟角绝对均差。

表 5-2 M_2 分潮计算结果与观测站对比

位置 (E/N)		距离 km	振幅 (cm) / 迟角 ($^\circ$)		$\Delta H(\text{cm})$ / $\Delta G(^\circ)$
卫星观测点	验潮站位置		调和和分析值	验潮站值	
121.320/21.957	121.567/22.033	26.807	42.926/	45/173.7	2.073/
			177.446		3.746
119.868/22.463	120.291/22.610	46.384	17.001/	17.384/	0.384/
			206.794		12.642
109.393/17.790	109.533/18.217	49.671	20.713/	20.3/303.4	0.413/
			294.822		8.577
121.169/22.301	121.483/22.667	51.821	42.094/	42/164.9	0.094/
			172.893		7.993
113.878/21.732	114.000/22.233	57.095	37.370/	41/272	3.629/
			257.733		14.266
115.525/22.245	115.350/22.750	58.961	20.838/	27.750/	6.912/
			245.959		9.304
121.169/22.301	121.183/22.833	59.093	42.094/	43/167.5	0.905/
			172.893		5.393

...
115.525/22.245	115.800/22.800	67.870	20.838/ 245.959	21.6/248.7	0.761/ 2.740
115.9761/6.641	115.967/6.017	69.470	20.816/ 304.173	21/311.9	0.183/ 7.726
119.637/15.046	120.283/14.817	73.867	14.777/ 292.030	17/284.3	2.222/ 7.730
均方根					5.83/9.92

表 5-3 S₂分潮计算结果与观测站对比

位置(°E/°N)		距离 km	振幅 (cm) /迟角 (°)		$\Delta H(cm)$ / $\Delta G(^{\circ})$
卫星观测点	验潮站位置		调和和分析值	验潮站值	
120.2447/17.76	120.417/17.783	18.323406	3.91321035/ 232.4461722	3.2/241.2	0.7132103/ 8.7538278
121.32/21.9577	121.567/22.033	26.807228	18.63763204/ 207.4662755	20/217.9	1.3623679/ 10.433724
121.8471/5.788	121.833/6.15	40.271644	38.50488482/ 210.7392839	29.8/210.3	8.7048848/ 0.4392838
113.8782/21.73	114.033/22.1	43.914952	14.6866922/ 288.5548379	16.5/299	1.8133078/ 10.445162
116.3307/20.84	116.717/20.683	43.946831	4.01448076/ 261.2099346	6/267.1	1.9855192/ 5.8900653
119.8688/22.46	120.291667/22. 61	46.384454	6.880974492/ 215.9686583	6.83/231.2	0.0465294/ 15.242480
121.1698/22.30	121.483/22.667	51.821040	19.6009048/ 204.7466517	19/213	0.6009047/ 8.2533482
121.2557/22.10	120.767/21.933	53.893427	19.27483798/ 205.6977657	11.4/220.7	7.8748379/ 15.002234
121.2343/22.15	120.75/21.967	54.080159	19.54027733/ 204.8760679	11/214.5	8.5402773/ 9.6239320
113.8782/21.73	114/22.233	57.095886	14.6866922/ 288.5548379	17/303	2.3133078/ 14.445162
均方根					4.754/10.75

表 5-4 K₁分潮计算结果与观测站对比

位置(°E/°N)		距离 km	振幅 (cm) /迟角 (°)		$\Delta H(cm)$ / $\Delta G(^{\circ})$
卫星观测点	验潮站位置		调和和分析值	验潮站值	
107.7422/20.6 405	107.95/21.2	65.8509 835	81.83056925/ 77.08326183	80.3/83.4	1.530569249/ 6.316738165
108.2367/19.3 955	108.616667/19.1	51.6793 6524	64.96266837/ 64.66421949	55.49388/71 .574329	9.468788373/ 6.910109507

107.7422/20.6 405	107.367/21.033	58.5247 4159	81.83056925/ 77.08326183	76.2/87	5.630569249/ 9.916738165
103.3201/10.2 298	103.6/10.55	46.9558 3106	20.15522842/ 111.8412642	17.7/96.7	2.455228421/ 15.14126423
107.7003/20.5 419	107.133/20.767	64.1139 5279	80.12349542/ 77.58851985	69.2/93.2	10.92349542/ 15.61148015
107.7422/20.6 405	109.083333/21.48 3333	167.777 5694	81.83056925/ 77.08326183	93.504572/9 5.596823	11.67400275/ 18.51356117
107.7422/20.6 405	107.6/21.1	53.1872 8968	81.83056925/ 77.08326183	72/95.7	9.830569249/ 18.61673817
119.8688/22.4 635	120.25/22,617	42.7084 9578	20.58046141/ 100.4909463	16.5/120.9	4.080461405/ 20.40905373
...
107.7422/20.6 405	107.067/20.95	78.1708 7267	81.83056925/ 77.08326183	84.6/103.3	2.769430751/ 26.21673817
120.1521/24.5 741	120.917/24.85	83.1315 3751	27.39635735/ 70.67624167	21.6/36.2	5.796357346/ 34.47624167
均方根					7.6919/ 18.9871

表 5-5 O₁ 分潮计算结果与观测站对比

位置 (°E/°N)		距离	振幅 (cm) / 迟角 (°)		$\Delta H(cm)$
卫星观测点	验潮站位置	km	调和和分析值	验潮站值	/ $\Delta G(^{\circ})$
103.3201/10.22	103.6/10.55	46.9558310	15.5505572/ 92.78915043	15.3/87.4	0.250557198/ 5.389150429
101.5193/12.16 08	101.45/12.583	47.5460514	39.0445468/ 115.7126394	46.6/127.94	7.555453205/ 12.22736058
103.3201/10.22	103.483/10.633	48.2433019	15.5505572/ 92.78915043	18.4/98.44	2.849442802/ 5.650849571
108.2367/19.39	108.6167/19.1	51.6793652	76.75058453/ 24.20341101	66.145438/ 10.658705	10.60514653/ 13.54470601
107.7422/20.64	107.6/21.1	53.1872896	91.79697006/ 35.55130517	81/29.9	10.79697006/ 5.651305175
100.064/11.353	99.8167/11.795	55.9999729	37.2316557/ 121.3480164	33.652766/ 131.015764	3.578889696/ 9.66774761
107.7003/20.54	107.133/20.767	64.1139527	90.96511761/ 36.74843735	74.5/36.4	16.46511761/ 0.348437351
107.7422/20.64	107.95/21.2	65.8509835	91.79697006/ 35.55130517	78.5/31.6	13.29697006/ 3.951305175
101.5193/12.16	102.067/12.467	68.5531899	39.0445468/ 115.7126394	31.7/116.34	7.344546795/ 0.627360579
...

101.5193/12.16	100.883/12.65	87.9428879	39.0445468/ 115.7126394	42/126.04	2.955453205/ 10.32736058
均方根					10.1969/ 7.8207

由表 5-2~5-5 可知，本文调和与分析的结果与模式结果的偏差不大。 M_2 分潮的振幅差的均方根为 5.8328 cm，迟角差的均方根为 9.9258° 。 S_2 分潮的振幅差的均方根为 4.7543 cm，迟角差的均方根为 10.7530° 。 K_1 分潮的振幅差的均方根为 7.6919 cm，迟角差的均方根为 18.9871° 。 O_1 分潮的振幅差的均方根为 10.1969 cm，迟角差的均方根为 7.8207° 。说明本文的结果很可靠，为问题 2 内潮信号与正压潮信号的分离奠定了扎实的基础。

至此，对于问题 1 中所有问题都已得到解决。通过误差分系，设定了合理观测点阈值并计算出了各主要分潮的调和常数。利用验潮站的数据对所建立的数学模型进行检验，画出各主要分潮的高度计计算结果与验潮站实测振幅/迟角误差值分布图。最后，计算出验潮站与最为接近点的的振幅绝均差和迟角绝均差，对前面模型检验进行评价。

5.2 问题 2 沿轨分离模型及分析

5.2.1 数据预处理

潮汐调和常数在沿轨道方向，存在内潮对正压潮的调制。为了求得对沿轨道的各分潮的潮汐调和常数进行正压潮和内潮的分离，必须对星下所有观测点位置进行轨道的分离。根据题目资料所给出的观测点坐标，我们绘制出了轨道的痕迹，并对范围内的所有轨道作了如图 5-9 所示的标号，每段标号对应着一组经纬度坐标。

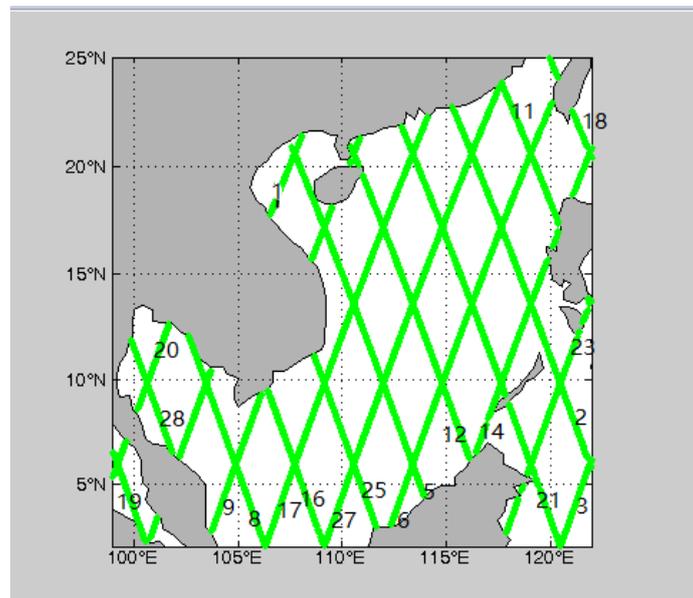


图 5-9 南海 TOPEX/POSEIDON 高度计资料的星下轨迹分离及标识

5.2.2 沿轨分离模型建模

1、多项式拟合法

由参考文献可知，可以利用多项式拟合方法拟合问题一中调和分析得出的各主要分潮（ M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1 ）的调和常数，拟合结果代表正压潮值。通过滤掉正压潮部分可以提取出各主要分潮内潮海表面信号。设拟合多项式为：

$$\hat{f}(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_n y^n. \quad (10)$$

其中， y 为某一条轨道上任一观测点的纬度， $\hat{f}(y)$ 分别为 $A \cos G$ 、 $A \sin G$ ， A 为该任一观测点 $p(x, y)$ 的振幅值， G 为迟角值。

2、非线性最小二乘法

选取拟合多项式后，则需对多项式的未知系数求解。该问题的实质是运用处理后的观测数据，对系统参数进行辨识。构造代价函数：

$$J(a_n) = \sum_{k=1}^N [(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \cdots + a_n y_k^n) - A_k \cos G_k]^2, k=1, 2, 3, \dots, N \quad (11)$$

式中， y_k 代表轨道任一观测点的纬度。对式（11）分别求 a_0 ， a_1 ， a_2 ， \dots ， a_n 的偏导，并使其为 0，可得：

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^N [(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \cdots + a_n y_k^n) - A_k \cos G_k] &= 0; \\ \sum_{k=1}^N y_k [(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \cdots + a_n y_k^n) - A_k \cos G_k] &= 0; \\ \sum_{k=1}^N y_k^2 [(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \cdots + a_n y_k^n) - A_k \cos G_k] &= 0; \\ &\dots \\ \sum_{k=1}^N y_k^n [(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \cdots + a_n y_k^n) - A_k \cos G_k] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

为便于阐述，引入记号：

$$M_{i,j} = \sum_{k=1}^N y_k^{i+j}, b_i = \sum_{k=1}^N y_k^{i-1} A_k \cos G_k. \quad (13)$$

其中， $i, j=1, 2, \dots, n+1$ 。式（13）表示为

$$\begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,n+1} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & M_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{n+1,1} & M_{n+1,1} & \cdots & M_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \quad (14)$$

通过求解上述线性方程组可得系数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 的值，并带入式(11)

得到正压潮值 $\hat{f}(y_k)$ ，记 $A_k \cos G_k$ 与其拟合值为 $\hat{f}(y_k)$ 之差为

$$\tilde{f}(y_k) = A_k \cos G_k - \hat{f}(y_k) \quad (15)$$

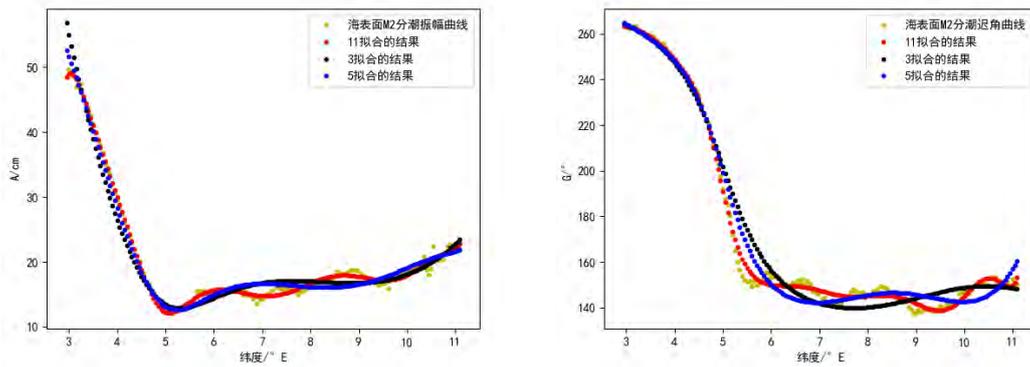
\tilde{f}_k 为内潮贡献。同理，对 $A \sin G$ 进行多形式拟合可得

$$\tilde{g}(y_k) = A_k \sin G_k - \hat{g}(y_k) \quad (16)$$

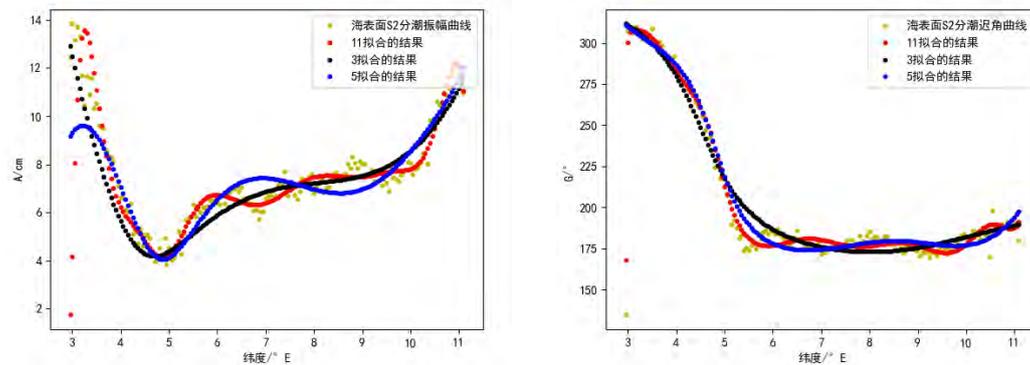
通过坐标转换可求得内潮海表面振幅 \tilde{A}_k 、迟角 \tilde{G}_k 。

5.2.3 模型求解及分析

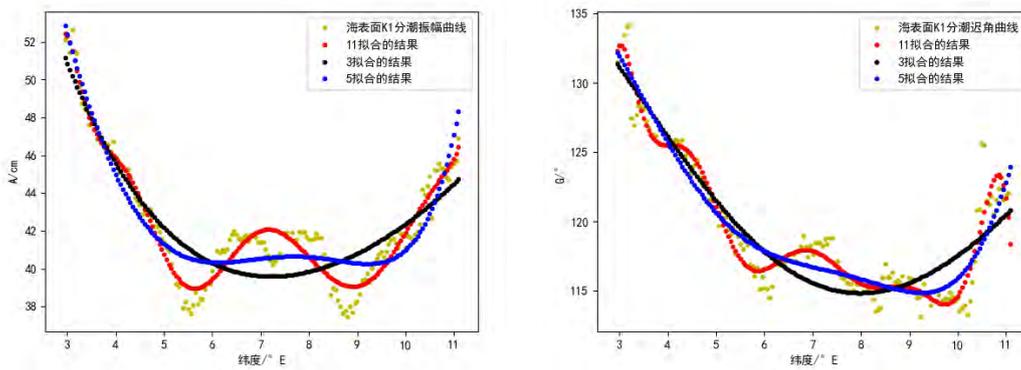
将数据预处理后，得到了各个分潮在各个轨道上的经纬度和求得的调和常数，这里以分潮 S_2 为例。利用非线性最小二乘法对调和常数进行 3~15 次多项式拟合来提取 S_2 内潮海表面信号。以 25 号轨道为例，针对四个主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1)，进行不同次数的多项式拟合，并选取 3, 5, 11 次多项式拟合的结果进行对比，以显示不同拟合次数滤波结果的差异，如下图所示。



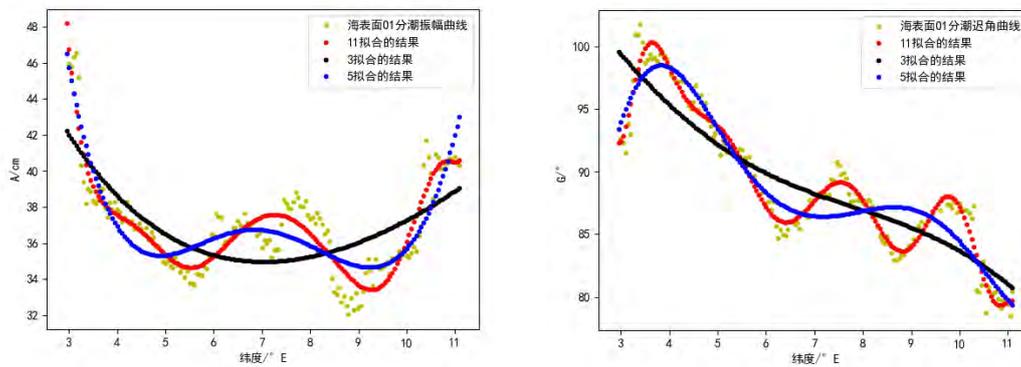
(a) 25 号轨道分潮 M_2 拟合振幅、迟角结果



(b) 25 号轨道分潮 S_2 拟合振幅、迟角结果



(c) 25 号轨道分潮 K_1 拟合振幅、迟角结果



(d) 25 号轨道分潮 O_1 拟合振幅、迟角结果

图 5-10 25 号轨道各分潮调和常数多项式拟合结果比较

观察上述比较图可知，3 次多项式的拟合结果明显偏离调和与分析得到的四个主要分潮振幅值与迟角值，不能正确地拟合出正压潮值；5 次多项式拟合结果在某些位置同样存在偏离现象，即拟合结果不能准确地表示正压潮值；而 11 次多项式拟合结果与海表面 M_2 分潮振幅的符合程度最高，能准确地表示正压潮值，从而保证内潮提取结果的准确性。

根据沿轨分离模型建模，沿图 5-9 中 16 个轨道，按照 5.1.2 所述方法对四个主要分潮的调和常数进行 3~15 次多项式拟合来提取内潮海表面信号。表 balabala (共 8 张表格)给出了四个主要分潮沿不同轨道 3~15 次多项式拟合得出的振幅、迟角的平均绝对均差，平均绝对均差为沿某一轨道进行 n 次多项式拟合得到的分潮振幅 / 迟角与调和与分析得到的分潮振幅 / 迟角差的绝对值的均方根。

表 5-6 沿不同轨道 3~15 次多项式拟合 M_2 分潮振幅绝对均差

轨道	多项式阶数												
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4.34	3.31	2.12	1.90	1.86	1.67	1.65	1.73	1.54	1.05	1.01	1.01	1.00
3	1.14	1.09	1.01	0.52	0.48	0.39	0.39	0.36	0.36	0.33	0.33	0.32	0.32
5	6.78	5.24	5.31	5.89	6.28	4.93	4.16	4.42	4.38	4.37	4.05	3.85	3.42
6	3.46	4.51	4.08	2.90	2.67	2.71	2.37	2.12	2.00	1.94	1.85	1.69	1.72

8	3.71	2.96	3.17	2.65	2.57	2.37	2.37	2.05	2.05	1.86	1.83	1.68	1.58
9	16.39	9.12	8.78	3.82	3.39	2.52	2.61	2.68	1.96	1.72	1.80	1.75	1.51
12	1.69	1.30	0.83	0.60	0.60	0.54	0.53	0.50	0.47	0.42	0.42	0.42	0.42
14	1.30	1.25	0.69	0.66	0.70	0.70	0.67	0.74	0.68	0.64	0.60	0.59	0.59
16	1.78	0.97	0.90	0.92	0.88	0.89	0.81	0.65	0.65	0.65	0.66	0.66	0.62
17	5.20	5.52	4.17	4.01	3.06	2.67	2.81	2.45	2.45	2.30	2.09	1.84	1.93
20	4.93	2.89	2.56	2.17	1.86	1.84	1.67	1.76	1.66	1.62	1.60	1.63	1.64
21	6.08	6.24	5.92	3.47	2.70	2.88	2.88	1.96	1.74	1.82	1.73	1.53	1.52
23	5.36	5.71	3.95	2.99	3.01	2.15	1.51	1.56	1.41	1.18	1.20	1.18	1.11
25	1.26	1.27	0.97	0.69	0.65	0.52	0.53	0.49	0.45	0.49	0.42	0.40	0.39
27	8.26	7.15	6.27	4.21	3.00	2.96	2.80	2.76	2.51	2.53	2.65	2.20	2.22
28	3.69	3.27	2.77	2.63	2.59	2.16	2.12	1.82	1.85	1.84	1.57	1.58	1.58

表 5-7 沿不同轨道 3~15 次多项式拟合 M_2 分潮迟角绝对均差

轨道	多项式阶数												
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	12.19	10.78	6.09	3.98	4.30	2.98	2.92	3.21	3.63	2.63	1.98	1.97	1.97
3	1.34	1.33	1.21	0.88	0.55	0.52	0.47	0.41	0.42	0.41	0.37	0.31	0.31
5	26.78	23.04	24.53	19.68	16.97	13.75	13.43	10.08	8.63	8.48	8.00	8.20	8.18
6	18.78	15.23	11.17	7.88	7.91	7.96	6.81	6.95	7.22	6.62	6.43	6.61	6.48
8	32.29	32.45	20.37	20.46	13.88	12.61	11.01	9.38	8.94	7.40	7.38	5.86	6.05
9	19.33	18.71	16.66	15.41	11.05	10.86	8.55	8.08	7.77	6.55	6.33	6.23	5.80
12	1.92	1.60	1.47	1.55	1.63	1.72	1.67	1.23	1.21	1.21	1.17	1.11	1.09
14	3.46	3.40	2.52	2.17	2.09	2.02	1.97	1.83	1.44	1.40	1.47	1.49	1.49
16	1.45	1.27	1.31	1.24	1.00	0.95	1.02	1.01	0.91	0.99	0.97	0.84	0.94
17	28.28	26.94	22.24	18.41	8.99	7.35	5.50	6.82	6.92	7.90	4.67	4.96	4.07
20	19.13	10.60	6.24	7.92	6.74	6.36	7.40	5.77	6.37	5.64	5.77	4.41	4.46
21	11.96	7.37	11.13	9.09	4.64	4.13	5.45	5.04	3.08	2.69	3.13	2.73	2.11
23	5.15	6.76	4.94	3.51	3.26	3.05	2.20	2.22	2.15	1.95	1.92	1.95	1.75
25	4.82	4.61	3.97	2.47	2.49	2.44	2.36	2.17	1.79	1.57	1.45	1.23	1.22
27	35.10	20.33	16.87	14.97	12.48	11.06	7.11	7.45	7.81	7.50	6.57	5.25	4.72
28	18.56	15.24	15.09	11.16	13.14	8.17	8.87	7.82	7.45	7.14	7.49	7.67	7.84

表 5-8 沿不同轨道 3~15 次多项式拟合 K_1 分潮振幅的绝对均差

轨道	多项式阶数												
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1.83	1.55	1.54	1.60	1.33	1.11	1.10	1.08	1.05	0.88	0.88	0.85	0.85
3	0.57	0.44	0.39	0.40	0.40	0.35	0.36	0.36	0.35	0.35	0.33	0.33	0.33
5	4.63	5.36	5.69	4.29	3.89	4.11	4.02	3.80	3.39	3.57	3.81	3.70	3.16
6	1.70	1.44	1.37	0.99	0.97	0.87	0.86	0.84	0.84	0.81	0.80	0.80	0.78
8	5.98	5.12	4.65	3.70	3.69	3.43	2.55	2.55	2.58	1.95	2.05	2.18	1.91

9	4.07	2.75	3.07	2.19	2.33	1.22	1.50	1.44	0.95	0.79	0.79	0.88	0.83
12	1.19	1.17	1.01	1.03	1.09	1.22	1.35	1.23	1.11	0.81	0.48	0.48	0.48
14	1.15	1.00	0.80	0.78	0.78	0.77	0.78	0.77	0.75	0.76	0.66	0.65	0.66
16	1.10	1.08	1.05	1.02	1.02	0.88	0.84	0.82	0.83	0.84	0.73	0.70	0.69
17	2.87	1.78	1.10	1.27	1.24	1.24	1.16	1.11	1.05	1.00	0.97	0.92	0.86
20	0.85	0.72	0.68	0.63	0.60	0.59	0.58	0.56	0.53	0.46	0.46	0.46	0.46
21	1.90	2.04	2.04	1.39	1.30	1.24	1.38	1.21	1.05	0.98	0.99	0.98	0.91
23	1.62	1.74	1.71	1.41	1.26	1.37	1.27	1.17	1.19	0.83	0.86	0.83	0.78
25	1.27	1.03	1.02	0.89	0.78	0.67	0.67	0.63	0.62	0.61	0.61	0.51	0.49
27	1.47	1.56	0.93	0.85	0.76	0.74	0.63	0.64	0.59	0.59	0.59	0.53	0.53
28	1.85	1.06	1.15	0.98	0.78	0.78	0.70	0.66	0.72	0.71	0.62	0.64	0.65

表 5-9 沿不同轨道 3~15 次多项式拟合 K_1 分潮迟角的绝均差

轨道	多项式阶数												
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4.32	3.10	2.66	2.56	2.29	2.12	1.72	1.61	1.30	1.23	1.20	1.22	1.22
3	2.35	1.38	1.14	1.10	1.06	1.05	1.05	1.05	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00
5	13.50	10.95	9.81	11.04	11.36	8.41	7.00	8.31	8.23	6.74	5.74	6.64	6.43
6	2.33	2.27	2.20	2.22	2.10	2.13	2.09	2.08	2.07	2.03	1.71	1.67	1.69
8	17.77	15.82	14.66	10.97	9.28	9.13	6.56	6.34	5.88	5.59	5.39	4.86	4.80
9	3.71	4.49	2.76	2.65	1.76	1.74	1.95	1.92	1.31	1.25	1.32	1.34	0.88
12	3.14	2.59	2.20	1.96	1.97	1.92	1.72	1.28	0.95	0.89	0.91	0.90	0.91
14	1.90	2.01	1.59	1.60	1.58	1.47	1.43	1.43	1.46	1.45	1.47	1.48	1.46
16	1.52	1.46	1.53	1.54	1.47	1.32	1.26	1.16	1.16	1.15	1.08	1.08	1.01
17	5.02	4.70	3.65	2.65	2.82	3.17	1.98	1.98	1.61	1.30	1.27	1.21	1.13
20	5.94	3.09	2.98	2.41	1.85	1.93	1.57	1.52	1.42	1.24	1.23	1.23	1.24
21	6.93	6.28	6.10	3.84	3.26	3.29	2.81	2.42	1.98	2.09	1.93	1.71	1.65
23	4.25	4.04	2.77	2.40	2.46	1.77	1.68	1.76	1.55	1.47	1.45	1.30	1.29
25	1.53	1.29	1.22	1.22	1.12	1.12	1.02	0.79	0.79	0.79	0.76	0.73	0.73
27	2.33	1.93	1.70	1.72	1.62	1.65	1.46	1.46	1.42	1.42	1.42	1.45	1.35
28	14.90	10.69	10.21	7.93	7.15	6.92	5.98	6.08	5.71	5.78	5.02	5.04	5.07

表 5-10 沿不同轨道 3~15 次多项式拟合 S_2 分潮振幅的绝均差

轨道	多项式阶数												
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	3.20	2.38	1.88	1.40	1.58	1.51	1.54	1.40	1.08	0.99	0.91	0.92	0.91
3	0.73	0.68	0.69	0.35	0.35	0.34	0.34	0.32	0.32	0.29	0.28	0.28	0.28
5	2.02	1.51	1.44	1.46	1.31	1.25	1.22	1.20	1.24	1.07	1.00	1.01	1.00
6	1.38	1.61	1.42	1.12	0.98	0.94	0.87	0.82	0.83	0.76	0.76	0.71	0.72
8	1.66	1.30	1.31	0.86	0.89	0.82	0.78	0.75	0.61	0.60	0.59	0.56	0.51
9	6.04	6.29	6.07	5.52	5.20	4.14	4.21	3.63	3.36	2.98	3.10	3.14	3.09

表 5-11 沿不同轨道 3~15 次多项式拟合 S_2 分潮迟角的绝均差

轨道	多项式阶数												
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	31.60	17.90	21.74	17.78	10.71	10.97	9.68	11.56	8.30	8.35	9.08	7.38	7.74
3	1.33	1.27	1.27	1.20	0.86	0.88	0.65	0.49	0.49	0.41	0.40	0.41	0.41
5	17.19	18.05	13.94	8.95	8.91	9.43	9.46	8.20	8.23	8.77	8.51	7.59	8.10
6	19.02	15.09	8.97	10.49	9.27	8.64	7.04	7.52	7.29	6.63	6.22	6.34	5.99
8	26.28	19.77	19.37	12.97	12.84	12.67	12.81	12.89	9.95	9.89	9.92	10.11	9.68
9	34.17	35.07	35.27	27.59	26.28	17.56	16.66	9.60	8.55	6.48	6.02	6.65	7.25

表 5-12 沿不同轨道 3~15 次多项式拟合 O_1 分潮振幅的绝均差

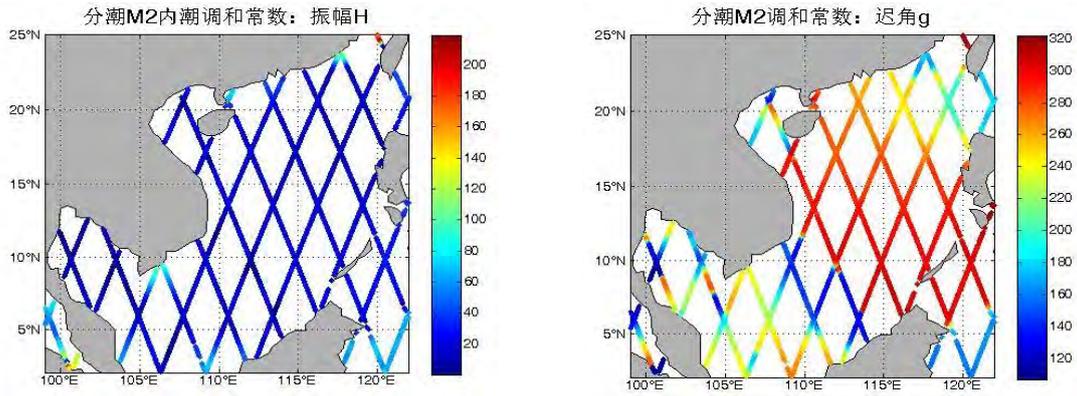
轨道	多项式阶数												
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1.82	1.55	1.60	1.59	1.39	1.18	1.08	0.93	0.85	0.86	0.87	0.86	0.86
3	0.76	0.60	0.44	0.44	0.42	0.42	0.42	0.41	0.41	0.41	0.40	0.40	0.40
5	6.60	6.40	6.86	6.81	6.72	5.96	5.35	5.40	5.50	5.01	4.20	4.08	4.11
6	1.11	0.89	0.86	0.86	0.81	0.79	0.79	0.75	0.70	0.67	0.62	0.61	0.60
8	3.16	2.45	2.17	1.66	1.35	1.48	1.38	1.13	1.10	0.96	0.99	0.99	0.83
9	3.45	2.77	2.61	2.09	2.23	1.09	1.28	1.14	0.97	0.75	0.76	0.82	0.71

表 5-13 沿不同轨道 3~15 次多项式拟合 O_1 分潮迟角的绝均差

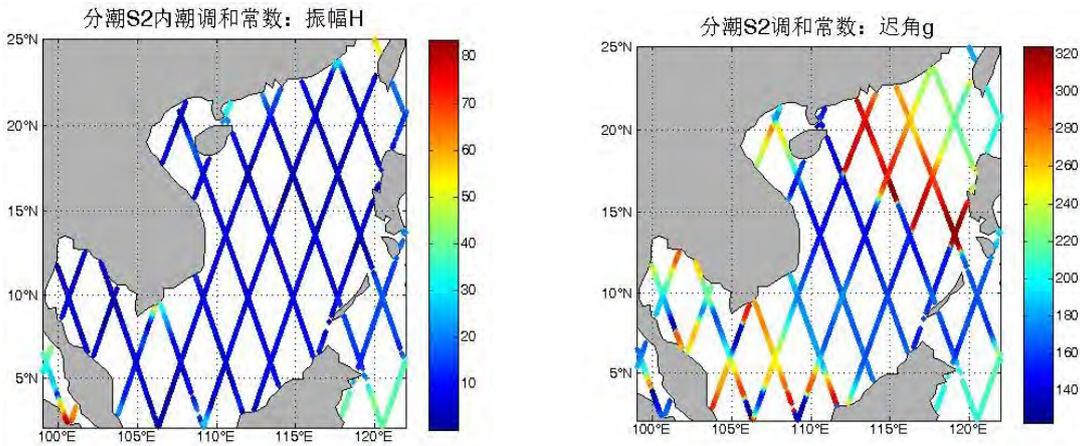
轨道	多项式阶数												
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4.42	3.57	2.81	2.34	1.78	1.89	1.84	1.86	1.61	1.59	1.50	1.53	1.51
3	2.13	1.70	1.68	1.68	1.68	1.70	1.63	1.63	1.64	1.66	1.51	1.41	1.39
5	20.58	17.29	11.80	9.10	11.65	12.30	9.73	6.71	7.54	8.67	8.26	6.09	4.08
6	2.20	2.20	2.03	2.00	2.02	2.03	1.60	1.62	1.61	1.52	1.37	1.39	1.33
8	12.00	10.61	10.39	8.49	8.03	6.97	6.43	6.51	5.57	5.38	4.77	4.36	4.27
9	5.87	5.67	5.01	4.83	2.87	2.84	2.74	2.83	2.06	1.64	1.86	1.82	1.19

根据上述八个表格中的中沿不同轨道 3~15 次多项式拟合各主要分潮的振幅、迟角的绝均差,可以看出拟合次数越高拟合结果的绝均差不一越小。从量级上讲,7、8、9、10、11、12、14 次 多项式拟合的振幅绝均差相当,明显好于其他次数的拟合结果。同样,对迟角的高次多项式拟合得到的绝均差也不一定小,11 次多项式拟合得到的迟角绝均差最小,反而 13 次多项式拟合结果的绝均差最大。这里可以得出结论,当拟合次数为 11 次时,可最有效提取正压潮的调和常数。

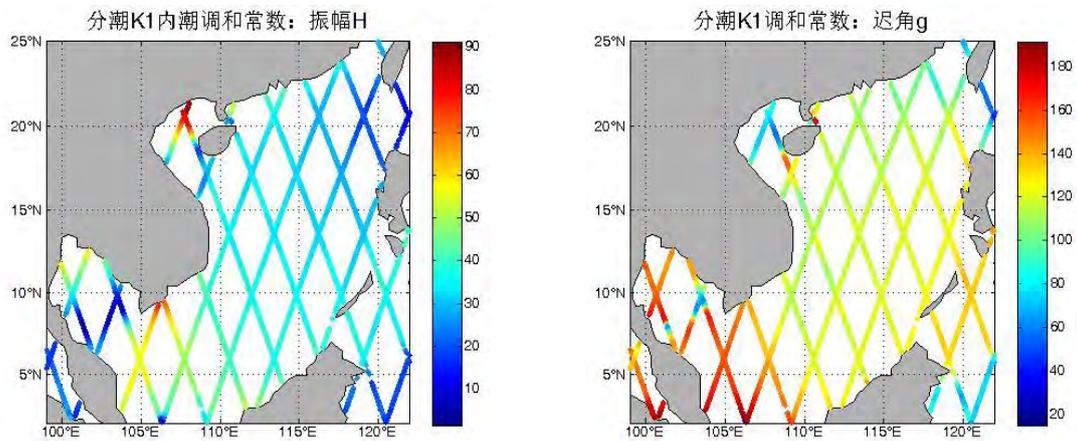
按照 5.1.2 所述方法,沿图 5-9 中的 16 个轨道,对四个主要分潮的潮汐调和常数进行正压潮与内潮的分离。调用 Matlab 中的 `m_map` 沿轨道作图,绘制出四个主要分潮的内潮和正压潮的振幅与迟角分布图(共 16 张图)。



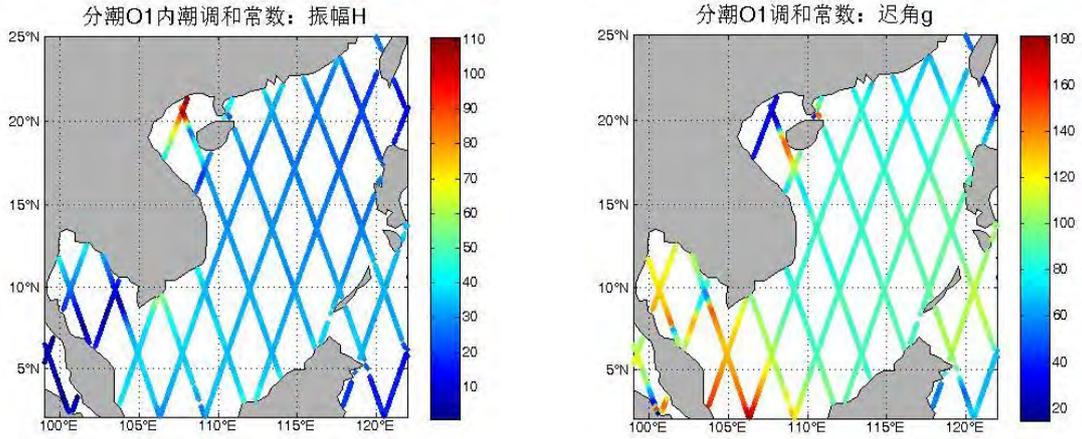
(a) 分潮 M_2 正压潮振幅、迟角分布



(b) 分潮 S_2 正压潮振幅、迟角分布

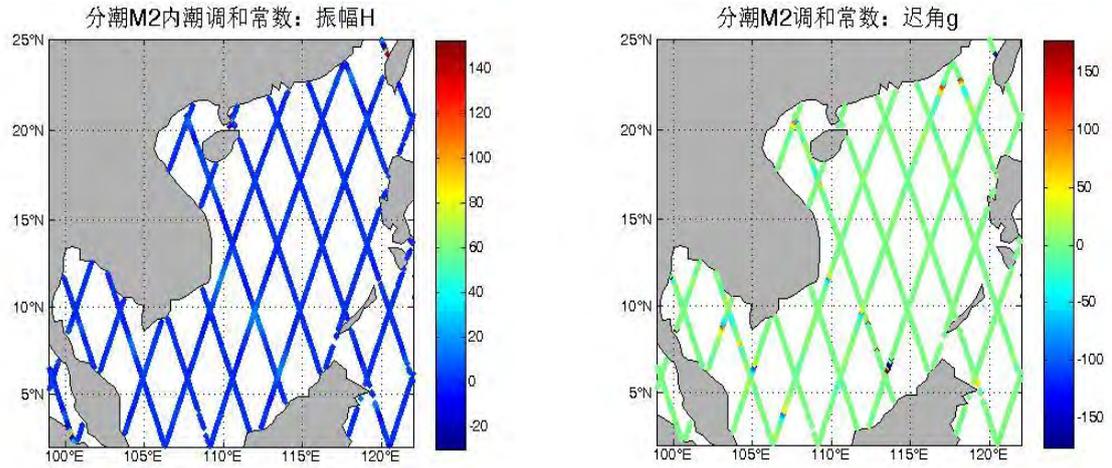


(c) 分潮 K_1 正压潮振幅、迟角分布

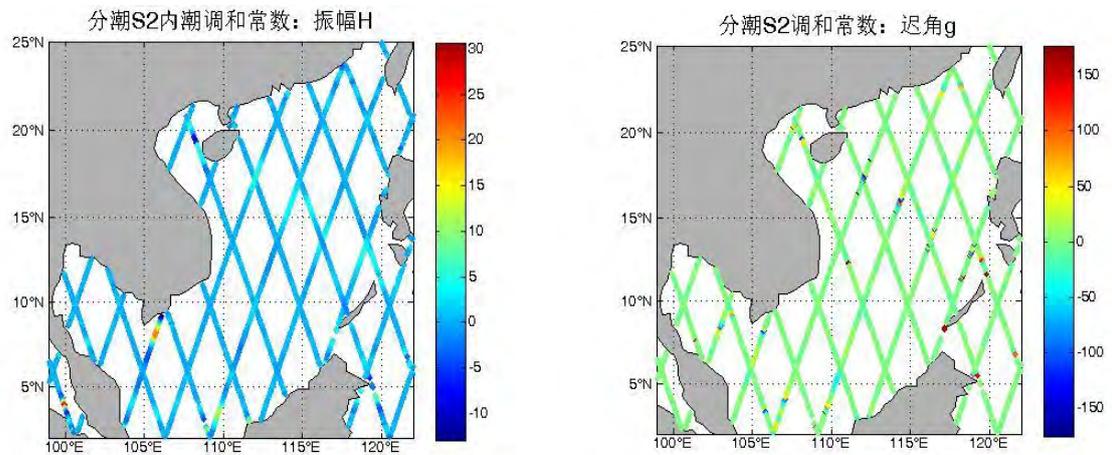


(d) 分潮 O_1 正压潮振幅、迟角分布

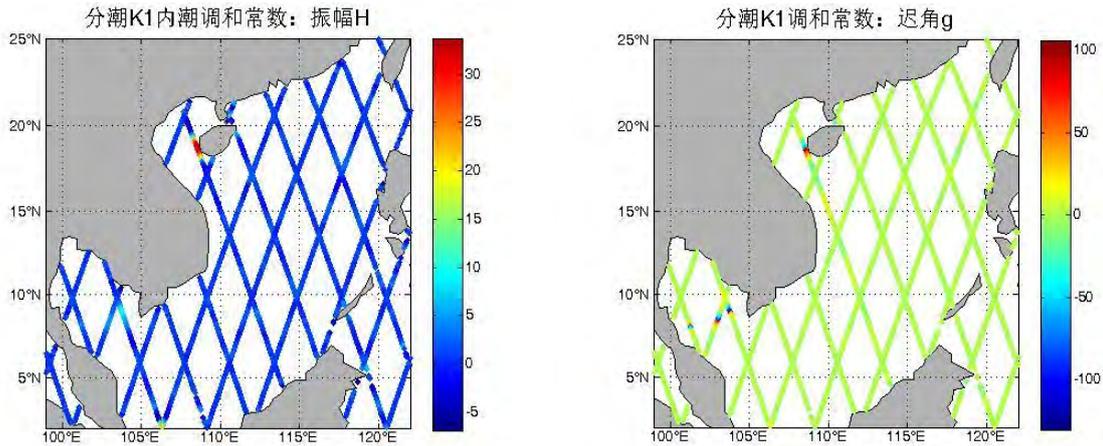
图 5-11 各轨道 4 类分潮正压潮振幅、迟角计算结果



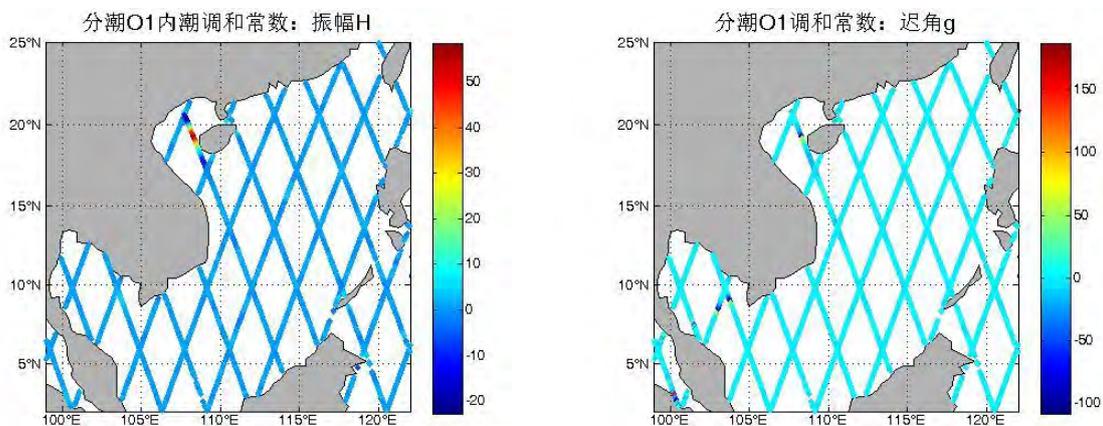
(a) 分潮 M_2 内潮振幅、迟角分布



(b) 分潮 S_2 内潮振幅、迟角分布



(c) 分潮 K_1 内潮振幅、迟角分布



(d) 分潮 O_1 内潮振幅、迟角分布

图 5-12 各轨道 4 类分潮内潮振幅、迟角计算结果

通过观测内潮与正压潮的分离图，可得出结论，利用 11 次多项式拟合方法对沿轨数据 $A\sin G$ 和 $A\cos G$ 进行拟合完全可以得到良好的内潮海表面信号结果。结果表明，利用该简便方法提取内潮海表面信号非常有效，极大地简化之前复杂的内潮提取过程。

5.3 问题 3 模型建立与求解

5.3.1 基于多项式拟合的求解任意点调和常数的数学模型

基于轨道上的调和常数，提出一种多项式拟合模型。即在研究区域内任选一点，根据该点到其最近两条上（下）行轨的距离比，在这两条上（下）行轨间的下（上）行轨上可找到与该点具有相同距离比的一系列点，对这些点的调和常数进行多项式拟合，从而可得到该点的调和常数。采用该拟合方法，可得到研究区域内任意点的调和常数。接下来对此拟合方法进行详细介绍。

1、确定与点最近的四条轨道

在研究区域内，上行轨和下行轨交错相交构成了一系列四边形，如图 5-14 所示。若要得到区域内任意一点的调和常数，首先我们要确定这个点具体位于哪个四边形内，通过确定该点所位于的四边形，从而可确定出与该点最近的两条上行

轨和两条下行轨。

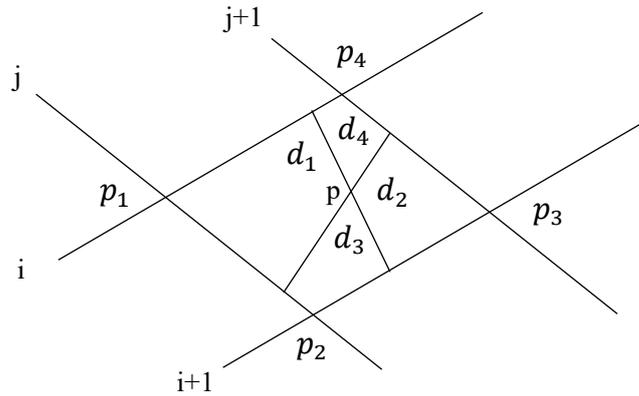


图 5-14 点 p 和与其最近的四条轨道以及到轨道的距离

如图 5-14 所示,第 i 、 $i+1$ 条上行轨与第 j 、 $j+1$ 相交围成一个四边形,设该四边形的四个顶点坐标分别为 $p_1(x_1, y_1)$, $p_2(x_2, y_2)$, $p_3(x_3, y_3)$, $p_4(x_4, y_4)$, 在这个四边形区域内,可近似地认为四边形的每一条边都是条直线。那么 $p(x, y)$ 于该四边形内的判断依据是:

$$\text{点 } p \text{ 在直段 } p_1p_4 \text{ 之下: } y < \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1}(x - x_1) + y_1,$$

$$\text{点 } p \text{ 在直段 } p_2p_3 \text{ 之下: } y < \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}(x - x_3) + y_3,$$

$$\text{点 } p \text{ 在直段 } p_1p_2 \text{ 之下: } y < \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) + y_2,$$

$$\text{点 } p \text{ 在直段 } p_3p_4 \text{ 之下: } y < \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}(x - x_4) + y_4,$$

如果同时满足以上四个条件,则确定点位于四边形 $p_1p_2p_3p_4$ 内,从而确定出与点 p 最近的四条轨道:第 i 、 $i+1$ 条上行轨与第 j 、 $j+1$ 条下行轨。

2、计算点 p 到其最近四条轨道的距离

根据点 p 和其所在四边形四个顶点的经纬度,可计算出该点到其所在四边形四条边的距离,进而可得点 p 到其最近四条轨道的距离。在此,以计算点 p 到边 p_1p_4 的距离为例来说明:

- (1) 计算 Δpp_1p_4 三条边的长度: 利用球面上两点间的距离公式: $L = R \arccos[\sin\beta_1 \sin\beta_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)]$, 其中 R 为地球半径, α_1 、 α_2 分别为两点的经度, β_1 、 β_2 分别为两点的维度, 可计算 Δpp_1p_4 三条边的长度。
- (2) 计算 Δpp_1p_4 的面积: 根据三角形的面积公式: $s = \sqrt{l(l - pp_1)l(l - pp_4)l(l - p_1p_4)}$, 其中 $l = (pp_1 + pp_4 + p_1p_4)/2$, 可计算 Δpp_1p_4 的面积。

(3) 计算点 p 到边 p_1p_4 的距离: $\Delta_{pp_1p_4}$ 还可以表示为: $s = (d_1 * p_1p_4)/2$, 其中 d_1 为点 p 到边 p_1p_4 的距离。从而可以计算出: $d_1 = 2\sqrt{l(l-pp_1)l(l-pp_4)l(l-p_1p_4)}/p_1p_4$, 其中 $l = (pp_1 + pp_4 + p_1p_4)/2$ 。

同理, 我们可以计算出点 p 到其它三条边 p_2p_3 、 p_1p_2 、 p_3p_4 的距离: d_2 、 d_3 、 d_4 。从而可知点 p 到第 i 、 $i+1$ 条上行轨的距离: d_1 、 d_2 , 到第 i 、 $j+1$ 条下行轨的距离: d_3 、 d_4 。

3、拟合点 p 的调和常数

对于研究区域内的任意一点, 要么位于轨道上, 要么位于轨道外。如果该点位于轨道上, 那么根据第三部分拟合的多项式可得到该点的调和常数。如果该点不在轨道上, 则根据该点到其最近的两条上(下)行轨间的距离比, 在这两条上(下)行轨间的下(上)行轨上可以找到与该点具有相同距离比的一系列点, 对这些点的调和常数进行多项式拟合, 根据拟合得到的多项式从而得到该点的调和常数。

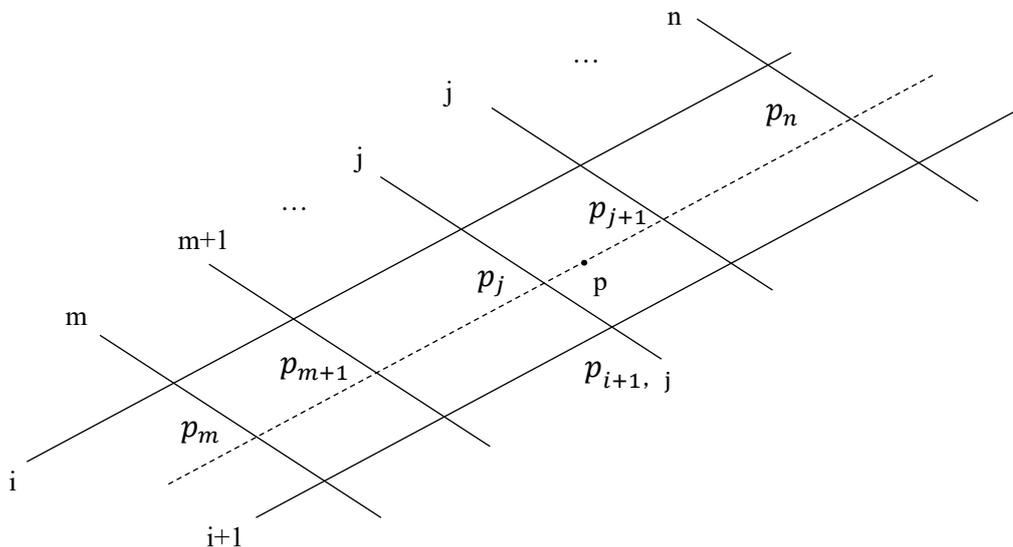


图 5-15 点 p 以及上行轨间的下行轨上与其具有相同距离比的一系列点

在此, 以拟合上行轨间下行轨上的一系列点得到点的调和常数为例来详细说明:

(1) 如图 5-2 所示, 点 p 位于第 i 和第 $i+1$ 条上行轨之间, 在这两条上行轨间又有 $n-m+1$ 条下行轨。根据点 p 到这两条上行轨间的距离比, 在 $n-m+1$ 条下行轨上可以确定出与点 p 具有相同距离比的一系列点: p_m 、 p_{m+1} 、 \dots 、 p_j 、 p_{j+1} 、 \dots 、 p_n 。

(2) 根据本文问题二中的多项式拟合, 可以得到轨道上任意点的函数值: $\hat{f}(y)$ 、 $\hat{g}(y)$, 其中 $\hat{f}(y) = H \cos G$ 、 $\hat{g}(y) = H \sin G$ 。所以我们可得到 p_m 、 p_{m+1} 、 \dots 、 p_j 、 p_{j+1} 、 \dots 、 p_n 这一系列点相应的函数值: $H_j \cos G_j$ 、 $H_j \sin G_j$, ($j = m, m+1, \dots, n$)。

(3) 对上述 $n-m+1$ 个点的函数值: $H_j \cos G_j$ 、 $H_j \sin G_j$, ($j = m, m+1, \dots, n$) 分别进行 3~15 次的多项式拟合方法同第三部分。依据残差的大小, 选择最佳

拟合次数: $\hat{f}(y) = a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots + a_my^m$ 、 $\hat{g}(y) = a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots + a_ny^n$ 。根据拟合得到的多项式可获取点 p 的函数值: $\hat{f}(y)$ 、 $\hat{g}(y)$, 其中 $\hat{f}(y) = H\cos G$ 、 $\hat{g}(y) = H\sin G$ 。最后通过坐标转化, 可得该点的振幅 (H) 和迟角 (G)。

同理, 拟合下行轨间上行轨上的一系列点也可以得到点 p 的振幅和迟角。综上所述, 研究区域内的任意点, 可以通过拟合上行轨上的点, 也可以通过拟合下行轨上的点来获取该点的振幅和迟角。本文依据拟合点的个数进行选取, 如果上行轨上的拟合点的个数多于下行轨上的拟合点的个数, 则选择通过拟合上行轨上的点获得该点的振幅和迟角。反之, 则选择通过拟合下行轨上的点获得该点的振幅和迟角。

5.3.2 二维空间属性插值模型

高度计卫星在进行海面潮高测量时, 不可能对每一个数据点进行测量, 只能得到一定数量的数据, 即沿轨道的潮高。这些数据可以反映出部分位置点的调和常数, 利用计算出来的调和常数进行插值, 可以得到研究区域内的任意点的调和常数。由于得到的各分潮的调和常数是分布不均匀的离散数据。为了方便进行插值与图形绘制, 所以需要数据进行网格化。所谓网格化是指通过一定的插值方法, 将稀疏的、不规则分布的数据插值加密为规则分布的数据, 以适合绘图的需要。空间插值的方法有很多, 常见的有反距离加权插值算法, 克里金 (kriging) 插值法, 自然邻近点插值法, 泰森多边形插值法, 样条函数插值法等插值方法。针对二维空间属性建模的插值方法进行研究, 二维空间插值数据点为 xy 坐标 (经纬度) 加上属性值 (振幅或迟角), 即 (x, y, p) 。本文主要以反距离加权插值算法和基于 B 样条函数插值算法两种模型进行研究, 实现了在二维空间中的属性插值, 即计算出研究区域内任意点的调和常数, 通过对插值效果的分析比较来说明两种插值算法的优势和缺点。

1、反距离加权插值模型

反距离加权法是对空间离散数据点的一种确定性的插值方法, 它的原理是基于对“地理学第一定律”的假设, 地理事物或属性在空间分布上互为相关, 存在聚集, 随机, 规则分布, 即两个物体间距离越近越相似[5]。其基本思想是: 待估点的属性值为各个已知点属性值得加权平均值, 公式如下:

$$F(x, y) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{f_i}{[d_i(x, y)]^\mu}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{[d_i(x, y)]^\mu}} \quad (17)$$

其中, f_i 是已知数据点的函数值。 $d_i(x, y) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$, 表示点 (x, y) 到点 (x_i, y_i) 。 μ 值一般取 2, 通过定义更高的幂, 相邻数据受到的影响越大, 插值数据也越接近最近采样点的值。

2、基于 B 样条的插值算法

在数据量较大的时候, 反距离加权的效率会变低, 同时它的插值效果容易受外界因素的影响, 使得效果不太理想, 在这样的情况下, 本文进一步的对基于 B 样条函数插值方法进行了研究, B 样条插值算法效率高, 且插值效果能很好的逼近散乱数据点。基于 B 样条的大规模插值方法是一种比较有效的大规模

插值方法，该方法无法保证插值曲面能够完全通过所有插值控制点，只能产生在一定误差范围内的拟合曲面。

B 样条函数需要进行方程的求解，往往需要解一个线性方程组，下面给出 B 样条插值算法的公式：

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \dots \leq x_n$$

在上公式中 $x_0, x_1 \dots$ 等为样条上的一些节点，假设接下来需要用到的 B 样条函数为 k 次 B 样条函数。这里需要用递推公式来表示出 B 样条插值函数：

$$B_{i,0} = \begin{cases} 1 & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (18a)$$

$$B_{i,k}(x) = \frac{x-x_i}{x_{i+k}-x_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1}-x}{x_{i+k+1}-x_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x) \quad (18b)$$

在计算过程中可能出现除零的情况，这里规定除零的结果为零。特别的，当 $x_{i+1} - x_i$ 为恒定的值的时候，说明每一段的距离都是相等的，则可以称这个时候的 B 样条插值函数为 k 次等距 B 样条插值。

在式子当中 $[x_i, x_{i+1}]$ 为 B 样条的第 i 个节点区间。这里给出需要用到的三次 B 样条函数函数的基函数：

$$B_0(u) = (1 - u^3 + 3u^2 - 3u)^3/6 \quad (19a)$$

$$B_1(u) = (4 - 6u^2 + 3u^3)/6 \quad (19b)$$

$$B_2(u) = (1 + 3u + 3u^2 - 3u^3)/6 \quad (19c)$$

$$B_3(u) = u^3/6 \quad (19d)$$

使用双三次 B 样条插值算法，在一定空间区域给定了一些散乱点，需要产生一个区间，使得这个曲面穿过这些点。把给定的数据点的区域进行划分，生成 $m \times n$ 个数量的三次 B 样条曲面，用这些小的曲面来拟合待求面，接下来就是求出每一个小曲面的曲面函数。

这里利用两个维度产生的网格和 B 样条基函数的乘积求得，如下式：

$$S(x,y) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 B_k(s) B_l(t) P_{(i+k),(j+l)} \quad (20)$$

式子(2.23)就是每一个小曲面的曲面方程， B_k 和 B_l 为三次 B 样条函数的基函数， $P_{i,j}$ 代表划分网格后的 p 中的第 i,j 个已知点。

这里将求三次 B 样条曲面问题转化为了求划分成的小网格 $P_{(i+k),(j+l)}$ 曲面的问题。现在逐步的求出所有的网格，给定了一个点 $M(x,y,p)$ ，可由上式知道其跟周围的 4×4 个已知点相关，代入式子(2.23)就可以得到改点的 z 值大小跟该点周围 16 个已知点的关系。这一步就是为了找到跟这个点配对的 16 个控制点，再利用这些控制点生成网格。然而往往会有多组点可以跟此点匹配，这个时候就需要进行点集的筛选。这里借鉴方差的思想来进行点集的筛选：

$$s(P_{ij}) = \sum (B_k(c) B_l(c) P_{ij} - B_k(c) B_l(c) P_c)^2 \quad (21)$$

这里再把式子(2.24)中 $s(P_{ij})$ 对 P_{ij} 求导并使其为零，解方程则可求出 P_{ij} 的值。这样确定了相关的 16 个控制点，也确定了该点所在小区面的曲面方程。B 样条

插值算法不能保证产生的曲面通过所有的给定点,但是该算法能在数据规模很大的情况下产生优良的结果模型。

5.3.3 模型求解与分析

在求解此题的过程中,建立了两个数学模型进行求解,分别是基于多项式拟合的求解任意点调和常数的数学模型与二维空间属性插值模型。在插值模型中,插值算法种类繁多,本文主要以反距离加权插值算法和基于 B 样条函数插值算法两种模型进行研究。在拟合与插值的基础上,利用 Matlab 中的 `m_map`, 绘制所研究区域 ($2^{\circ} \sim 25^{\circ} \text{N}$, $99^{\circ} \sim 122^{\circ} \text{E}$) 的四个主要分潮的潮汐调和常数分布与同潮图。并与

1、基于多项式拟合的求解

根据 5.3.1 所介绍的基于多项式拟合求解任意点调和常数的数学模型, d 得到如表 5-14 的轨道交点坐标, 并使用 matlab 进行了计算, 求解出研究区域内任意点的 4 个主要分潮的调和常数。绘制出各分潮的同潮图。由于时间有限, 无法排除 $2^{\circ} \sim 25^{\circ} \text{N}$, $99^{\circ} \sim 122^{\circ} \text{E}$ 区域内的陆地, 且对陆地进行了拟合、插值, 绘制出的等位线也包括陆地。有陆地的同潮图(即左边的)为相关资料的同潮图, 进行对比验证。

表 5-14 轨道交点坐标

经度	纬度	经度	纬度	经度	纬度	经度	纬度
116.2349	13.3939	113.4189	13.4137	107.7505	20.7810	103.5027	9.7311
114.8316	17.0702	111.9876	17.1207	110.5441	5.9729	102.0557	5.9672
113.4017	20.8160	110.5612	20.8148	109.1675	9.7518	100.6411	9.7992
119.0753	5.9528	113.3993	6.0489	109.0806	2.1850	99.2203	5.9445
120.5336	2.1324	111.9917	9.7198	107.7156	5.9577	100.5861	2.1443
120.4914	17.1495	117.5692	24.1560	121.9462	6.0666	119.0599	13.4542
119.0338	20.6443	120.3666	24.0966	120.4873	9.8007	117.6506	17.0612
114.8308	9.7569	110.5722	13.4221	106.3452	9.7451	121.8683	20.7037
117.6253	9.7513	109.1541	17.1203	106.2628	2.1615	121.9238	13.7151
116.2315	20.6935	111.9160	2.2066				

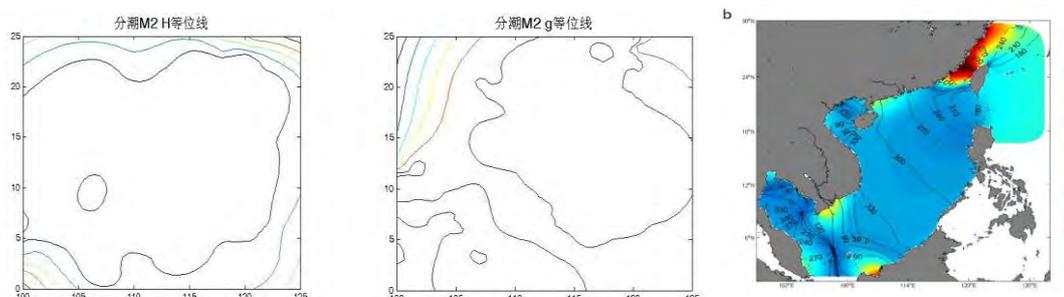


图 5-16 拟合 M2 分潮同潮图与相关资料的同潮图

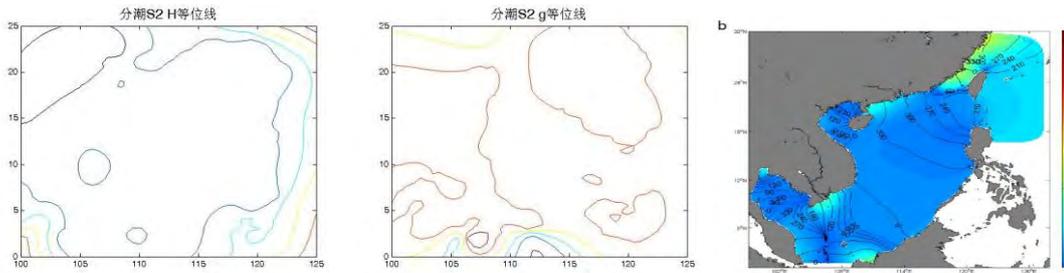


图 5-17 拟合 S2 分潮同潮图与相关资料的同潮图

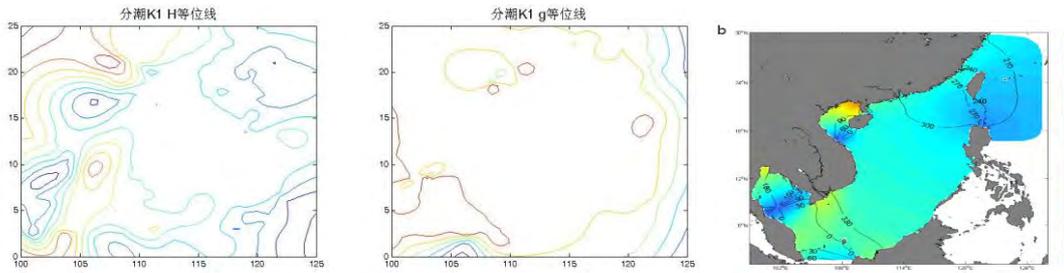


图 5-18 拟合 K1 分潮同潮图与相关资料的同潮图

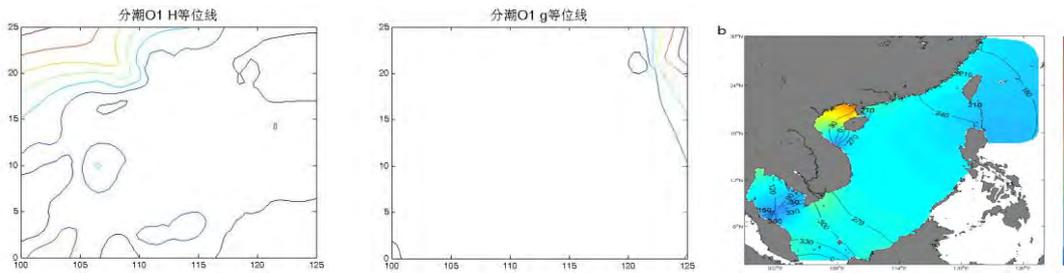


图 5-19 拟合 O1 分潮同潮图与相关资料的同潮图

综合分析基于最小二乘法的多项式拟合算法所绘制出的同潮图和相关资料的同潮图，发现在拟合次数在特定值时，两者同潮图较为符合，所以基于最小二乘法的多项式拟合数学模型正确。

2、二维空间属性插值求解

使用反距离加权插值算法插值模型绘制出的同潮图如下所示。

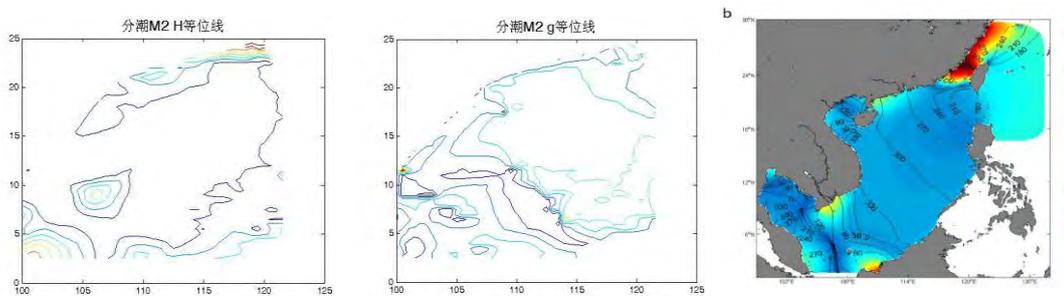


图 5-20 拟合 M2 分潮同潮图与相关资料的同潮图

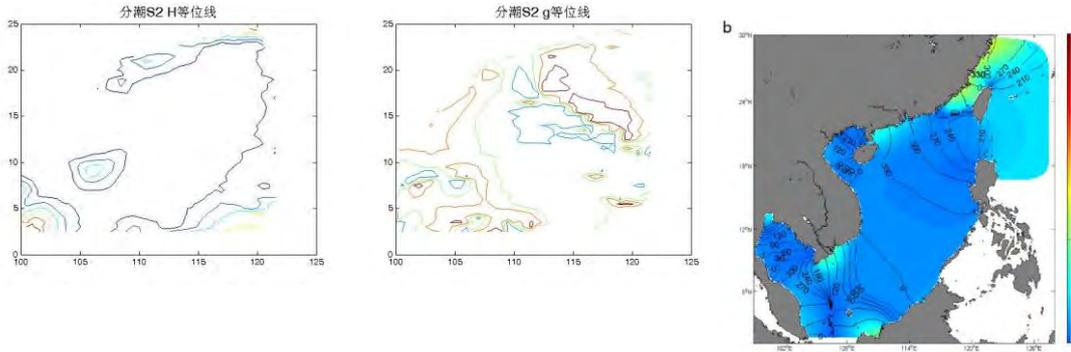


图 5-21 拟合 S2 分潮同潮图与相关资料的同潮图

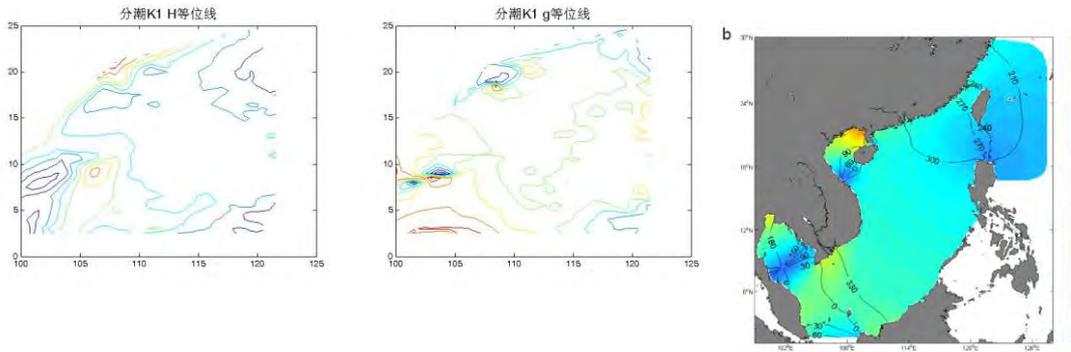


图 5-22 拟合 K1 分潮同潮图与相关资料的同潮图

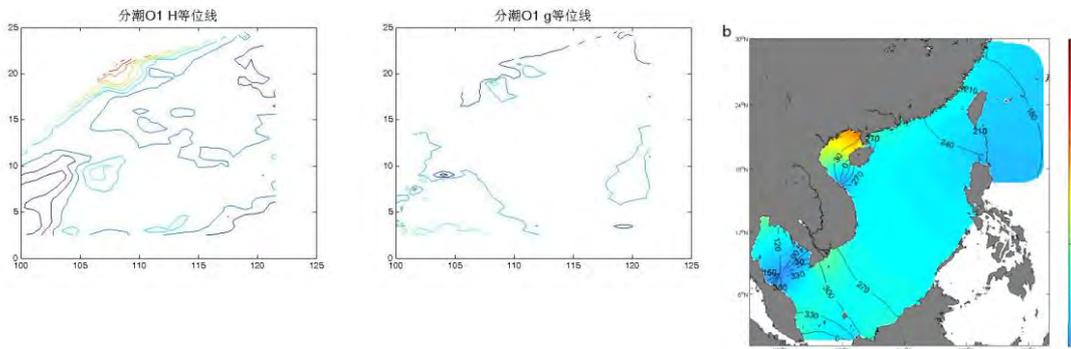


图 5-23 拟合 O1 分潮同潮图与相关资料的同潮图

使用 B 样条插值算法插值模型绘制出的同潮图如下所示。

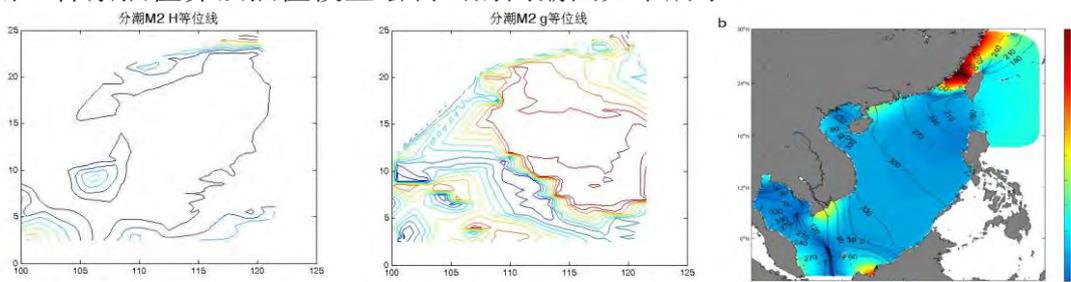


图 5-24 拟合 M2 分潮同潮图与相关资料的同潮图

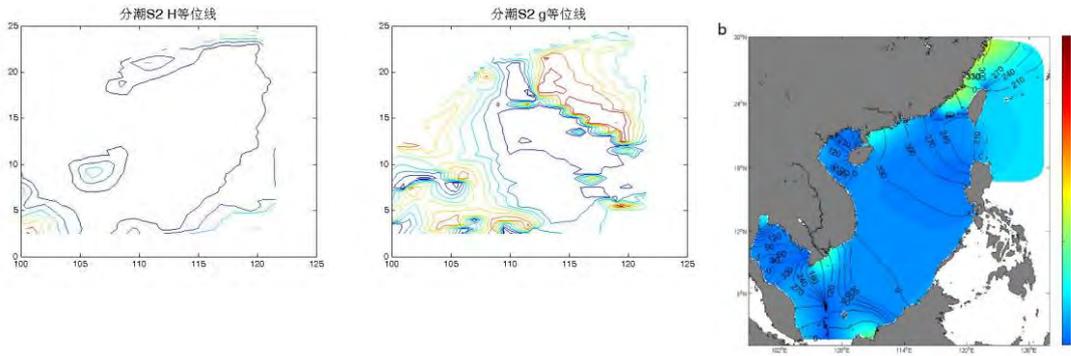


图 5-25 拟合 S2 分潮同潮图与相关资料的同潮图

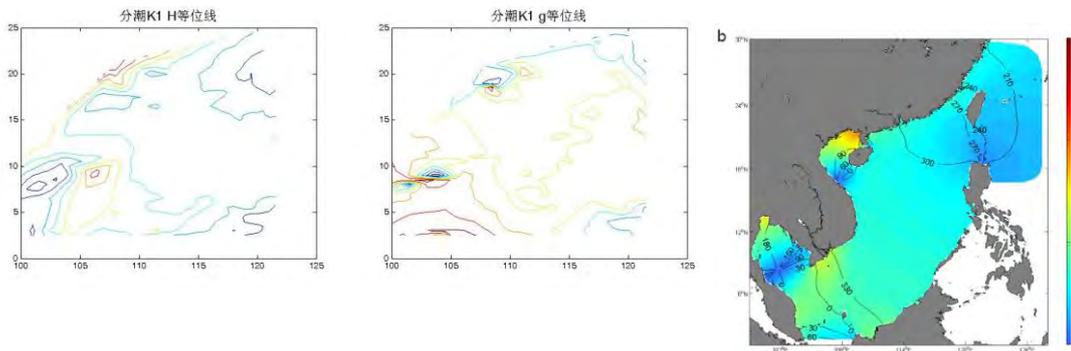


图 5-26 拟合 K1 分潮同潮图与相关资料的同潮图

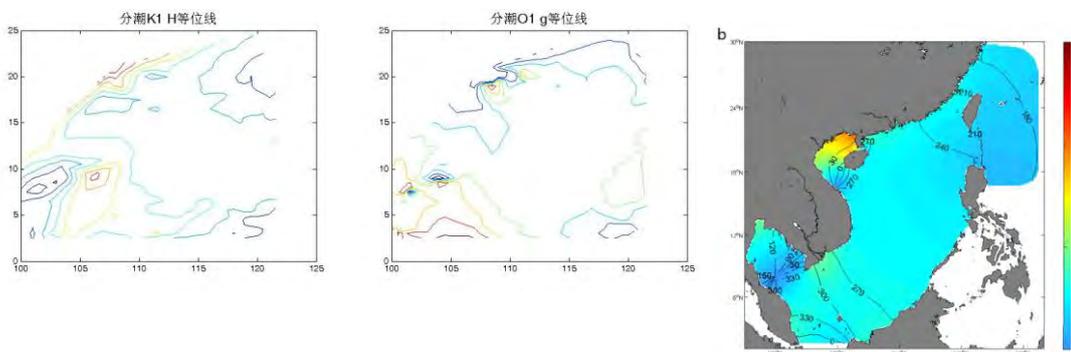


图 5-27 拟合 O1 分潮同潮图与相关资料的同潮图

综合分析两种插值算法所绘制出的同潮图，并与相关资料的同潮图进行对比，发现差别不是太大，所以二维空间属性插值法模型正确。还可以得出使用 B 样条插值算法插值模型绘制出的同潮图优于基于反距离加权插值模型的同潮图。

5.4 问题 4 模型建立与求解

5.4.1 对问题 2 的拟合次数的分析

在使用基于最小二乘法的多项式拟合的数学模型，进行正压潮与内潮的分离时，使用不同的拟合次数进行求解。以 25 号轨道的 M2、K1 分潮进行 3、5、11 次多项式拟合，并做对比，如下图所示：

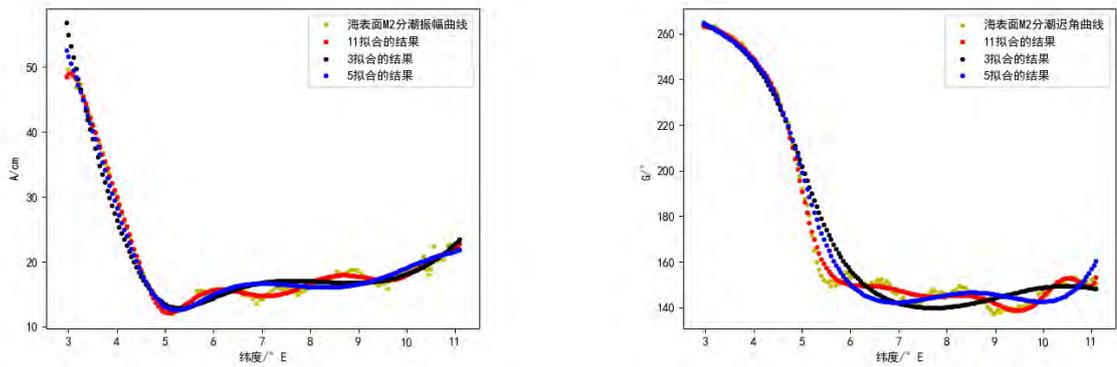


图 5-28 25 号轨道分潮 M2 拟合振幅、迟角结果

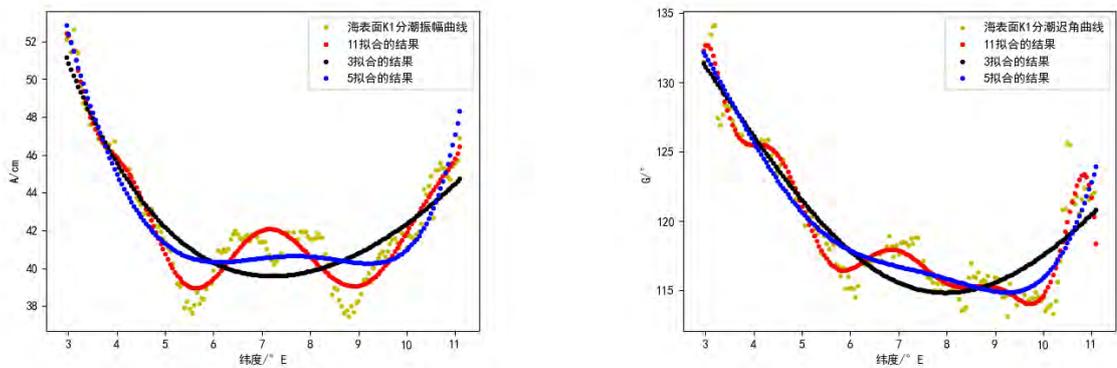


图 5-29 25 号轨道分潮 K1 拟合振幅、迟角结果

观察上图可知，3 次多项式的拟合结果明显偏离调和和分析得到的四个主要分潮振幅值与迟角值，不能正确地拟合出正压潮值；5 次多项式拟合结果在某些位置同样存在偏离现象，即拟合结果不能准确地表示正压潮值；而 11 次多项式拟合结果与海表面 M2 分潮振幅的符合程度最高，能准确地表示正压潮值，从而保证内潮提取结果的准确性。

根据沿轨分离模型建模，沿图 X 中 16 个轨道，对四个主要分潮的调和常数进行 3~15 次多项式拟合来提取内潮海表面信号。表 5-15 给出了 M2 分潮沿不同轨道 3~15 次多项式拟合得出的振幅、迟角的平均绝对均差。

表 5-15 沿不同轨道 3~15 次多项式拟合 M2 分潮振幅的绝对均差

轨道	次数												
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4.34	3.31	2.12	1.90	1.86	1.67	1.65	1.73	1.54	1.05	1.01	1.01	1.00
3	1.14	1.09	1.01	0.52	0.48	0.39	0.39	0.36	0.36	0.33	0.33	0.32	0.32
5	6.78	5.24	5.31	5.89	6.28	4.93	4.16	4.42	4.38	4.37	4.05	3.85	3.42
6	3.46	4.51	4.08	2.90	2.67	2.71	2.37	2.12	2.00	1.94	1.85	1.69	1.72
8	3.71	2.96	3.17	2.65	2.57	2.37	2.37	2.05	2.05	1.86	1.83	1.68	1.58

9	16.39	9.12	8.78	3.82	3.39	2.52	2.61	2.68	1.96	1.72	1.80	1.75	1.51
12	1.69	1.30	0.83	0.60	0.60	0.54	0.53	0.50	0.47	0.42	0.42	0.42	0.42
14	1.30	1.25	0.69	0.66	0.70	0.70	0.67	0.74	0.68	0.64	0.60	0.59	0.59
16	1.78	0.97	0.90	0.92	0.88	0.89	0.81	0.65	0.65	0.65	0.66	0.66	0.62
17	5.20	5.52	4.17	4.01	3.06	2.67	2.81	2.45	2.45	2.30	2.09	1.84	1.93
20	4.93	2.89	2.56	2.17	1.86	1.84	1.67	1.76	1.66	1.62	1.60	1.63	1.64
21	6.08	6.24	5.92	3.47	2.70	2.88	2.88	1.96	1.74	1.82	1.73	1.53	1.52
23	5.36	5.71	3.95	2.99	3.01	2.15	1.51	1.56	1.41	1.18	1.20	1.18	1.11
25	1.26	1.27	0.97	0.69	0.65	0.52	0.53	0.49	0.45	0.49	0.42	0.40	0.39
27	8.26	7.15	6.27	4.21	3.00	2.96	2.80	2.76	2.51	2.53	2.65	2.20	2.22
28	3.69	3.27	2.77	2.63	2.59	2.16	2.12	1.82	1.85	1.84	1.57	1.58	1.58

表 5-16 沿不同轨道 3~15 次多项式拟合 M2 分潮迟角的绝均差

轨道	次数													
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
2	12.19	10.78	6.09	3.98	4.30	2.98	2.92	3.21	3.63	2.63	1.98	1.97	1.97	
3	1.34	1.33	1.21	0.88	0.55	0.52	0.47	0.41	0.42	0.41	0.37	0.31	0.31	
5	26.78	23.04	24.53	19.68	16.97	13.75	13.43	10.08	8.63	8.48	8.00	8.20	8.18	
6	18.78	15.23	11.17	7.88	7.91	7.96	6.81	6.95	7.22	6.62	6.43	6.61	6.48	
8	32.29	32.45	20.37	20.46	13.88	12.61	11.01	9.38	8.94	7.40	7.38	5.86	6.05	
9	19.33	18.71	16.66	15.41	11.05	10.86	8.55	8.08	7.77	6.55	6.33	6.23	5.80	
12	1.92	1.60	1.47	1.55	1.63	1.72	1.67	1.23	1.21	1.21	1.17	1.11	1.09	
14	3.46	3.40	2.52	2.17	2.09	2.02	1.97	1.83	1.44	1.40	1.47	1.49	1.49	
16	1.45	1.27	1.31	1.24	1.00	0.95	1.02	1.01	0.91	0.99	0.97	0.84	0.94	
17	28.28	26.94	22.24	18.41	8.99	7.35	5.50	6.82	6.92	7.90	4.67	4.96	4.07	
20	19.13	10.60	6.24	7.92	6.74	6.36	7.40	5.77	6.37	5.64	5.77	4.41	4.46	
21	11.96	7.37	11.13	9.09	4.64	4.13	5.45	5.04	3.08	2.69	3.13	2.73	2.11	
23	5.15	6.76	4.94	3.51	3.26	3.05	2.20	2.22	2.15	1.95	1.92	1.95	1.75	
25	4.82	4.61	3.97	2.47	2.49	2.44	2.36	2.17	1.79	1.57	1.45	1.23	1.22	
27	35.10	20.33	16.87	14.97	12.48	11.06	7.11	7.45	7.81	7.50	6.57	5.25	4.72	
28	18.56	15.24	15.09	11.16	13.14	8.17	8.87	7.82	7.45	7.14	7.49	7.67	7.84	

根据上表中的中 M2 分潮沿不同轨道 3~15 次多项式拟合各主要分潮的振幅、迟角的绝均差，可以看出拟合次数越高拟合结果的绝均差不一定越小。从量级上讲，7，8，9，10，11，12，14 次多项式拟合的振幅绝均差相当，明显好于其他次数的拟合结果。同样，对迟角的高次多项式拟合得到的绝均差也不一定小，11 次多项式拟合得到的迟角绝均差最小，反而 13 次多项式拟合结果的绝均差最大。

综上所述，问题 2 中，在使用最小二乘法进行多项式拟合时，当拟合次数为 11 次时，结果最为精确。

5.4.2 对问题 3 的特定函数的分析

问题 3 建立两种数学模型, 分别是基于多项式拟合的求解任意点调和常数的数学模型与二维空间属性插值模型, 其中二维空间属性插值模型主要讨论反距离加权插值算法和基于 B 样条函数插值算法两种模型。针对不同的数学模型, 绘制同潮图, 与相关资料中的同潮图进行对比。

对第一种数学模型进行分析, 将问题 2 中最佳拟合次数推广至问题 3, 我们提出了一种拟合参数优化模型, 当拟合次数为 11 时, 效果理想, 与相关资料同潮图进行对比, 验证此模型成功。下图为优化后的同潮图。

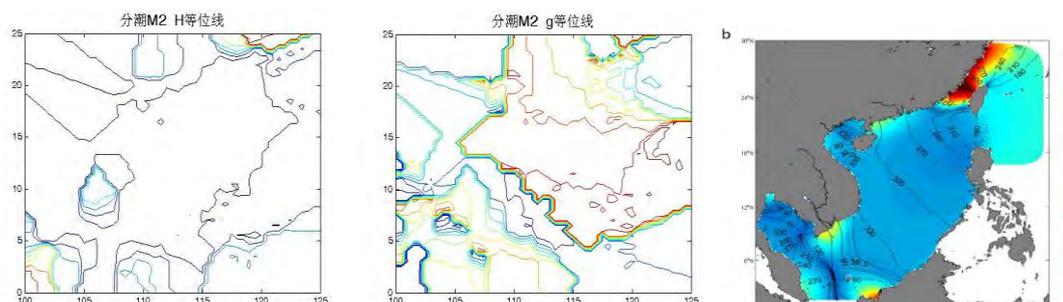


图 5-30 拟合 M2 分潮同潮图与相关资料的同潮图

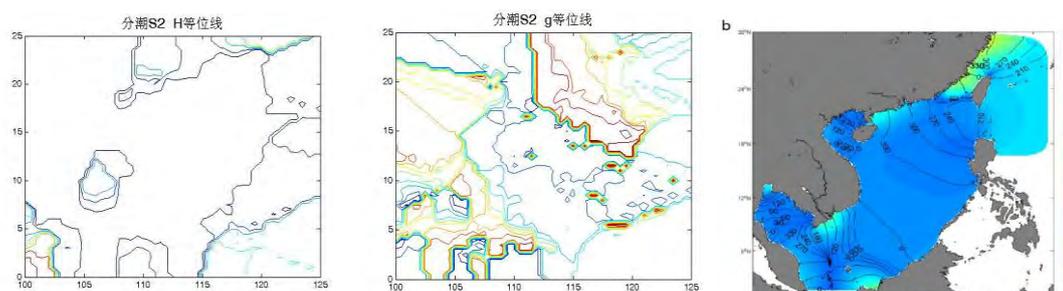


图 5-31 拟合 S2 分潮同潮图与相关资料的同潮图

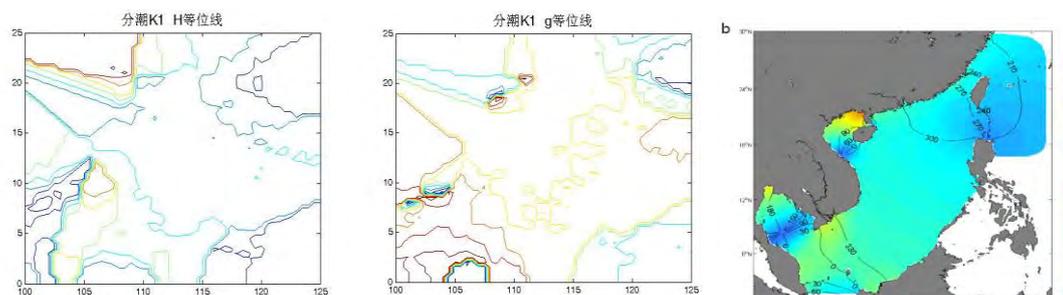


图 5-32 拟合 K1 分潮同潮图与相关资料的同潮图

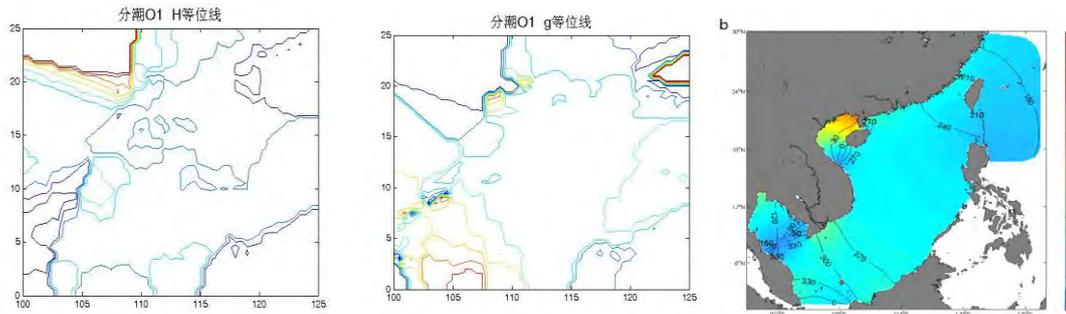


图 5-33 拟合 O1 分潮同潮图与相关资料的同潮图

对于第二种二维空间属性插值法,通过选取特定的函数进行插值,本文主要研究反距离加权插值算法和基于 B 样条函数插值算法两种函数,通过对比其同潮图,可以得出结论,基于 B 样条函数插值算法的模型更为优秀。

参考文献

- [1]赵杰,汪一航,王永刚,王建.基于卫星高度计资料提取浙江近海的潮汐信息[J].应用海洋学学报,2018,37(03):356-365.
- [2]刘田甲. 潮汐数据插值方法研究[D].南京师范大学,2017.
- [3]王斌,张晓爽,吕咸青,刘宁.高度计资料提取内潮信号的方法[J].解放军理工大学学报(自然科学版),2015,16(03):266-272.
- [4]王延强. 基于卫星高度计的南中国海潮汐提取、同化数值模拟及GIS集成[D].国家海洋环境预报中心,2014.
- [5]王延强,仇天宇,朱学明.基于18.6年卫星高度计资料对南海潮汐的分析与研究[J].海洋预报,2014,31(02):35-40.
- [6]宋箴阳. 基于19年卫星高度计数据的全球潮汐同化模拟[D].中国海洋大学,2013.
- [7]赵云霞,魏泽勋,王新怡.利用T/P卫星高度计资料调和和分析南海潮汐信息[J].海洋科学,2012,36(05):10-17.
- [8]徐晓庆,方国洪,王新怡,魏泽勋,王永刚.渤、黄、东海潮汐的相对导纳及 N_2, K_2, P_1 和 Q_1 分潮的经验同潮图[J].海洋科学进展,2011,29(03):293-306.
- [9]范丽丽. 风暴潮数值同化研究和高度计资料拟合方法研究[D].中国海洋大学,2011.
- [10]孙丽艳. 渤黄东海潮汐底摩擦系数的优化研究[D].中国海洋大学,2006.
- [11]申宏伟. 卫星高度计资料校正及基于连续函数的调和和分析方法研究[D].河海大学,2006.
- [12]毛庆文,施平,齐义泉.运用调和和分析方法分离卫星高度计资料中的潮汐信息[J].海洋工程,2002(01):41-45.
- [13] Yangi, T., A. Morimoto, and K. Ichikawa, 1997. Co-tidal and co-range charts for the East China

- Sea and the Yellow Sea derived from satellite altimetric data. *J. Oceanography*, 53: 303–309.
- [14] Fang, G. H., Wang Y. G., Wei Z. X., Choi B. H., Wang X. Y., and Wang J., 2004, Empirical cotidal charts of the Bohai, Yellow, and East China Seas from 10 years of TOPEX/Poseidon altimetry. *J. Geophys. Res.*, Vol.109:C11006,doi: 1029/2004JC002484.
- [15] Wang Y.H., FANG G. H., Wei Z. X., Wang Y. G., Wang X. Y., Xu X. Q., Cotidal charts and tidal power input atlases of the global ocean from TOPEX/Poseidon and JASON-1 altimetry, *Acta Oceanol. Sin.*, 2012, 31, 4, 11-23.