



“华为杯”第十五届中国研究生 数学建模竞赛

学校

军事科学院

参赛队号

18911010003

队员姓名

1.黄广伟

2.陈 晔

3.徐 航

“华为杯”第十五届中国研究生 数学建模竞赛

题 目 基于卫星高度计海面高度异常资料 获取潮汐调和常数方法及应用

摘 要：

对于问题一：首先建立了正确的潮汐调和常数的调和分析模型，可求得不同时间下各分潮的角速度、交点因子、交点订正角和天文初相角等模型参数。然后，利用最小二乘法求解得到了各分潮的振幅和迟角两个调和常数。除基于题目要求的 M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1 四个主分潮求得其潮汐调和常数外，还基于 9 个（ M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1 、 K_2 、 N_2 、 P_1 、 Q_1 、 S_a ）、21 个分潮求得了更多分潮的潮汐调和常数。最后，采用两种方法对求解结果进行了评价检验：一是将 9 个分潮的调和常数与验潮点数据以散点图的形式绘图，用图形颜色和图形大小表示调和常数的大小，直观地验证求解结果。对比表明，求解得到的 9 个分潮的振幅和迟角均与验潮点数据一致。二是针对每个验潮点，求得与其距离最近的一个星下观测点，计算该观测点的求解结果与验潮点数据的误差，用于评价计算结果。结果表明，主分潮 M_2 的振幅平均误差在 0.3 米以内，表征迟角误差的矢量差 Δ 值在 0.51 米以内；除了主要的 M_2 分潮外，其它 8 个分潮的振幅平均误差均在 0.11 米以内， Δ 值在 0.21 米以内。另外，本文发现在 4、9 和 21 个分潮的求解结果中， M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1 四个主分潮的调和常数差异不大，说明分潮个数对 4 个主分潮的计算结果影响不大；但同时发现，基于 9 个和 21 个分潮的计算结果误差比基于 4 个分潮的结果误差要小，而基于 9 个分潮的计算结果误差与基于 21 个分潮计算结果的误差较为接近。因此在后续研究中，主要基于 4 个和 9 个分潮进行模型求解。

对于问题二：首先，建立了多项式拟合分离正压潮和内潮信号的数学模型，并利用 11 阶多项式进行拟合求解。讨论了待拟合参数的选取，分析了直接对振幅 H 和迟角 G 进行多项式拟合可能带来的问题。然后，对 $H \cos G$ 、 $H \sin G$ 分别进行沿轨多项式拟合，成功分离了正压潮和内潮，并分别得到调和常数。除题目要求的 M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1 四个主分潮外，本文还分离了另外 5 个分潮的正压潮和内潮。最后，本文以散点图的形式绘图，直观地呈现了分离结果。从作图结果

可知,正压潮为缓慢变化的成分,而内潮为快速变化的成分,该结果与理论一致。由计算结果可知,该模型具有很好的正压潮与内潮的分离效果,绝大多数的内潮振幅值在 1cm 以内,与参考文献的结论高度一致。

对于问题三: 采用了**基于坐标系变换的多项式拟合模型和基于三角剖分的自然邻近插值、线性插值模型**等三种模型完成了各分潮同潮图绘制。在基于坐标系变换的多项式拟合模型中,首先通过拉伸和旋转进行坐标系变换,将星下观测点的轨道转换为与坐标轴平行或者垂直。然后,在新的坐标系下,利用与待拟合点横纵坐标相同的观测点数据,进行多项式拟合,再将新坐标反转换。该模型与直接拟合法相比,大大减小空间几何运算的复杂程度。利用拟合结果,作出同潮图可知,拟合得到的振幅和迟角较为准确,但由于本题研究的海域存在陆地、海岸线等,使得拟合精度和拟合范围受到影响,作出的同潮图还有改进的空间。这也说明该方法更适用于开阔海域。然后,本文采用基于三角剖分的自然邻近插值、线性插值两种模型,作出 9 个分潮的同潮图。同时利用题目提供的水深数据,确定了陆地的范围,将陆地范围内的插值剔除,避免陆地范围插值的影响。从各个分潮振幅和迟角的等值图与观潮站实测数据的对比可知,两种插值模型的准确性明显高于多项式拟合模型。在观测站附近的振幅和迟角的插值结果与实测结果符合程度非常高,并且振幅和迟角的变化趋势也符合实际,即使存在复杂陆地、海岸线的影响,两种插值模型仍然较为准确。最后计算了不同分潮个数下,自然邻近插值法的计算结果与观潮站实测振幅的 RMSE 和矢量差 Δ 的 RMS,可知,采用 9 个分潮计算时,自然邻近插值法的计算结果与实测结果一致性较好,除了主分潮 M_2 之外,其余 8 个分潮的振幅 RMSE 均低于 0.11 米,说明插值精度较高。

对于问题四: 首先建立了潮汐调和常数多项式拟合优度的评价模型:对于单独一段数据,采用振幅的 RMSE ($\Delta H_{RMS,K}$) 和 Δ 的 RMS ($\Delta_{RMS,K}$) 两个参数表征拟合优度,两个参数越小,则认为拟合越优。而对于多段数据,则采用所有轨道上数据拟合结果的 $\Delta H_{RMS,K}$ 和 $\Delta_{RMS,K}$ 的**平均值**来表征拟合的优劣。计算结果表明:随着拟合阶数的增大, $\Delta H_{RMS,K}$ 均值逐渐减小;当阶数达到 10 以上时, $\Delta H_{RMS,K}$ 值趋于平稳,下降不再明显;随着拟合阶数的增大, $\Delta_{RMS,K}$ 均值呈现出先减小后增大的趋势;当阶数达到 11 时, $\Delta_{RMS,K}$ 达到最低点。结合 $\Delta H_{RMS,K}$ 和 $\Delta_{RMS,K}$ 均值的两组计算结果,本文认为,采用 11 阶多项式拟合是最优的。

该研究对于本文的启示:多项式拟合阶数越高,拟合结果并不一定越好,而是存在最优阶数。多项式拟合的效果与具体数据有关,特别是数据的点数。在数据点少时,不宜使用过高的阶数。这对于问题三的解答是有帮助的:问题三中基于坐标系变换的多项式拟合模型,在实际拟合时,能够使用的数据量很小,基本上在 2~7 个点。因为点数较少,本文根据数据数目,相应调整拟合阶数,3 个点及以下采用 1 阶,4 个点采用 2 阶,5 个点及以上则采用 3 阶多项式拟合。另外,本文计算出的最佳阶数 11 不是一成不变的,针对不同的数据,不同的情况,应该重新评估和计算最佳拟合阶数。

一、问题重述

1.1 问题背景

海洋潮汐是在天体引潮力作用下形成的长周期波动现象,在水平方向上表现为潮流的涨落,在铅直方向上则表现为潮位的升降。海洋潮汐的研究已有悠久的历史,开始于十七世纪后半叶,1687年Newton在前人和自己研究工作的基础上,归纳出万有引力定律,用来解释海洋的潮汐现象,并提出平衡潮理论,后来Bernoulli等人对这一理论进行了完善。平衡潮理论可以用来解释高低潮、日潮不等、大小潮等现象,但由于当时把属于动力学范畴的潮汐,当成静力学来处理,因而不能全面解释本属于动力学的潮汐现象。后来法国科学家Laplace创立了潮波动力学理论,并将地转偏向力引入到潮波动力学理论方程中,将潮汐理论向前推进了一大步。

卫星高度计的出现是海洋潮汐学的一次大跨越,通过测量脉冲经海面反射之后的往返时间,获得卫星距海面的高度。其主要利用所得到的海面动力高度同化反演海洋重力场、流场、潮、大地水准面、海洋重力异常等方面。1992年美国国家航空航天局和法国空间局联合发射的TOPEX/POSEIDON卫星,作为世界上第一颗专门应用于世界大洋环流的高度计卫星,为潮汐研究提供了前所未有的信息源,推动了海洋潮汐的研究。尤其是近十几年,卫星高度计数据被广泛应用于海洋潮汐分布及其特征的研究中,建立了诸多全球和区域潮汐数值模型。为了完善改进已有的数值模型,对水位调和函数的深入研究必不可少。

1.2 问题要求

本研究主要根据已有的卫星及验潮点数据资料,建立调和与分析数学模型,解决以下几个问题:

问题 1: 根据沿轨道的星下观测点的海面高度异常值,提取所有星下观测点各主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的潮汐调和常数,相应的资料长度决定是否可以有效提取分潮的潮汐调和常数;对提取的潮汐调和常数,利用潮汐验潮点的调和常数给予评价或检验,并给出评价结果的分析或评价。

问题 2: 得到所有星下观测点各主要分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1) 的潮汐调和常数,沿轨道作图后,可发现潮汐调和常数在沿轨道方向,在空间有细结构,而此细结构是内潮对正压潮的调制;请设法对沿轨道的各分潮的潮汐调和常数进行正压潮和内潮的分离。

问题 3: 设计数据插值或拟合方法给出南海的各主要分潮的同潮图,并利用潮汐验潮点的调和常数给予评价或检验,并给出评价结果的分析或评价。

问题 4: 如果在对沿轨道的潮汐调和常数分离、插值或拟合的过程中,利用了特定的函数进行拟合,是否能够确定出需利用的特定函数的最佳(高)次数?上述结论是否对第 3 问有启示或帮助。

二、基本假设与符号说明

2.1 基本假设

- 假设 1: 所研究海域可以视为平面;
- 假设 2: 卫星绕地球转动周期恒定;
- 假设 3: 地球自转周期恒定;
- 假设 4: 实际潮位为有限 J 个较主要分潮迭加的结果。

2.2 符号说明

符号	符号说明
M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1	主要分潮
N_2 、 K_2 、 P_1 、 Q_1	其他分潮
S_a 、 S_{sa} 、 M_m 、 M_f	长周期分潮
μ_0 、 μ_1 、 μ_2 、 μ_3 、 μ_4 、 μ_5 、 μ_6	Doodson 数
Δ	矢量差
h	高度
S_0	余水位
f_j	交点因子
u_j	交点订正角
H 、 H_j	振幅
g 、 g_j	迟角
V_{0j}	天文初相角
σ	分潮的角速度
$n(t)$	噪声
d	验潮站与观测点的地表距离
C	经纬度到地表距离的转换系数
Lon_{sta} 、 Lat_{sta}	验潮站的经纬度
Lon_{sat} 、 Lat_{sat}	观测点的经纬度
Y	年份编号
M	月份编号
D	日期编号
i	1900 年至 Y 年的闰年数
n	累积日期序数
t	时间
K	多项式拟合次数

三、问题一的模型建立与求解

3.1 问题分析

潮流潮汐是在天体引潮力作用下形成的长周期波动现象,由潮汐平衡潮理论可知引潮力或引潮势可以展开许多不同周期的振动叠加的结果,因此它就可以用一系列分潮波之和进行表示,这些分潮波有全日分潮族、半日分潮族等等。高度计的出现,引发部分学者开展了插值方法的研究,并取得了一些结果。本题根据沿轨道的星下观测点的海面高度异常值,可以建立潮汐调和分析模型,确定模型参数,通过最小二乘法,计算提取所有星下观测点各主要分潮的潮汐调和常数。并利用已有潮汐验潮点实测数据对模型求解的调和常数进行评价检验,并对其作出分析。

3.2 模型建立

3.2.1 调和分析模型

根据已有的沿轨道星下观测点的海面高度异常值,提取所有星下观测点各主

要分潮的潮汐调和常数，建立潮汐调和分析模型对星下观测点的海面高度异常值进行拟合，本质是曲线拟合问题。

对潮汐进行调和分析时，首先要建立分潮模型，如下式所示：

$$h_j = f_j H_j \cos(\sigma_j t + V_{0j} + u_j - g_j) \quad (3.1)$$

其中， f_j 为交点因子， σ_j 为潮波角频率， V_{0j} 为天文初相角， u_j 为交点订正角， t 为时间， H_j ， g_j 为分潮的调和常数（振幅和迟角）。由三角函数公式知，式（3）可转化为如下形式：

$$h_j = f_j \cos(\sigma_j t + V_{0j} + u_j) H_j \cos g_j + f_j \sin(\sigma_j t + V_{0j} + u_j) H_j \sin g_j \quad (3.2)$$

由调和函数理论可知，任意一个时刻实际水位可以看作是多个调和分潮迭加的结果；在文献[1]的结论下，实际水位由 J 个主要分潮迭加而成。因此任意一点的潮位可以表达为：

$$h = S_0 + \sum_{j=1}^J f_j H_j \cos(\sigma_j t + V_{0j} + u_j - g_j) + n(t) \quad (3.3)$$

结合式（3.2）可得：

$$\begin{aligned} h = S_0 &+ \sum_{j=1}^J f_j \cos(\sigma_j t + V_{0j} + u_j) H_j \cos g_j \\ &+ \sum_{j=1}^J f_j \sin(\sigma_j t + V_{0j} + u_j) H_j \sin g_j \\ &+ n(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中， S_0 为余水位， H_j 和 g_j 为对应分潮的调和常数，三者为待求解参数；

$n(t)$ 为水位随时间 t 的随机变化量，即噪声，主要由非天文潮位（水文、气象状况的变化）引起。

3.2.2 检验评价模型

由于潮汐验潮站（以下简称“验潮站”）与沿轨道的星下观测点（以下简称“观测点”）地理位置不重合，因此需要提取出距离验潮站最近的观测点，用于评价由观测点数据求解出的调和分析模型结果。

本课题所研究的目标海域处于低纬度地区，可采用下式近似表征验潮站与观测点的地表距离：

$$d = C \times \sqrt{(Lon_{sta} - Lon_{sat})^2 + (Lat_{sta} - Lat_{sat})^2} \quad (3.5)$$

式中， d 为验潮站与观测点的地表距离； C 为经纬度到地表距离的转换系数，为一个常数； Lon_{sta} 、 Lat_{sta} 、 Lon_{sat} 、 Lat_{sat} 分别代表验潮站和观测点的经纬度。

根据式（3.5）得到距离各验潮站最近的观测点，取这些观测点的调和常数与对应验潮站的实测数据检验评价本文 3.2.1 小节模型的优劣。而评价指标参考文献[2]，采用各验潮站与观测点的振幅差 ΔH_i 和矢量差 Δ_i 对调和分析模型结果进行检验。

ΔH_i 和 Δ_i 定义如下：

$$\Delta H_i = |H_{sta,i} - H_{sat,i}|$$

$$\Delta_i = [(H_{sta,i} \cos g_{sta,i} - H_{sat,i} \cos g_{sat,i})^2 + (H_{sta,i} \sin g_{sta,i} - H_{sat,i} \sin g_{sat,i})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

评价指标最终定义为 N 个 ΔH_i 和 Δ_i 的均方根：

$$\Delta H_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta H_i^2}$$

$$\Delta_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta_i^2} \quad (3.7)$$

3.3 模型求解

3.3.1 调和模型求解

3.3.1.1 参数预求解

在求解式 (3.4) 所描述的数学模型时，首先应计算式 (3.4) 中的其他相关参数，计算方式如下。

(1) 分潮角速度 σ 的计算

$$\sigma = \mu_1 \dot{\tau} + \mu_2 \dot{s} + \mu_3 \dot{h}' + \mu_4 \dot{p} + \mu_5 \dot{N}' + \mu_6 \dot{p}' \quad (3.8)$$

其中： $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$ 为 Doodson 数，式中其他参数取值如下表所示：

表 1 分潮角速度计算参数表

$\dot{\tau}$	$\dot{s}$	$\dot{h}'$	$\dot{p}$	$\dot{N}'$	$\dot{p}'$
14.49205211	0.54901653	0.04106864	0.00464183	0.00220641	0.00000196

单位：度/平太阳时

由文献 Doodson 数据带入式 (3.8) 计算得到各分潮的分潮角速度 σ_i 如下表所示。

表 2 分潮角速度 σ_i 计算结果

分潮符号	Doodson 数							分潮角速度 σ_i 单位：度/平太阳时
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_0	
S_a	0	0	1	0	0	0	0	0.0410686
S_{sa}	0	0	2	0	0	0	0	0.0821373
M_m	0	1	0	-1	0	0	0	0.5443747
MS_j	0	2	-2	0	0	0	0	1.0158958

M_f	0	2	0	0	0	0	0	1.0980331
Q_1	1	-2	0	1	0	0	-1	13.3986609
O_1	1	-1	0	0	0	0	-1	13.9430356
M_1	1	0	0	0	0	0	1	14.4920521
P_1	1	1	-2	0	0	0	-1	14.9589314
S_1	1	1	-1	0	0	0	2	15.0000000
K_1	1	1	0	0	0	0	1	15.0410686
J_1	1	2	0	-1	0	0	1	15.5854434
OO_1	1	3	0	0	0	0	1	16.1391017
N_2	2	-1	0	1	0	0	0	28.4397295
M_2	2	0	0	0	0	0	0	28.9841042
L_2	2	1	0	-1	0	0	2	29.5284789
S_2	2	2	-2	0	0	0	0	30.0000000
k_2	2	2	0	0	0	0	0	30.0821373
M_4	4	0	0	0	0	0	0	57.9682085
MS_4	4	2	-2	0	0	0	0	58.9841043
M_6	6	0	0	0	0	0	0	86.9523127

(2) 分潮初相位的计算

Y 年 M 月 D 日 t 时刻 (实际计算中是观测数据的起始时间) 的天文初相角:

$$v_0 = \mu_1 \tau + \mu_2 s + \mu_3 h' + \mu_4 p + \mu_5 N' + \mu_6 p' + \mu_0 90 \quad (3.9)$$

其中: $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$ 为 Doodson 数,

$$\begin{cases} s = 277.02 + 129.3848(Y - 1900) + 13.1764(n + i + \frac{t}{24}) \\ h' = 280.19 - 0.2387(Y - 1900) + 0.9857(n + i + \frac{t}{24}) \\ p = 334.39 + 40.6625(Y - 1900) + 0.1114(n + i + \frac{t}{24}) \\ N' = 100.84 + 19.3282(Y - 1900) + 0.0530(n + i + \frac{t}{24}) \\ p' = 281.22 + 0.0172(Y - 1900) + 0.00005(n + i + \frac{t}{24}) \\ \tau = 15t - s + h' \end{cases} \quad (3.10)$$

式中 i 为 1900 年至 Y 年的闰年数, $i = \text{int}(\frac{Y-1901}{4})$; n 为从 Y 年 1 月 1 日开始计算的累积日期序数, 1 月 1 日的日期序数为 0, t 为时间 (单位: 小时)。以上各式中的单位是度。

(3) f_j 和 u_j 的计算

$$\begin{cases} f \cos u = \sum_{m=1}^M \rho_m \cos(\Delta\mu_4^m p + \Delta\mu_5^m N') \\ f \sin u = \sum_{m=1}^M \rho_m \sin(\Delta\mu_4^m p + \Delta\mu_5^m N') \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} f \cos u = & -0.008 \cos(-p - 2N') + 0.094 \cos(-p - N') \\ & + 0.510 \cos p - 0.041 \cos(p - N') + 1.418 \cos p \\ & + 0.284 \cos(p + N') - 0.008 \cos(p + 2N') \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} f \sin u = & -0.008 \sin(-p - 2N') + 0.094 \sin(-p - N') \\ & - 0.510 \sin p - 0.041 \sin(p - N') + 1.418 \sin p \\ & + 0.284 \sin(p + N') - 0.008 \sin(p + 2N') \end{aligned}$$

3.3.1.2 调和模型参数求解

对式 (3.4) 描述的问题一数学模型求解通常采用最小二乘法 (Ordinary least squares method: OLS), 即残差的平方和最小化, 如式 (3.13) 所示:

$$\arg \min_{(S_0, H_j, g_j)} \left(\frac{1}{2} \left\| h - \left(S_0 + \sum_{j=1}^J f_j H_j \cos(v_j + u_j - g_j) \right) \right\|_2^2 \right) = \arg \min_{(S_0, H_j, g_j)} \left(\frac{1}{2} \|n(t)\|_2^2 \right) \quad (3.13)$$

对 J 个主要分潮, 待求解变量个数共 ($n=2J+1$) 项。为便于计算, 在求解过程中, 令 $x_j = H_j \cos g_j$, $y_j = H_j \sin g_j$ 。当观测点数据个数小于待求解变量个数时, 公式 (3.4) 数学模型描述了一个欠定方程组, 因此有无穷多个解, 在这些解中存在一个最小范数解; 当观测点数据个数不小于待求解变量个数时, 可通过式 (3.13) 得到最小二乘解。

最终 H_i 和 g_i 的计算如下:

$$H_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$$

$$g_i = \text{tg}^{-1} \frac{|y_i|}{|x_i|} \quad (3.14)$$

计算 g_i 时，要注意象限的换算：

表 3 g_i 换算表

x_i	y_i	象限	所求的 g_i
+	+	I	$g_i = g_i$
-	+	II	$g_i = 180^\circ - \text{tg}^{-1} \frac{ y_i }{ x_i }$
-	-	III	$g_i = 180^\circ + \text{tg}^{-1} \frac{ y_i }{ x_i }$
+	-	IV	$g_i = 360^\circ - \text{tg}^{-1} \frac{ y_i }{ x_i }$

最小二乘方法的目的是实现对原始数据拟合，该方法在统计学上称作参数回归，为了降低拟合误差，惯常的做法是增加待求解变量个数，使得实际测量点尽量在回归曲线上，即拟合后的偏差变小，但是这样容易导致过拟合，降低模型的预测能力，即对新输入数据预测的方差变大。因此，在方程组待求解变量个数确定的前提下，为提高模型求解的精确性，应适度增加实测数据点数，即在求解时增加求解观测点位置的测量次数以增加约束方程的个数，降低过拟合程度。

因此在本问题数学模型的求解过程中，首先分潮个数 $J = 21$ ，则待求解变量个数 $n = 43$ ，经上述对最小二乘法的分析，为了降低过拟合程度，选择测量次数 n 不少于 2 倍待求解变量个数 m 的观测点进行求解，即 $n \geq 86$ ，经过该条件判断后，有效观测点的个数为 4340，求解结果为各分潮振幅在 4340 个观测点处的平均值，如下表所示：

表 4 主分潮振幅

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
分潮号	K_1	O_1	M_2	S_2	P_1	Sa	Q_1	N_2	K_2
振幅 (m)	0.322	0.266	0.247	0.104	0.102	0.088	0.053	0.050	0.031

表 5 其余分潮振幅

序号	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
分潮号	Ssa	MS_4	L_2	J_1	M_1	M_6	S_1	M_f	OO_1	M_m	M_4	MS_f
振幅 (m)	0.027	0.016	0.015	0.015	0.014	0.013	0.011	0.011	0.010	0.010	0.010	0.009

由表 4 和表 5 可知，调和常数中平均振幅最大的前 4 个分潮依次为： K_1 ，

O1, M2, S2; 接下来的 5 个分潮依次为: P1, Sa, Q1, N2, K2。其余分潮的振幅较小, 对观测点的潮汐高度影响较小。

接下来对 $J=4$ 和 $J=9$ 两种情况分别求解所有观测点的调和常数。为了直观表示本课题计算结果、观潮站和国际数据三者的异同, 在此对本课题所采用的图示以图 1 进行简要描述: 图中各点处颜色值或者图例标识尺寸的大小代表了该点处取值的大小; 需要注意的是迟角图中数值 0 度和 360 度附近图示颜色出现突变。

(1) $J=4$:

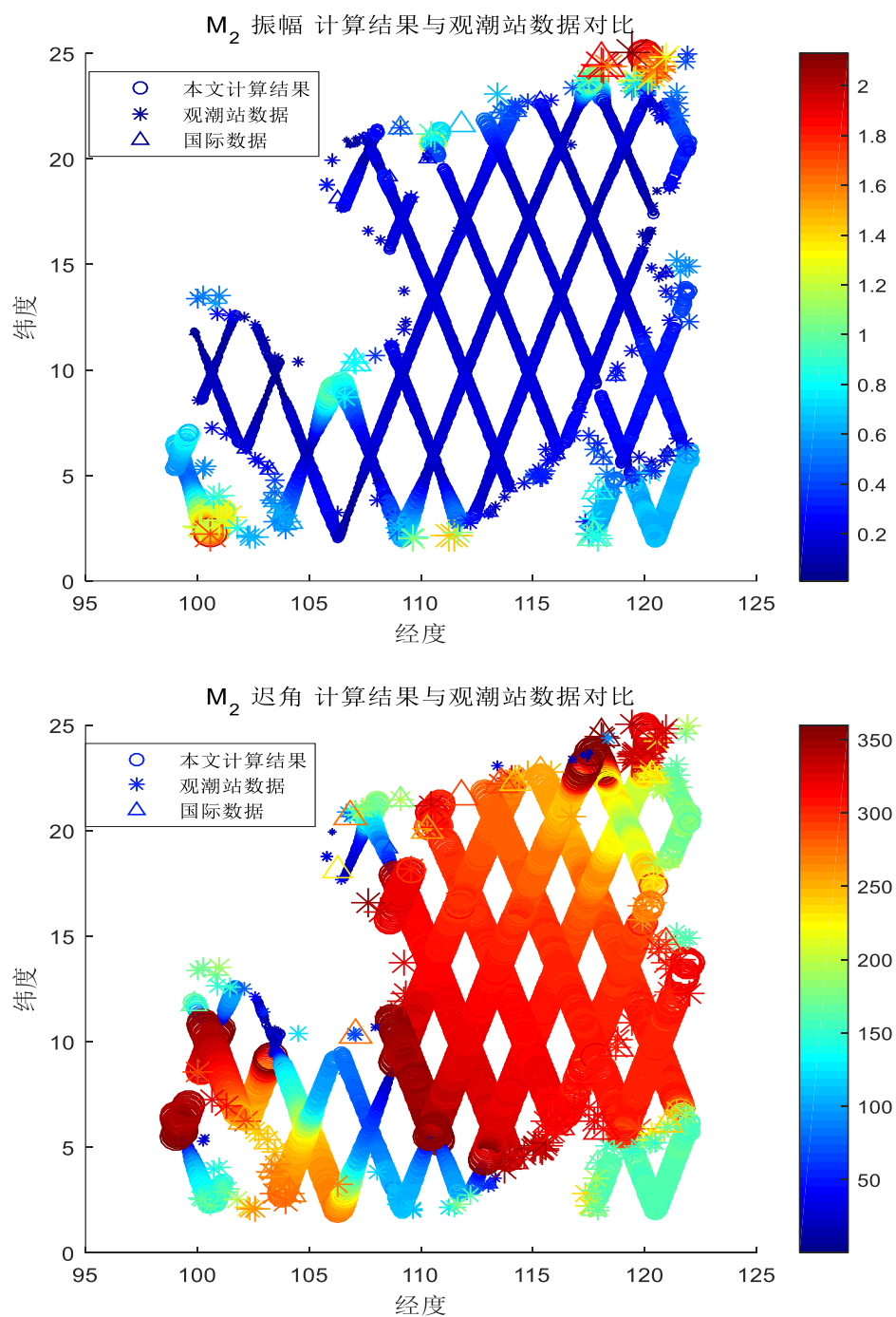


图 1 M_2 分潮振幅和迟角计算结果

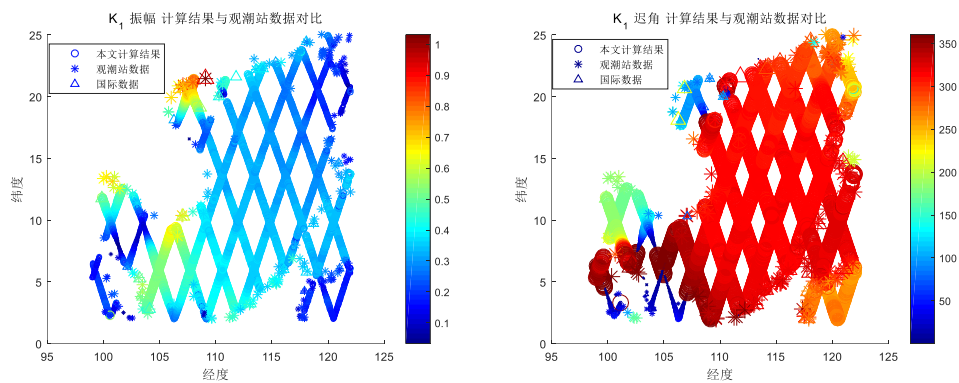


图 2 K_1 分潮振幅和迟角计算结果

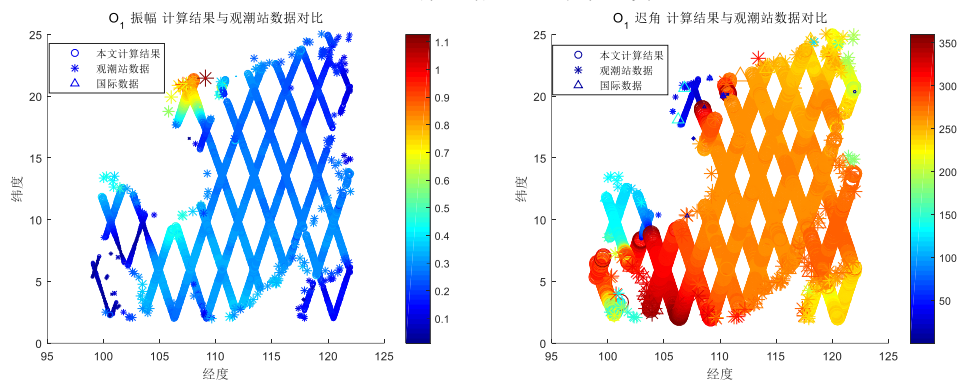


图 3 O_1 分潮振幅和迟角计算结果

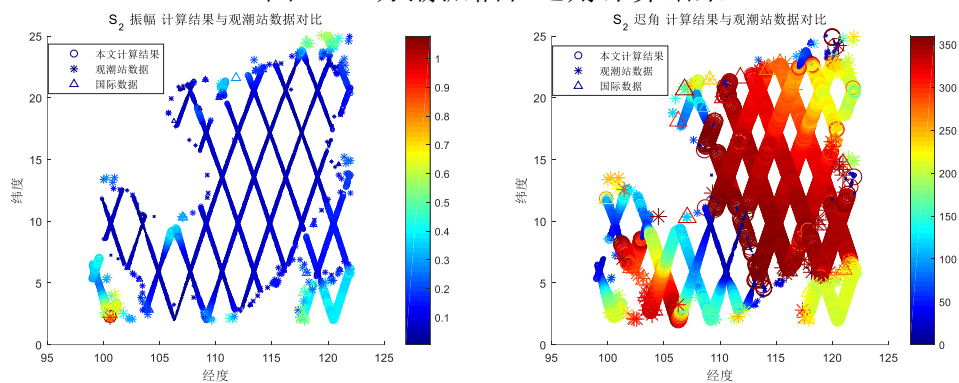


图 4 S_2 分潮振幅和迟角计算结果

(2) $J=9$:

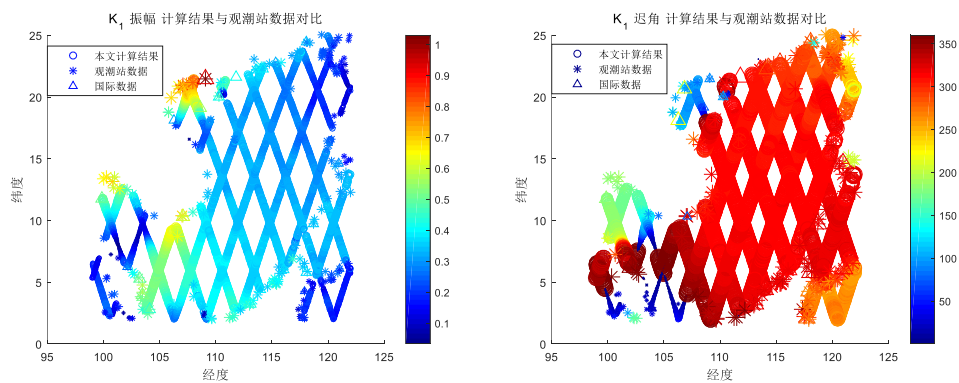


图 5 K_1 分潮振幅和迟角计算结果

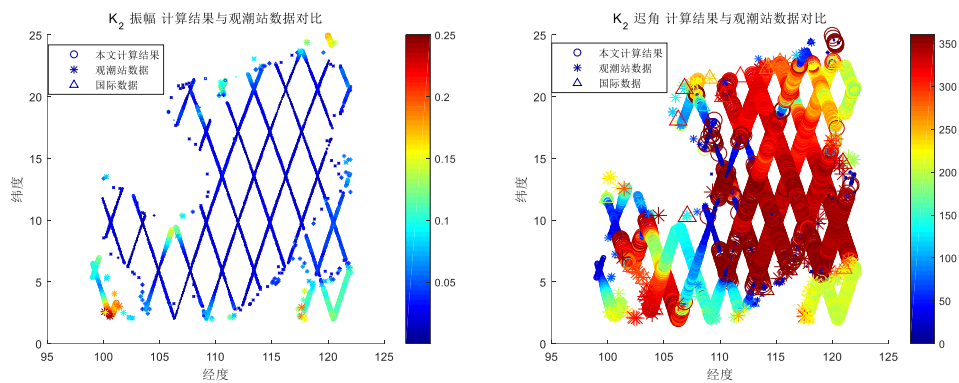


图 6 K_2 分潮振幅和迟角计算结果

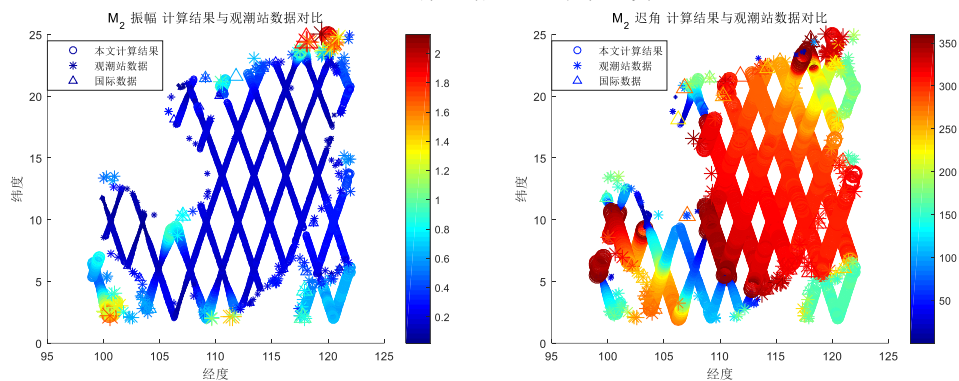


图 7 M_2 分潮振幅和迟角计算结果

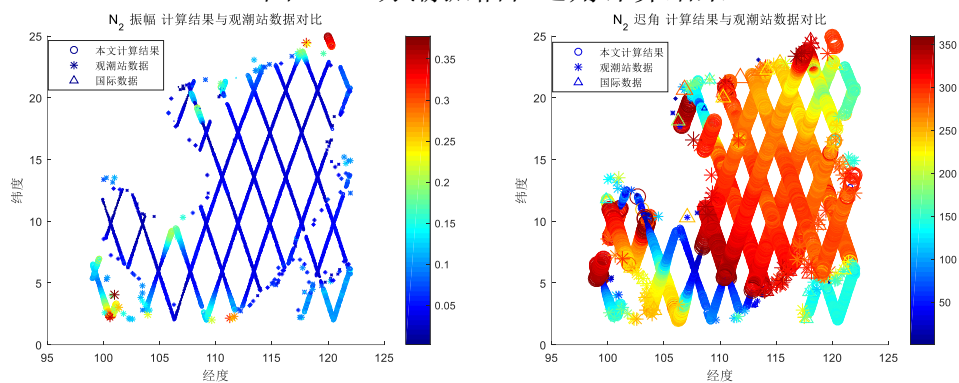


图 8 N_2 分潮振幅和迟角计算结果

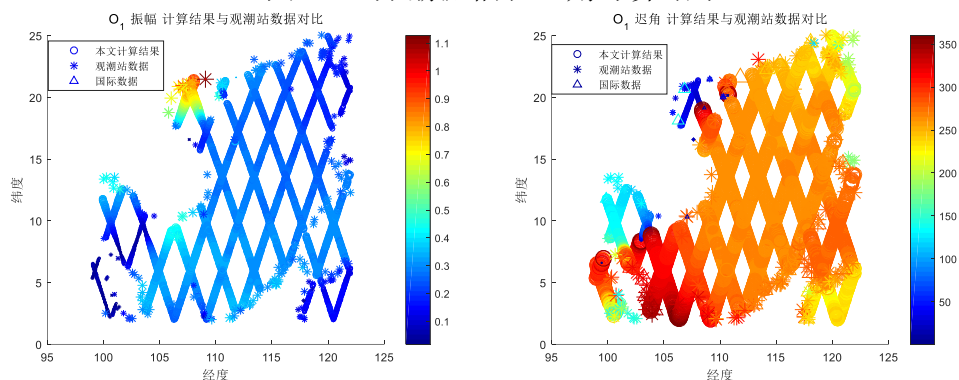


图 9 O_1 分潮振幅和迟角计算结果

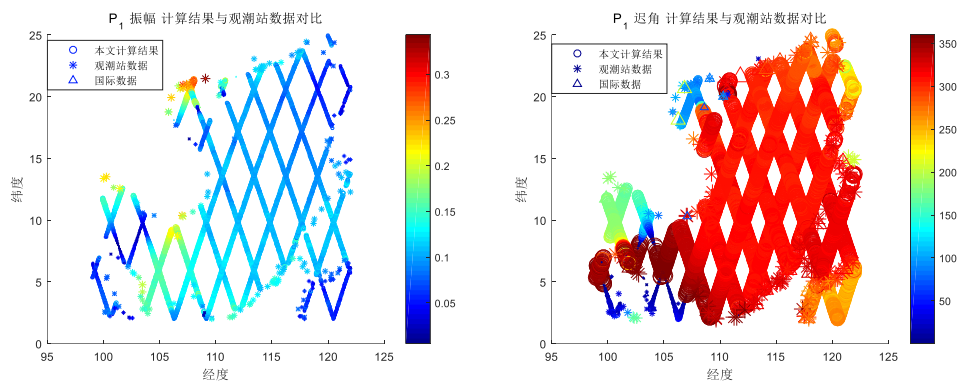


图 10 P_1 分潮振幅和迟角计算结果

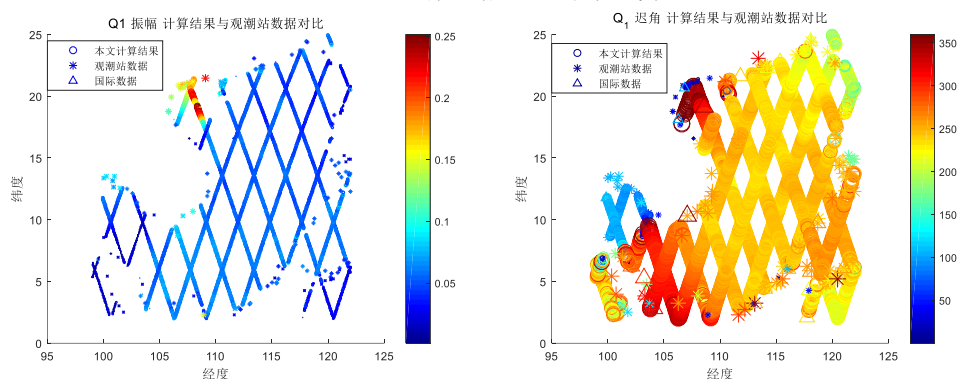


图 11 Q_1 分潮振幅和迟角计算结果

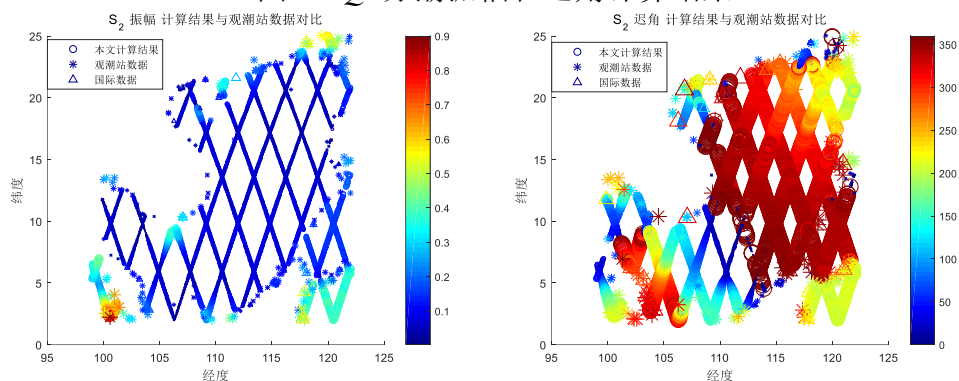


图 12 S_2 分潮振幅和迟角计算结果

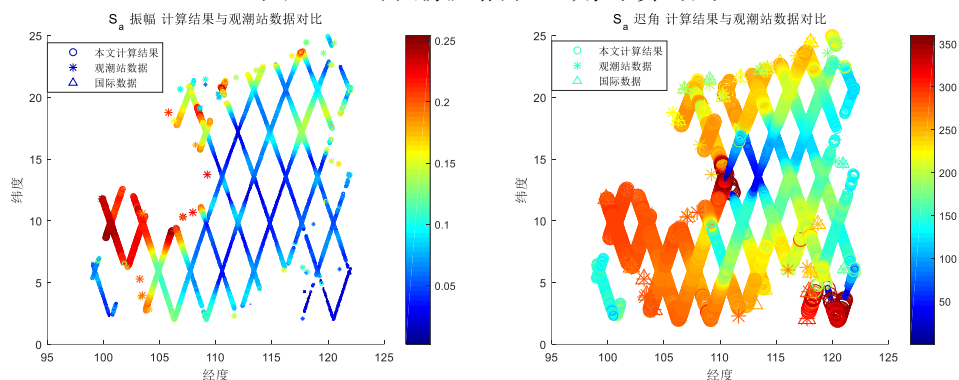


图 13 S_a 分潮振幅和迟角计算结果

通过 4 分潮模型和 9 分潮模型的计算结果，与观潮站和国际数据比对可知，本课题采用的模型计算准确，能够与观潮站的实测数据吻合。为进一步定量评价本课题采用的模型和模型求解方法的优劣，接下来进行了评价模型求解。

3.3.2 评价模型求解

以对 9 个分潮 (M_2 、 K_1 、 O_1 、 P_1 、 K_2 、 Q_1 、 N_2 、 S_a 、 S_2) 进行调和分析, 得到 M_2 的潮汐调和常数为例:

首先分别计算出与第 i 个($i=1,2,3,...N$)观潮站距离最近的观测点和该观潮站之间的距离 $d_{\min_i}$, ΔH_i 和 Δ_i , 为了直观比较, 将它们绘制在一张图上, 如下图所示:

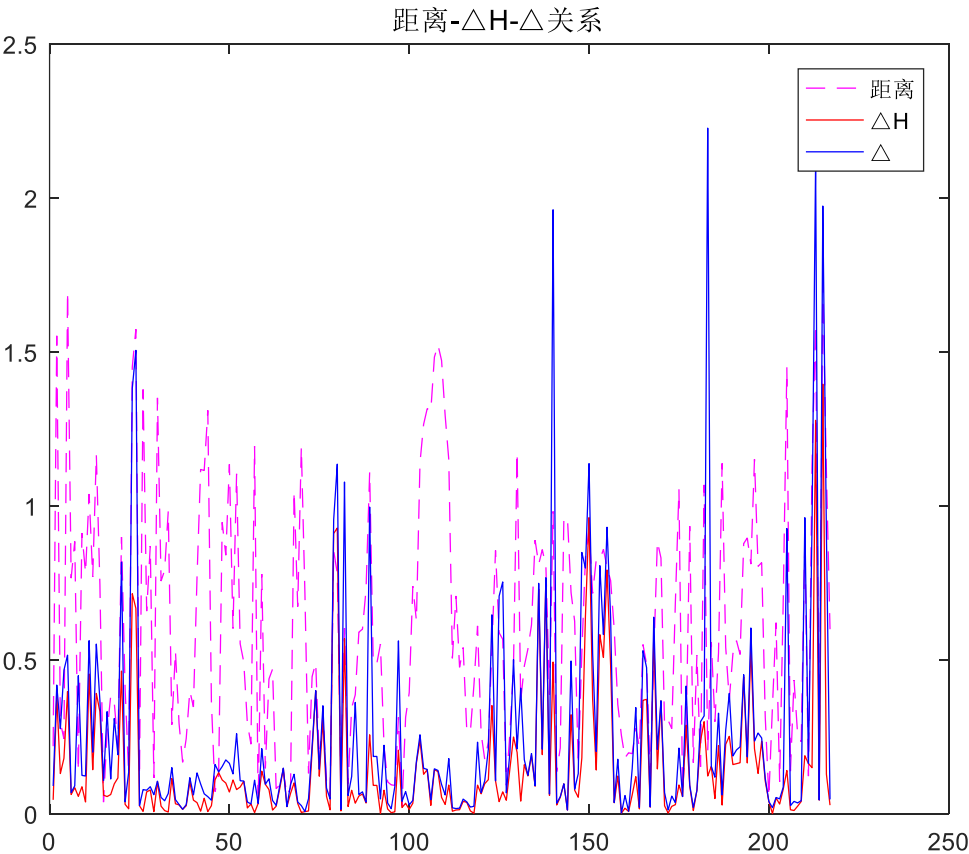


图 14 距离- ΔH - Δ 关系图

从上图可以得: 在 ΔH 和 Δ 较大的地方 (大于 1 米), 即利用卫星高度计提取的潮汐调和常数与观潮站数据存在差异较大的地方, 其 $d_{\min}$ 也较大, 也就是说这种差异是由观测点和观潮站距离比较远所引起的。

分别对 4 个分潮 (M_2 、 S_2 、 K_1 、 O_1)、9 个分潮 (M_2 、 K_1 、 O_1 、 P_1 、 K_2 、 Q_1 、 N_2 、 S_a 、 S_2) 和 21 个分潮 (M_2 、 K_1 、 O_1 、 P_1 、 K_2 、 M_m 、 M_f 、 J_1 、 OO_1 、 L_2 、 MS_f 、 M_4 、 MS_4 、 M_6 、 Q_1 、 N_2 、 S_a 、 S_2 、 S_{sa} 、 S_1 、 M_1) 进行调和分析, 并计算评价指标如下表所示:

表 6 4 个分潮模型评价指标计算结果

4 个分潮模型评价指标										
观潮站位置		$d_{\min}$	M_2		S_2		K_1		O_1	
经度	纬度		ΔH	Δ	ΔH	Δ	ΔH	Δ	ΔH	Δ
100	8.533	0.186	0.060	0.064	0.024	0.025	0.049	0.056	0.015	0.106

100	13.35	1.503	0.376	0.376	0.136	0.145	0.098	0.165	0.04	0.041
100.1	2.617	0.297	0.15	0.304	0.162	0.247	0.044	0.068	0.197	0.203
100.2	2.5	0.243	0.174	0.508	0.067	0.268	0.034	0.053	0.074	0.118
100.3	13.53	1.683	0.256	0.630	0.237	0.318	0.176	0.197	0.018	0.027
⋮	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
121.9	24.58	1.587	1.263	2.102	0.341	0.706	0.061	0.157	0.028	0.123
121.9	6.55	0.178	0.050	0.051	0.031	0.034	0.024	0.029	0.002	0.013
121.9	24.93	1.724	1.347	1.924	0.345	0.631	0.046	0.051	0.038	0.104
122	14.9	1.063	0.136	0.887	0.047	0.445	0.124	0.422	0.197	0.32
122	12.27	0.599	0.0500	0.074	0.003	0.053	0.032	0.034	0.036	0.037
RMS			0.272	0.467	0.103	0.193	0.096	0.159	0.078	0.118

表 7 9 个分潮模型评价指标结果

9 个分潮模型评价指标										
观潮站位置		d_min	M_2		S_2		K_1		O_1	
经度	纬度		$\triangle H$	$\triangle$	$\triangle H$	$\triangle$	$\triangle H$	$\triangle$	$\triangle H$	$\triangle$
100	8.533	0.186	0.045	0.09	0.008	0.062	0.012	0.061	0.044	0.057
100	13.35	1.503	0.38	0.418	0.181	0.192	0.166	0.168	0.09	0.09
100.1	2.617	0.297	0.13	0.276	0.144	0.227	0.078	0.101	0.231	0.241
100.2	2.5	0.243	0.18	0.466	0.081	0.252	0.09	0.095	0.124	0.136
100.3	13.53	1.683	0.397	0.515	0.214	0.28	0.172	0.21	0.018	0.024
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
121.9	24.58	1.587	1.277	2.114	0.339	0.705	0.064	0.161	0.009	0.089
121.9	6.55	0.178	0.044	0.044	0.035	0.035	0.016	0.018	0.008	0.009
121.9	24.93	1.724	1.395	1.973	0.332	0.617	0.068	0.073	0.036	0.088
122	14.9	1.063	0.128	0.911	0.057	0.435	0.176	0.445	0.194	0.334
122	12.27	0.599	0.028	0.046	0.019	0.029	0.004	0.029	0.012	0.02
RMS			0.268	0.458	0.109	0.207	0.073	0.139	0.064	0.109

表 8 续表 7 9 个分潮模型评价指标结果

表 9 21 分潮模型评价指标

21 个分潮模型评价指标										
观潮站位置		d_min	M_2		S_2		K_1		O_1	
经度	纬度		$\triangle H$	$\triangle$	$\triangle H$	$\triangle$	$\triangle H$	$\triangle$	$\triangle H$	$\triangle$
100	8.533	0.186	0.039	0.086	0.007	0.062	0.039	0.079	0.046	0.06
100	13.35	1.503	0.391	0.398	0.193	0.216	0.141	0.143	0.091	0.091
100.1	2.617	0.297	0.134	0.282	0.142	0.232	0.061	0.085	0.227	0.243
100.2	2.5	0.243	0.194	0.477	0.082	0.256	0.08	0.088	0.127	0.149

100.3	13.53	1.683	0.406	0.518	0.213	0.281	0.188	0.222	0.015	0.02
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
121.9	24.58	1.587	1.283	2.12	0.342	0.709	0.057	0.162	0.008	0.091
121.9	6.55	0.178	0.043	0.043	0.035	0.036	0.015	0.021	0.008	0.008
121.9	24.93	1.724	1.398	1.976	0.335	0.62	0.075	0.076	0.037	0.086
122	14.9	1.063	0.12	0.921	0.06	0.432	0.182	0.449	0.185	0.325
122	12.27	0.599	0.04	0.054	0.019	0.032	0.015	0.042	0.012	0.018
RMS			0.079	0.152	0.109	0.21	0.079	0.152	0.069	0.12

表 10 续表 9 21 分潮模型评价指标

21 个分潮模型评价指标										
	P_1		K_2		Q_1		N_2		S_a	
	ΔH	Δ	ΔH	Δ	ΔH	Δ	ΔH	Δ	ΔH	Δ
RMS	0.031	0.051	0.028	0.05	0.018	0.039	0.043	0.074	0.028	0.042

表 11 不同分潮数 RMS 评价指标结果汇总表

4 个分潮计算			9 个分潮计算			21 个分潮计算		
	ΔH	Δ		ΔH	Δ		ΔH	Δ
K_1	0.096148	0.159226	K_1	0.073438	0.138524	K_1	0.079039	0.152136
M_2	0.271884	0.466622	M_2	0.267525	0.458168	M_2	0.298211	0.511324
O_1	0.077826	0.117730	O_1	0.064297	0.108766	O_1	0.069364	0.119691
S_2	0.103174	0.193357	S_2	0.109363	0.207101	S_2	0.108695	0.209669
-	-	-	K_2	0.030062	0.054424	K_2	0.028048	0.050322
-	-	-	N_2	0.039552	0.073619	N_2	0.042559	0.074031
-	-	-	P_1	0.032743	0.056188	P_1	0.030669	0.051464
-	-	-	Q_1	0.018069	0.036866	Q_1	0.017688	0.038583
-	-	-	S_a	0.030536	0.043423	S_a	0.027922	0.041741

结合图表可以得出以下结论：

(1) 在 ΔH 和 Δ 较大的地方（大于 1 米），即利用卫星高度计提取的潮汐调和常数与观潮站数据存在差异较大的地方，其 $d_{\min}$ 也较大，也就是说这种差异是由于即便是最近的星下观测点，距观潮站也比较远所引起的。

(2) 利用该评价模型得出的调和分析结果与观潮站的结果偏差很小，证明调和分析结果具有很高的可靠性。

(3) 4 个分潮、9 个分潮、21 个分潮调和分析出来的分潮之间的振幅和矢量差的均方根都比较小（除 M_2 外均在 0.2m 以内，大多数在 0.1m 以内），结果表明，调和分析时增加分潮的个数对一些分潮的结果会有影响，但对主分潮的影响不大。

3.4 小结

本节建立了调和分析和检验评价两种模型。调和分析模型首先计算分潮角速度、分潮初相位等相关参数，通过普通最小二乘法进行求解。求解过程中增加待求解变量个数，使得实际测量点尽量在回归曲线上，但这样容易导致过拟合，降

低模型的预测能力，即对新输入数据预测的方差变大。因此在方程组待求解变量个数确定的前提下，为提高模型求解的精确性，适度增加实测数据点数，即增加求解观测点位置的测量次数以增加约束方程的个数，降低过拟合程度，成功提取所有观测点各主要分潮的调和常数并以绘图形式直观进行表达。通过 4 分潮模型和 9 分潮模型的计算结果，与观潮站数据的比对可知，本课题采用的模型计算准确，能够与观潮站的实测数据吻合。

检验评价模型采用各验潮站与观测点的振幅差 ΔH_i 和矢量差异 Δ_i 对调和分析模型结果进行检验，分别对 4 个分潮、9 个分潮和 21 个分潮进行调和分析，并计算评价指标均方根，将计算所得数据以列表形式给出。利用该评价模型得出的调和分析结果与观潮站的结果偏差很小，证明调和分析结果具有很高的可靠性；观察 4 个分潮、9 个分潮、21 个分潮调和分析出来的分潮之间的振幅和矢量差的均方根，可知均方差数值较小（除 M_2 外均在 0.2m 以内，大多数在 0.1m 以内），此结果表明，调和分析时增加分潮的个数对一些分潮的结果会有影响，但对主分潮的影响不大。

四、问题二的模型建立与求解

4.1 问题分析

通过问题一模型求解得到所有星下观测点各主潮的潮汐调和常数，沿轨道作出对应潮汐调和常数的图像之后，会发现潮汐调和常数在沿轨道方向的空间上存在细结构。分析细结构的来源发现，正压潮潮汐调和常数具有低频高幅值的特征，而内潮调制具有高频低幅值的特征。由于内潮调制引起的海表面振幅与内潮振幅的比值为 10^{-3} ，即使在一些大的海脊附近，内潮对海表面的调制也仅仅为 3~5cm，而在其他一些内潮不活跃的区域，其对海表面的调制一般在 1cm 以内^[2]，内潮对正压潮的调制，也就是将内潮叠加在正压潮上，会导致潮汐调和常数在空间上存在一定的细结构。想要从潮汐调和常数中分离正压潮与内潮，一种可行的办法是利用多项式来拟合分潮调和常数，拟合结果即代表正压潮，各分潮调和常数减去正压潮部分的贡献即可得到内潮，从而实现分离正压潮与内潮。

4.2 模型建立

通常可以采取两种不同的多项式拟合方法来提取正压潮的海表面信息：一种是对振幅 H 、迟角 g 分别进行沿轨多项式拟合；第二种是对 $H \cos g$ 、 $H \sin g$ 分别进行沿轨多项式拟合。

首先讨论直接对振幅 H 和迟角 g 进行多项式拟合可能带来的问题。举几个最简单的情况：对两个角度求平均值的计算。

$[15^\circ, 35^\circ] = 25^\circ$ ，结果正确；

$[30^\circ, 90^\circ] = 60^\circ$ ，结果正确；

$[160^\circ, 200^\circ] = 180^\circ$ ，结果正确；

$[0^\circ, 360^\circ] = 180^\circ$ ，结果错误，因为 360° 和 0° 重合，结果应为 0° 或 360° ；

$[20^\circ, 300^\circ] = 160^\circ$ ，结果错误，正确结果应为 340° 。

由上述几组数据可以看出，角度求均值不是简单的算术均值，为了不失一般性，建立数学模型如下：

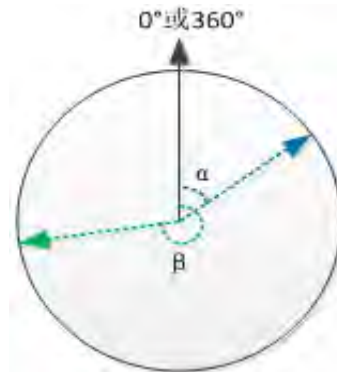


图 15 角度求均值示意图

如图所示：有 α 、 β 两个角，当 $|\alpha - \beta| > 180$ ，不能用 $(\alpha + \beta) / 2$ 来表示角度的正确均值，其均值应为 $\text{mod}[(\alpha + \beta) / 2 + 180, 360]$ ，即：

$$\begin{cases} \text{mean}_{\alpha, \beta} = (\alpha + \beta) / 2 & |\alpha - \beta| < 180^\circ \\ \text{mean}_{\alpha, \beta} = \text{mod}[(\alpha + \beta) / 2 + 180^\circ, 360^\circ] & |\alpha - \beta| > 180^\circ \end{cases} \quad (4.1)$$

同理，直接对迟角 g 进行多项式拟合也会面临在角度 $|\alpha - \beta| > 180$ 的情况下带来

的问题。为了避免这类问题的出现，本问题中选用 $H \cos g$ 、 $H \sin g$ 进行多项式拟合来进行研究。

通过第一问调和分析，得到上下行轨道上的任一观测点 $p(x, y)$ （ x 和 y 分别为点 p 的经纬度）的振幅 H 和迟角 g ，分别对 $H \cos g$ 、 $H \sin g$ 沿轨道方向进行 n 次多项式拟合（ $n=1,2,3,\dots$ ），通过坐标变换得到内潮的表面振幅和迟角。

设拟合多项式为：

$$\hat{f}(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n \quad (4.2)$$

构造代价函数：

$$J(a_n) = \sum_{k=1}^N [(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \dots + a_n y_k^n) - H_k \cos g_k]^2, k = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.3)$$

式中， y 代表轨道任一观测点的纬度。对上式分别求 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 的偏导，并使其为 0，

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N [(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \dots + a_n y_k^n) - H_k \cos g_k] = 0 \\ \sum_{k=1}^N y_k [(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \dots + a_n y_k^n) - H_k \cos g_k] = 0 \\ \sum_{k=1}^N y_k^2 [(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \dots + a_n y_k^n) - H_k \cos g_k] = 0 \\ \dots \\ \sum_{k=1}^N y_k^n [(a_0 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \dots + a_n y_k^n) - H_k \cos g_k] = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

为便于描述，引入记号：

$$M_{i,j} = \sum_{k=1}^N y_k^{i+j-2}, b_i = \sum_{k=1}^N y_k^{i-1} H_k \cos g_k \quad (4.5)$$

其中， $i, j = 1, 2, \dots, n+1$ 。

上式可表示为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,n+1} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{n+1,1} & M_{n+1,2} & \dots & M_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

通过求解上述线性方程组可得系数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 的值，代入拟合多项式得到正压潮值 $\hat{f}(y_k)$ ，记 $H_k \cos g_k$ 与其拟合值 $\hat{f}(y_k)$ 之差为 $\tilde{f}(y_k)$ ：

$$\tilde{f}(y_k)=H_k \cos g_k - \hat{f}(y_k) \quad (4.7)$$

$\tilde{f}(y_k)$ 为内潮贡献。同理对 $H \sin g$ 进行多项式拟合可得

$$\tilde{g}(y_k)=H_k \sin g_k - \hat{g}(y_k) \quad (4.8)$$

通过坐标转换可求得内潮海表面振幅 $\tilde{H}_k$ 、迟角 $\tilde{g}_k$ 和正压潮海表面振幅 $\hat{H}_k$ 、迟角 $\hat{g}_k$ 。

4.3 模型求解

根据问题一的计算结果可知，对 9 个分潮 (M_2 、 K_1 、 O_1 、 P_1 、 K_2 、 Q_1 、 N_2 、 S_a 、 S_2) 进行调和分析得出的潮汐调和常数结果较为理想。下面以对 9 个分潮调和分析得出的 M_2 调和常数拟合计算为例，给出模型求解的计算流程。

计算流程：

Step1：依照星下观测点的经纬度来确定轨道，选择出的 25 个轨道数据段；

Step2：资料中给出的同轨道的星下观测点的顺序在经纬度上不连续，因此需要对其按照经纬度进行排序；

Step3：依据式 (4.6) 对 $H \cdot \cos g$ 、 $H \cdot \sin g$ 进行 11 次多项式拟合；

Step4：依据式 (3.14)，解出的 $\hat{H}_k$ 、 $\hat{g}_k$ 、 $\tilde{H}_k$ 、 $\tilde{g}_k$ ；

Step5：对 25 条轨道进行 step1~Step4 的处理，最终得出分潮调和常数正压潮和内潮的分离结果，并绘图。

结果数据绘图表征方法说明：

○标识符的半径和颜色用于表征观测点取值大小。

为了将沿轨道各分潮的潮汐调和常数进行正压潮和内潮的分离，首先需要依照星下观测点的经纬度来确定轨道，选择出的 25 个轨道数据段如下图所示：

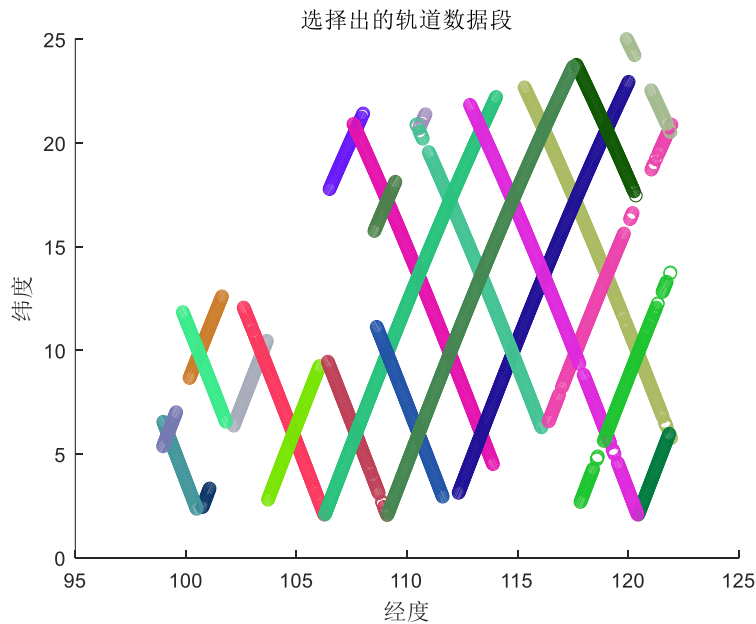


图 16 选择的轨道数据段

Step1: 以其中一条轨道为例: 在实际计算中发现, 资料中给出的同轨道的星下观测点的顺序在经纬度上不连续, 因此需要对其按照经纬度进行排序, 这里按照纬度值从小到大的顺序进行重排, 如下图所示:

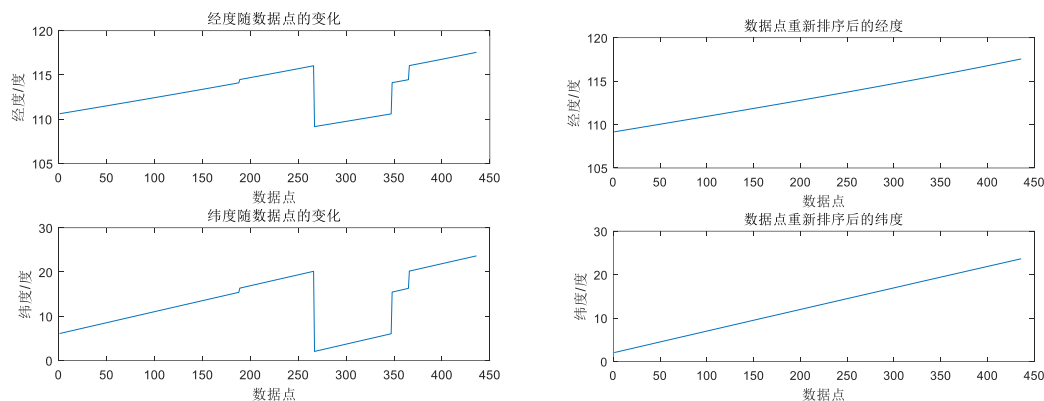


图 17 数据点重排图

Step2: 将数据排序后, 振幅 H 、迟角 g 、 $H \cdot \cos g$ 、 $H \cdot \sin g$ 随纬度变化如下图所示:

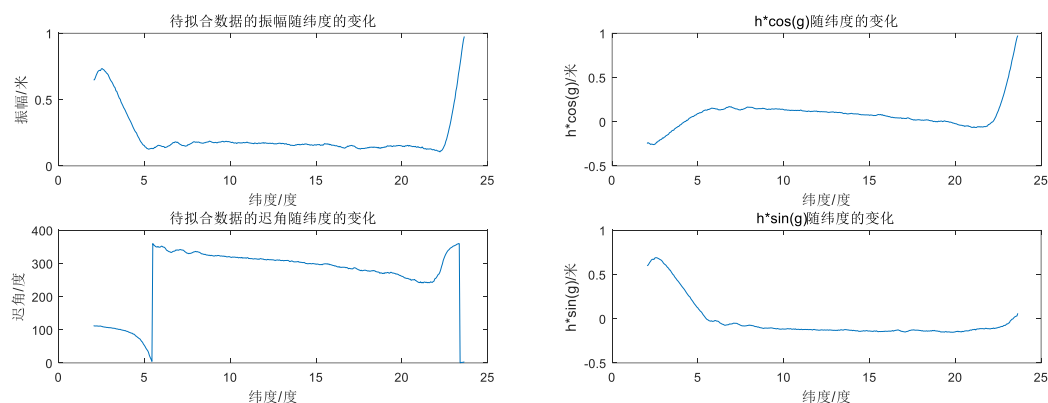


图 18 调和常数随纬度变化图

Step3: 参考文献[2]的结果, 依据式 (4.6) 对 $H \cdot \cos g$ 、 $H \cdot \sin g$ 进行 11 次多项式拟合, 得到的拟合结果如下图所示:

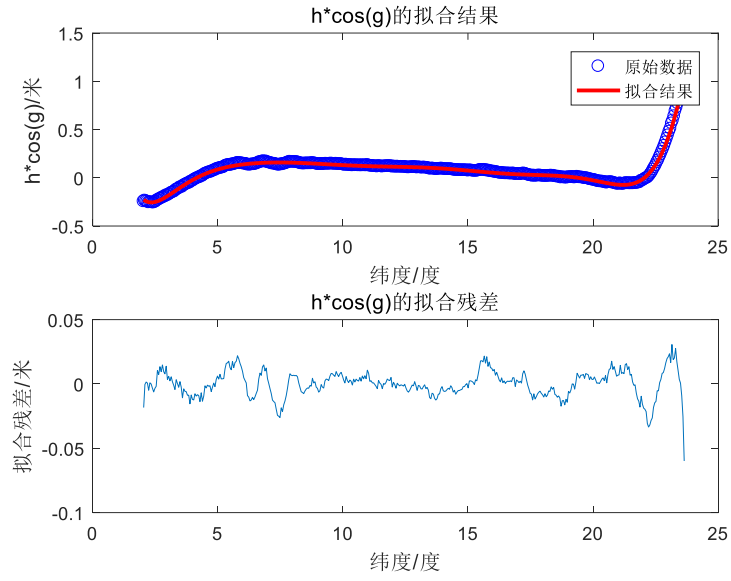


图 19 $H \cdot \cos g$ 拟合结果

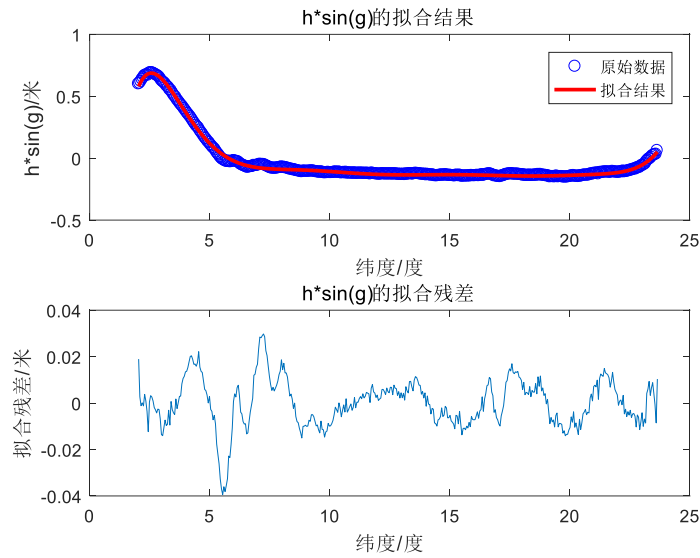


图 20 $H \cdot \sin g$ 拟合结果

Step4: 依据式 (3.14), 解出的 $\hat{H}_k$ 、 $\hat{g}_k$ 、 $\tilde{H}_k$ 、 $\tilde{g}_k$ 如下图所示:

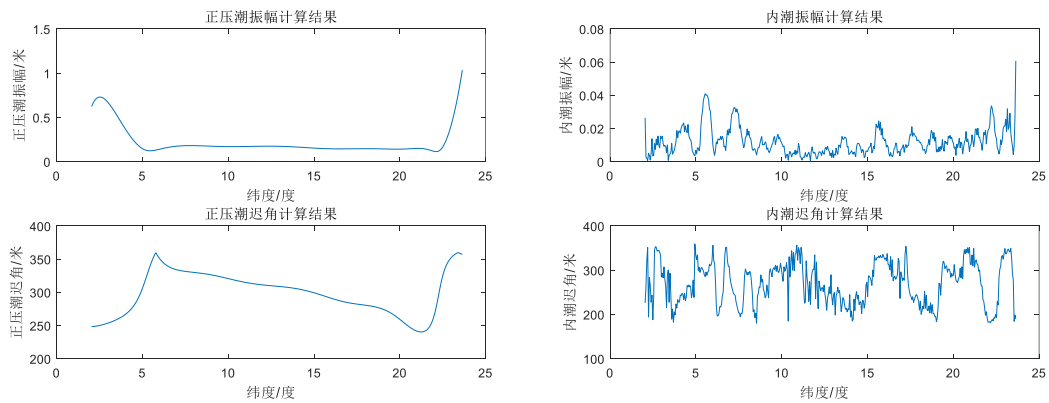


图 21 单一轨道分潮 M2 分离结果

将上图计算结果在经度-纬度坐标系中绘图如下：

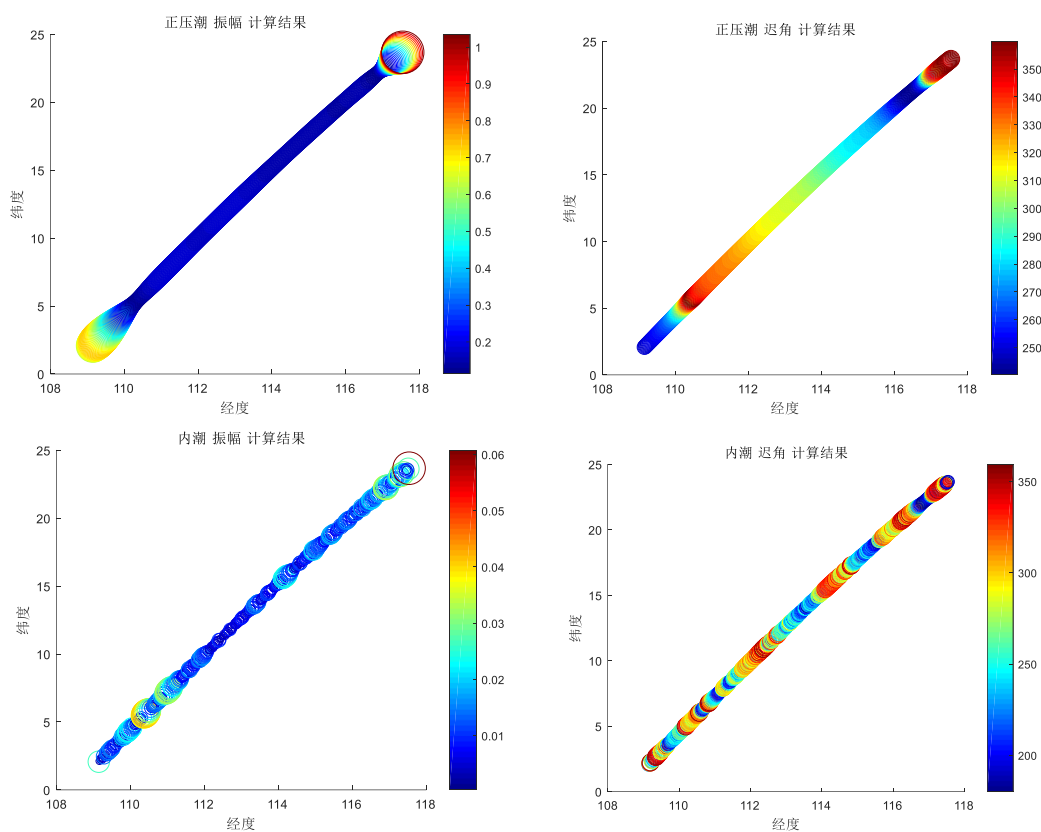


图 22 单一轨道分潮 M_2 正压潮及内潮计算结果

Step5: 然后对 25 条轨道进行同样的操作，最终得出 M_2 分潮调和常数正压潮和内潮的分离结果，如下图所示：

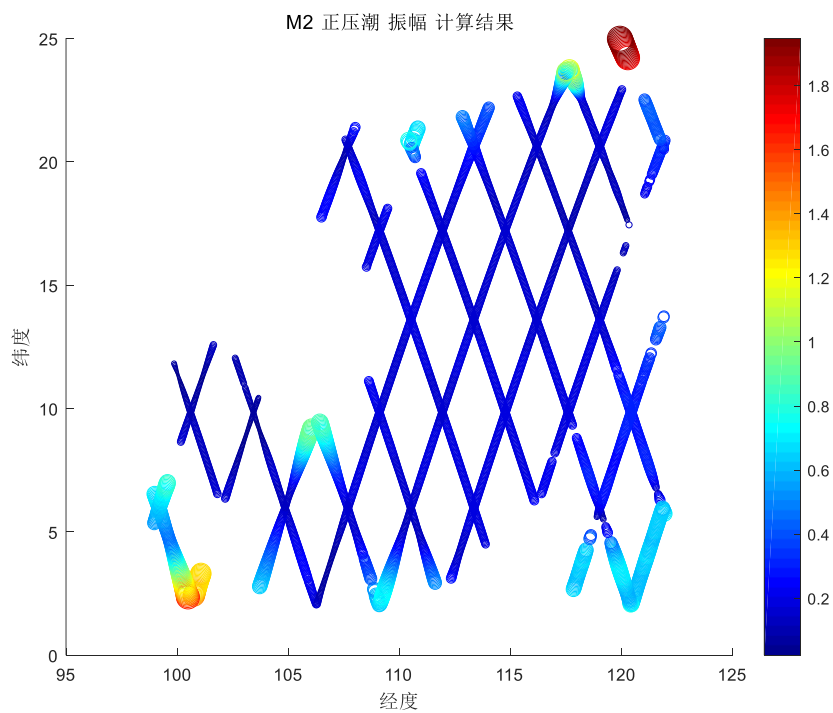


图 23 分潮 M_2 正压潮振幅计算结果

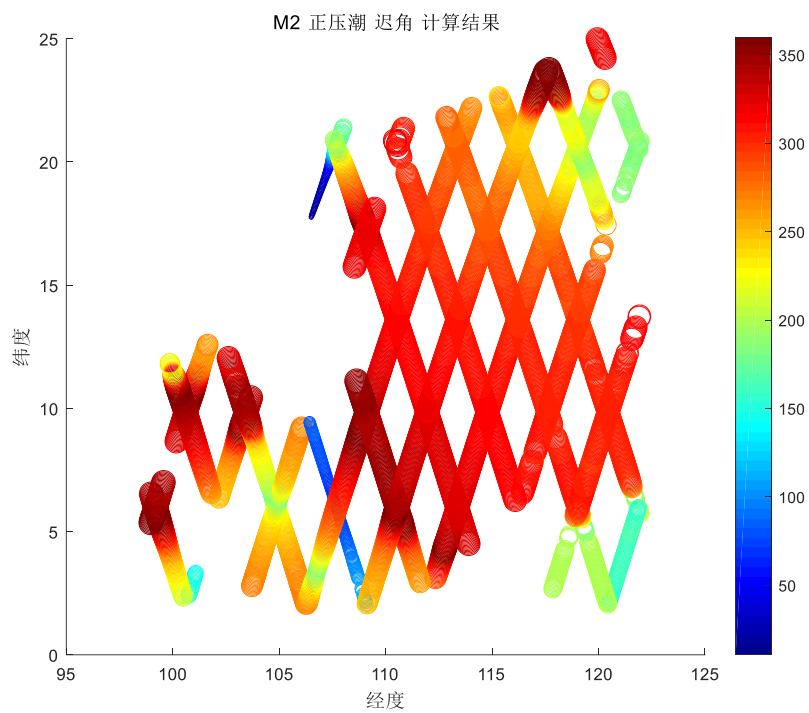


图 24 分潮 M2 正压潮迟角计算结果

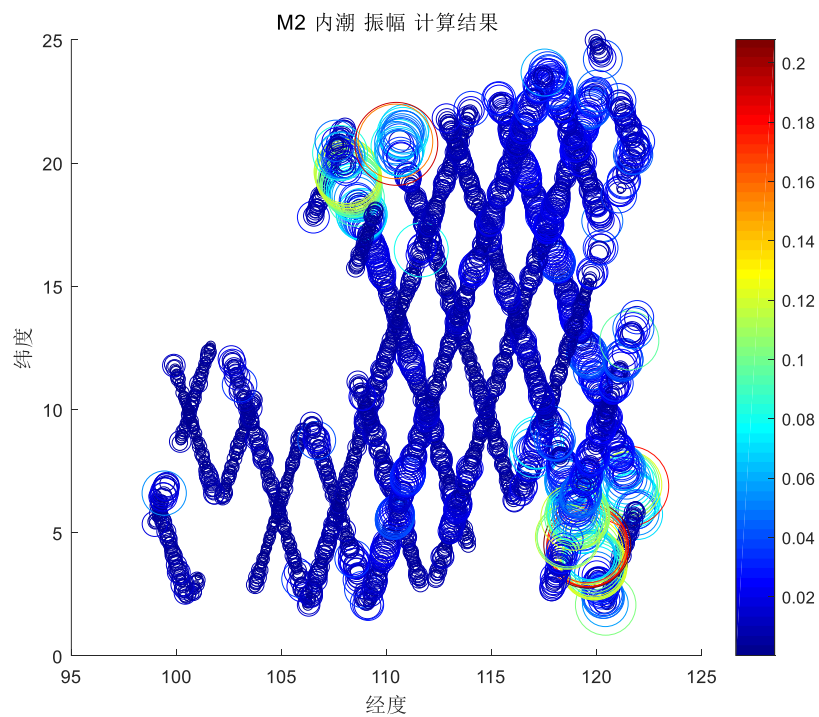


图 25 分潮 M2 内潮振幅计算结果

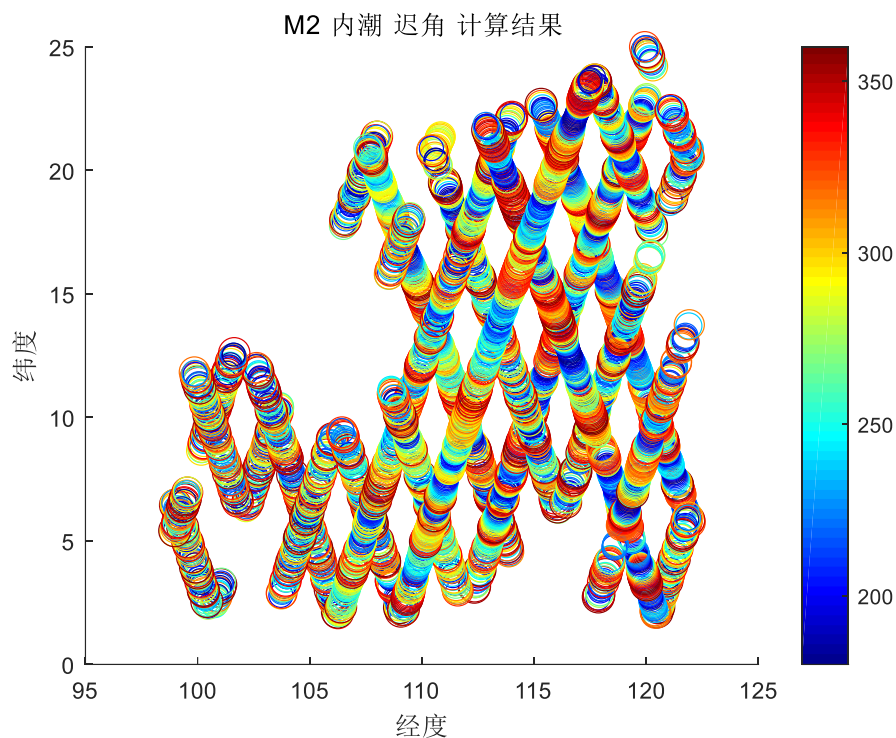


图 26 分潮 M2 内潮迟角计算结果
对其他分潮的潮汐调和常数分离过程与之相同，得到的结果如下图所示：

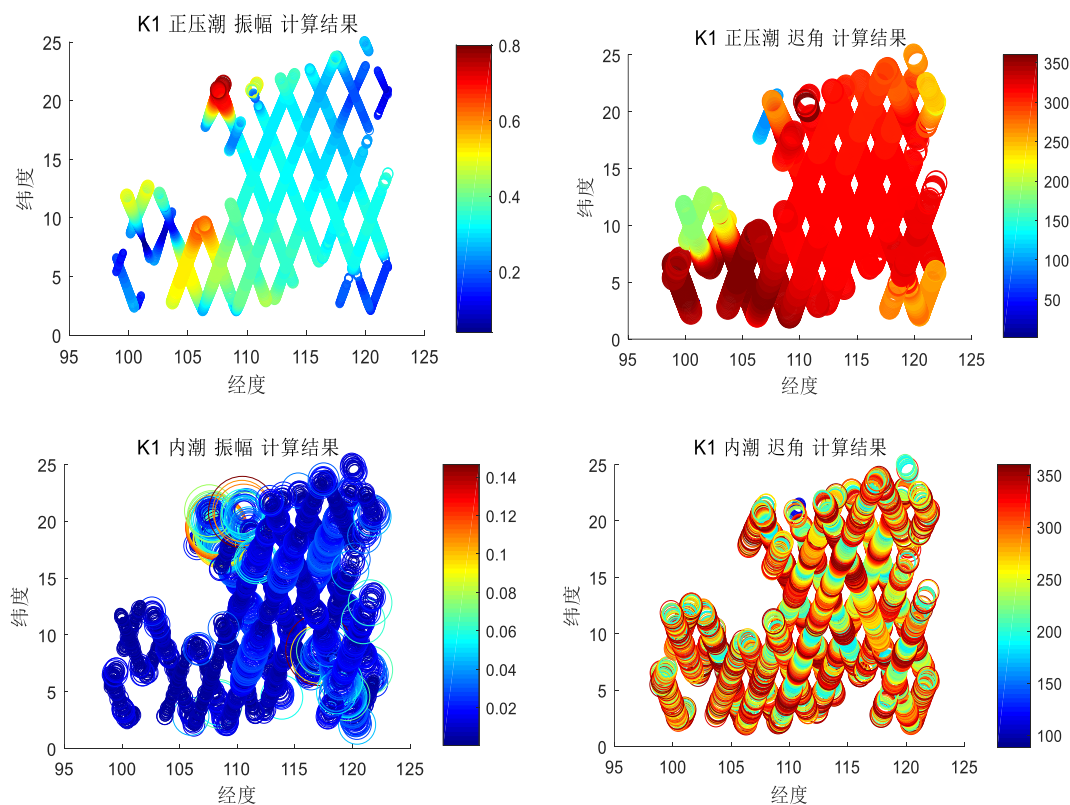


图 27 分潮 K1 分离结果

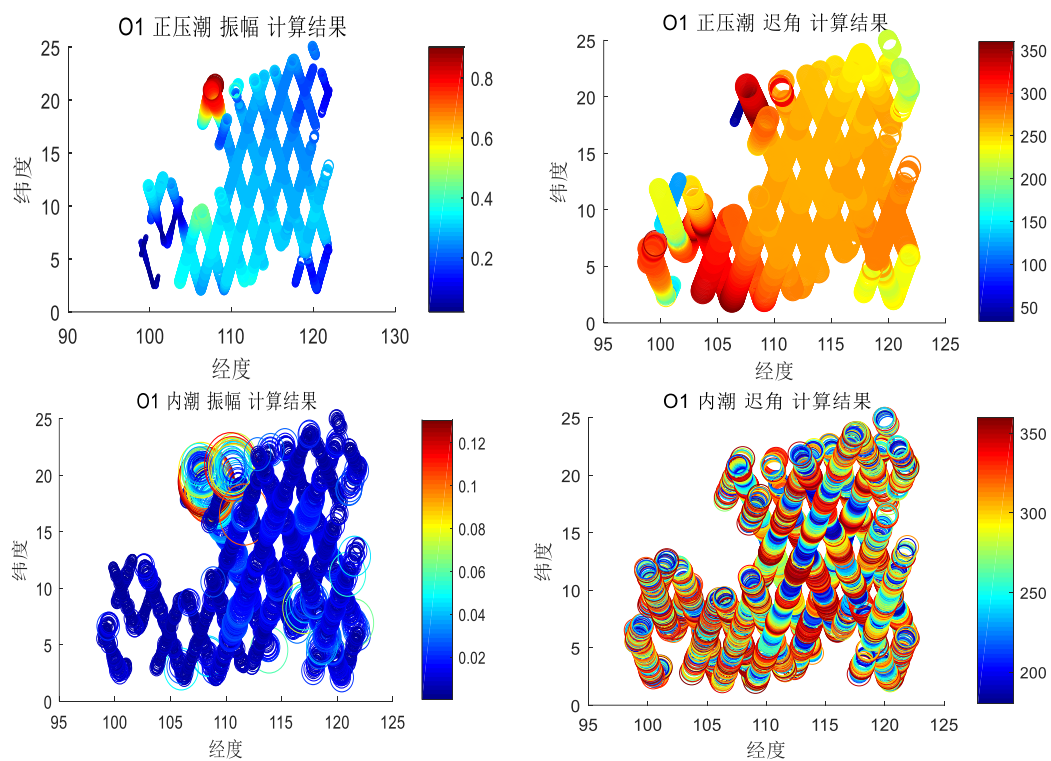


图 28 分潮 O1 分离结果

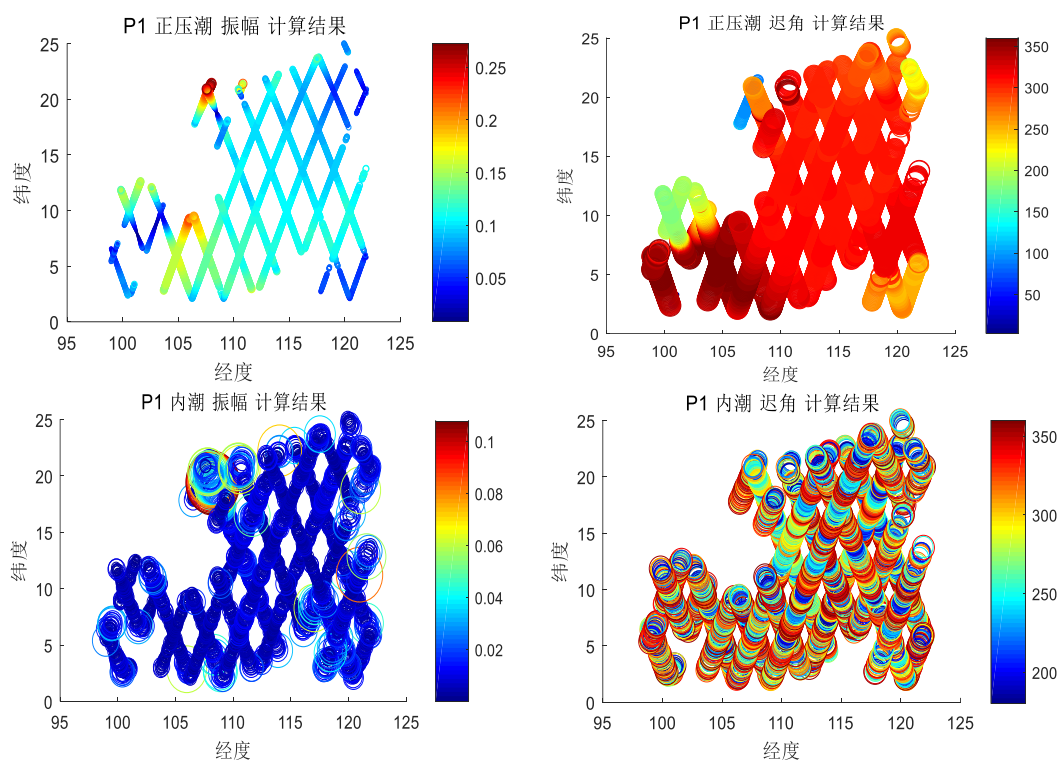


图 29 分潮 P1 分离结果

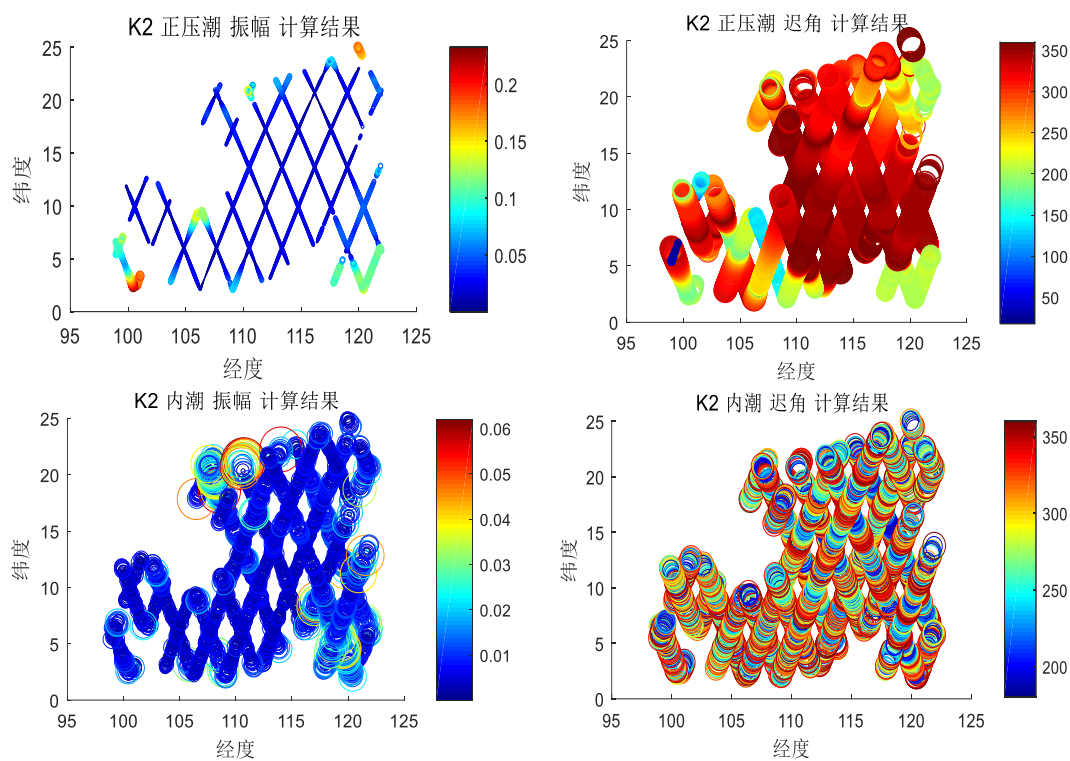


图 30 分潮 K2 分离结果

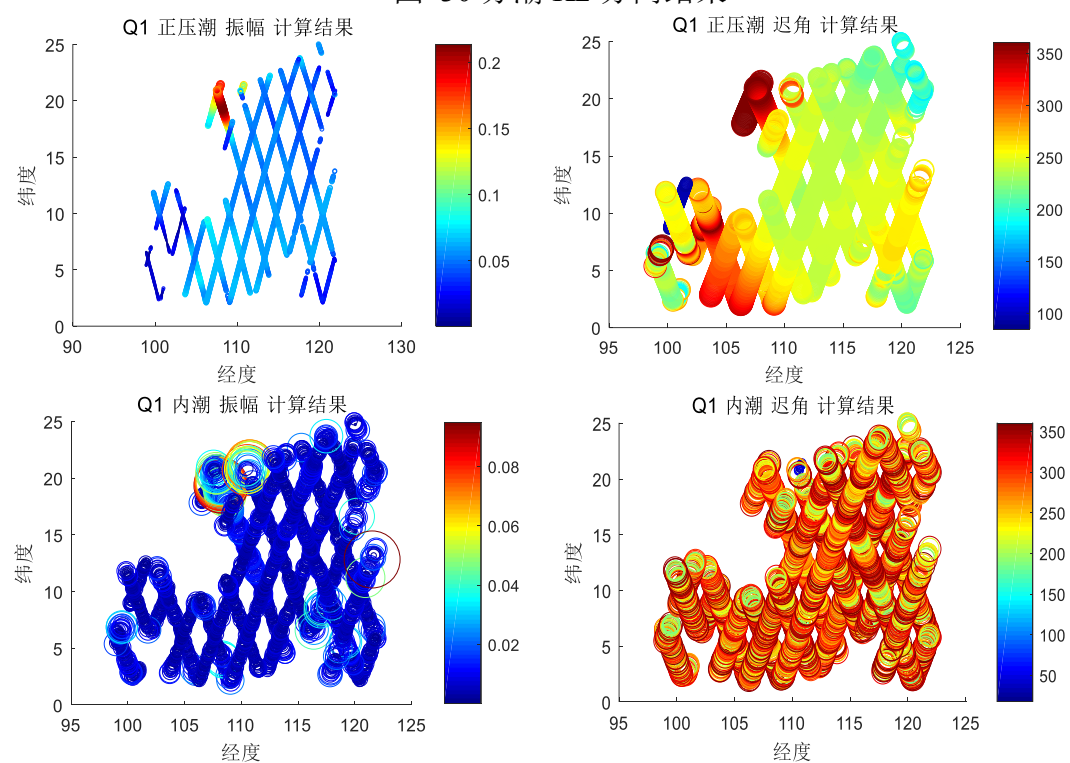


图 31 分潮 Q1 分离结果

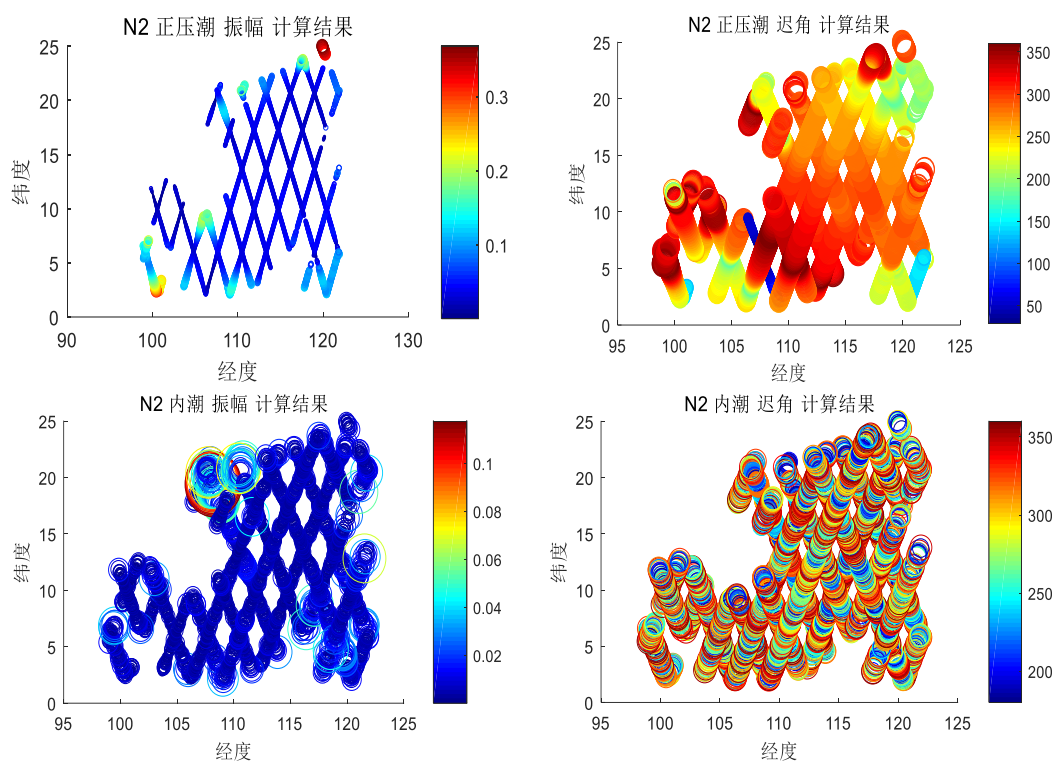


图 32 分潮 N2 分离结果

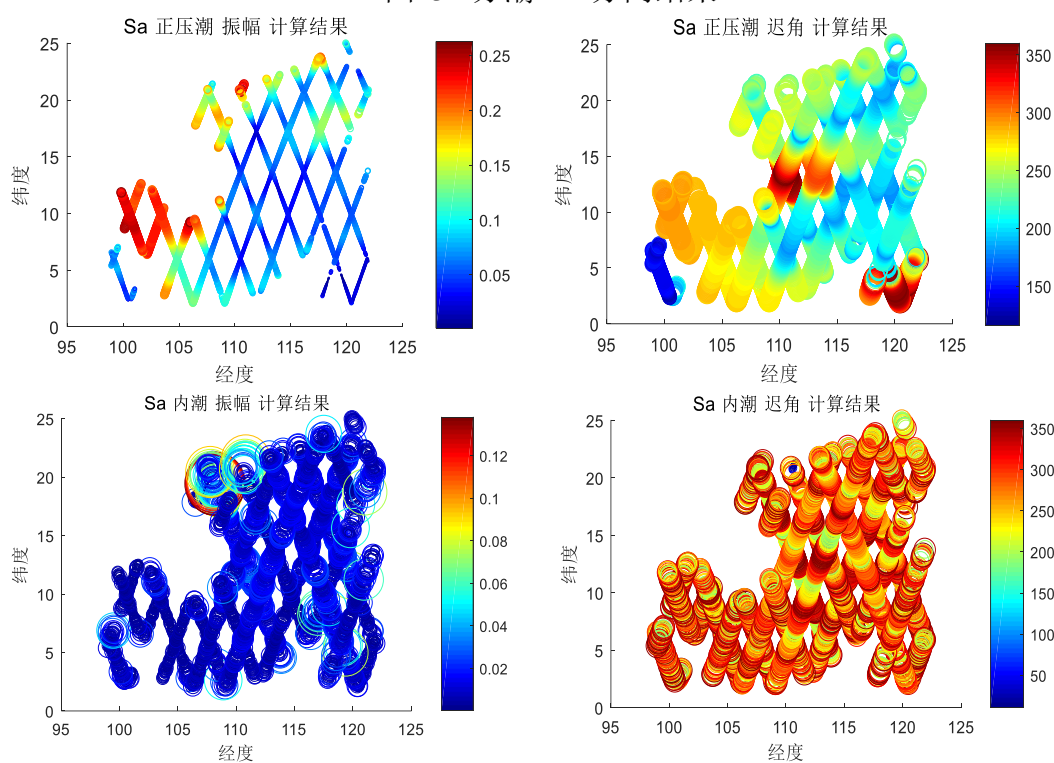


图 33 分潮 Sa 分离结果

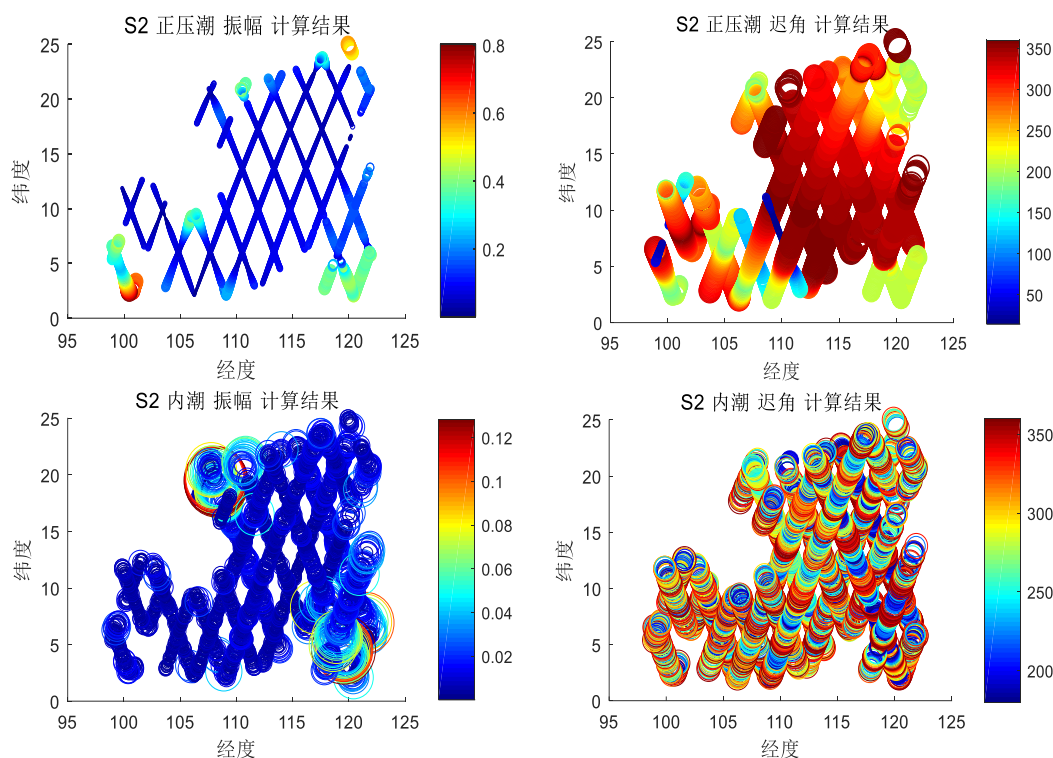


图 34 分潮 S2 分离结果

4.4 计算结果分析

(1) 从分离得出的正压潮结果来看, 采用 11 次多项式拟合结果与海表面各分潮振幅和迟角符合程度很好, 能够准确地表示正压潮值, 保证了内潮提取结果的准确性。

(2) 从分离得出的内潮结果来看, 绝大多数的内潮振幅值在 1cm 以内, 数值上满足内潮的一般大小; 从空间细结构角度来看, 在变化的地形附近产生内潮振幅急剧增加的现象, 而变化的地形是内潮生成的 3 要素之一, 在这种地形附近内潮运动非常活跃, 这也验证了分离结果的正确性;

(3) 在利用多项式拟合的模型提取内潮信号的结果中, 内潮的本质是曲线拟合产生的残差项, 在平稳海面上对海平面高度的影响是随机的, 而在这种海面上内潮振幅较为稳定, 因此其迟角变化是随机的, 这也符合内潮迟角的计算结果。

(4) 在 (北纬 $17^{\circ} \sim 23^{\circ}$, 东经 $107^{\circ} \sim 112^{\circ}$) 和 (北纬 $2^{\circ} \sim 7^{\circ}$, 东经 $113^{\circ} \sim 122^{\circ}$) 区域附近内潮振幅明显大于其他海域, 与文献中得出的结论具有一致性。

4.5 小结

本节建立了利用多项式拟合分离正压潮和内潮信号的数学模型, 首先讨论了待拟合参数的选取问题, 分析了直接对振幅 H 和迟角 g 进行多项式拟合可能带来的问题。然后选取 $H \cos g$ 、 $H \sin g$ 分别进行沿轨 11 次多项式拟合, 成功地对正压潮和内潮进行了分离, 并分别得到正压潮和内潮的调和常数, 以绘图形式直观地表征结果。从数值结果上来看, 该模型可以得到良好的正压潮与内潮的分离效果, 且与文献中的结论保持高度一致性。

关于多项式拟合次数问题将在第四问中进一步深入讨论。

五、问题三的模型建立与求解

5.1 问题分析

作同潮图需要空间上连续的潮汐调和常数数据。但由于客观条件的限制，前述问题的求解中仅获得了星下观测点的潮汐调和常数，不足以作出同潮图。因此需要利用已有数据，通过拟合或插值的方法估计更多位置点的调和常数数据，再绘制同潮图，并利用验潮点的数据进行验证。

5.2 模型建立

5.2.1 基于坐标系变换的多项式拟合模型

文献[3]中提出了一种获取 T/P 轨道间调和常数的方法：对区域内任一点 p ，根据该点到其最近两条上（下）行轨的距离比，在这两条上（下）行轨上可以找到与该点具有相同距离比的一系列点，对这些点的调和常数进行多项式拟合，从而可得到该点的调和常数。采用该拟合方法，可以得到区域内任意点的调和常数。但是这种方法在确定与点 p 最近的四条轨道和计算点 p 到轨道的距离时涉及到大量的几何学计算，实际计算过程十分不便，且在拟合过程中仅依据上/下行轨上拟合点的个数数量来进行上/下行轨的选取，没有利用到所有轨道的数据。

基于这种思想，本文提出了一种基于坐标系变换的多项式拟合模型：通过对坐标系变换，使得星下观测点上/下行轨平行或垂直于坐标轴，在新坐标系下，利用问题二中轨道上数据的拟合结果，通过多项式拟合估计所需位置的潮汐调和常数，求解完成后再将坐标反变换回原坐标系即可。对于新坐标系下任意一点 p' ，拟合所需要的数据可以利用坐标值方便地获取，避免了繁杂的几何学计算。

由假设 2 和假设 3，因为卫星绕地球旋转周期以及地球自转周期恒定，卫星相邻上行轨和下行轨之间距离相等，上行轨与下行轨相交所围成的图形为菱形，如下图中红色线所示。

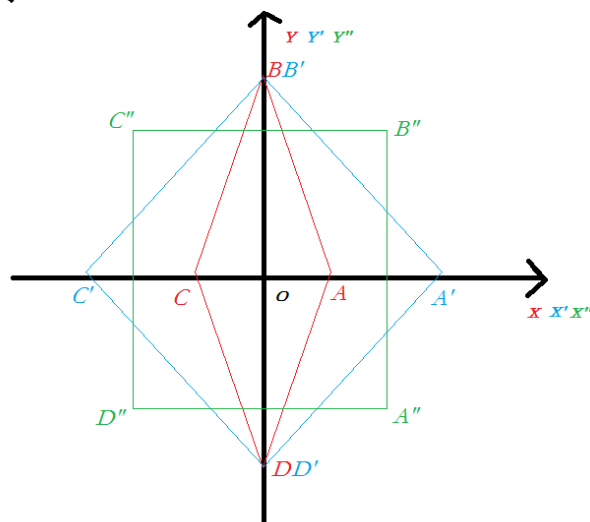


图 35 坐标变换示意图

对于该菱形的轨道坐标，首先利用坐标轴的拉伸使其变为正方形轨道坐标：以任一菱形重心为原点 O ，由于卫星轨道的周期特性，其对角线分别为 x 轴、 y 轴方向，可建立直角坐标系 XOY ，四个顶点坐标为 $A(x_0, 0)$ ， $B(0, y_0)$ ， $C(-x_0, 0)$ ，

$D(0, -y_0)$ 。在此坐标系下对轨迹进行坐标变换，将 x 轴拉伸 k 倍，使得上行轨与下行轨相交所围成的图形变换为正方形，则相应坐标系变换为 $X'OY'$ ，坐标系变

换关系为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

顶点坐标变为 $A(kx_0, 0)$ ， $B(0, y_0)$ ， $C(-kx_0, 0)$ ， $D(0, -y_0)$ 。如上图所示，由于正方形对角线长度相等，即 $y_0 = kx_0$ ，可以求得 $k = y_0/x_0$ 。对于本题目的数据，求得 $k=2.68$ 。

由于此时上下行轨道相交图形已为正方形，故简单旋转变换即可使得卫星轨道平行或垂直于坐标轴。坐标逆时针旋转 θ 角度对应的变换矩阵为：

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

使用旋转矩阵进行坐标变换的公式如下所示：

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

本文中，令 $\theta = -45^\circ$ ，即顺时针旋转 45° ，可得到变换矩阵为：

$$T = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

题目提供的卫星轨道在坐标变换后如下图所示。可以看出，原经纬度坐标中，卫星轨道相对于坐标轴是斜的；而坐标变换后，卫星轨道基本与坐标轴平行或垂直。这样对于每条轨道来说，其总有一个坐标值是定值，便于插值处理。

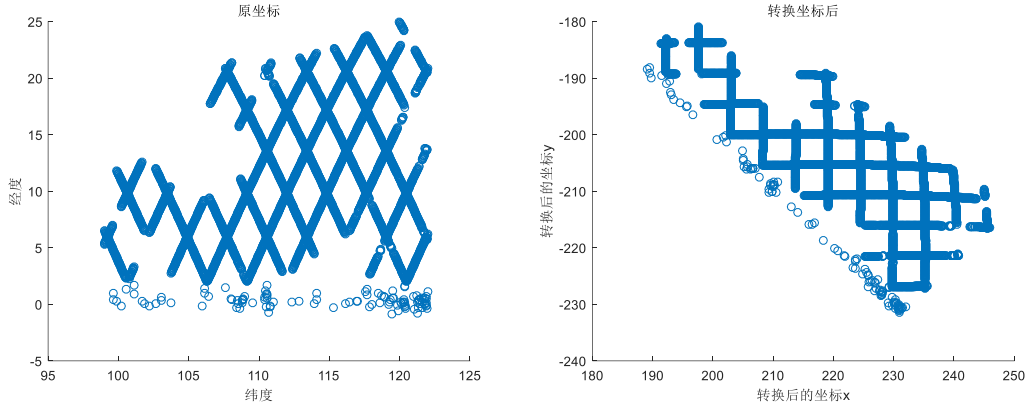


图 36 经纬度坐标变换结果

在新坐标系下，数据拟合的方式如图 37 所示。对于点 A ，其在 x 轴方向上延伸可以与 6 条卫星轨道相交，即存在 6 个交点。利用问题二得到的结果，很容易得到这些交点上的调和常数。对这 6 个点的调和常数进行多项式拟合，再利用拟合结果求得点 A 的调和常数。值得注意的是，在点 A 的 y 轴方向可以同样找到数据点进行拟合，本文中将两个方向上拟合得到结果作平均，作为对点 A 的调和常数的估计。

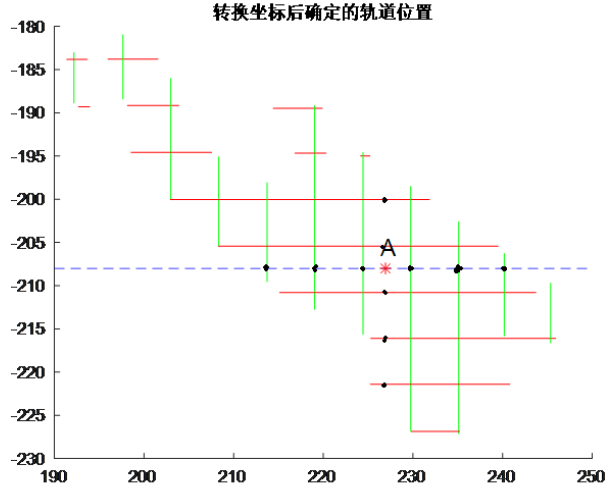


图 37 数据拟合示意图

5.2.2 基于三角剖分的自然邻近插值模型

自然邻近插值方法是一种基于 Delaunay 三角网和 Voronoi 图的插值方法，其得到的插值结果是一阶可导的。Delaunay 三角网和 Voronoi 图是一种互偶图形，在 Delaunay 三角网中的各个三角形中，对每一边画出其垂直平分线，即可得到 Voronoi 图形。Voronoi 图是一种常用的非结构化网格，它可将数据点所在的平面划分成数个多边形，每一个多边形只包含一个数据点。Voronoi 图中每一个网格单元，被称为 Voronoi Cell。在 Voronoi 图中与每一个节点对应的 Voronoi Cell 具有共同边的邻近节点称为自然邻点。Delaunay 三角网和 Voronoi 图如下图所示^[5]：

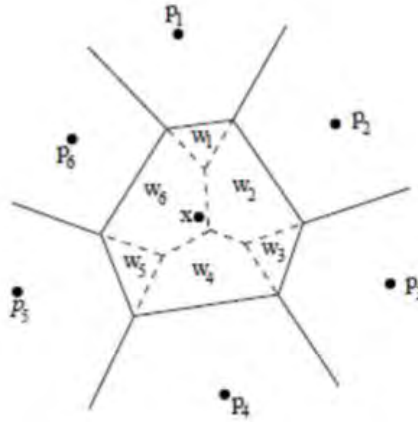


图 38 Delaunay 三角网和 Voronoi 图

关于构建 Delaunay 三角网，相关的研究有很多，本工作参考了 Lawson 提出的局部优化过程^[4]，其基本做法如下所示：

Step1.将两个具有共同边的三角形合成一个多边形；

Step2.以最大空圆准则作检查，看其第四个顶点是否在三角形的外接圆内；

Step3.如果在，修正对角线即将对角线对调，即完成局部优化过程的处理。

想要得到全空间的同潮图，首先对已有的数据进行网格化，然后根据各个自然邻点对待插点 x 的贡献率来计算该点的插值结果。设 x 点的自然邻点共有 M 个，分别为 $p_1, p_2, \dots, p_M$ ，可构建插值公式：

$$f(x) = \sum_{i=1}^M w_i f(p_i) \quad (5.5)$$

其中 $f(x)$ 是待插点 x 处的插值结果； $f(p_i)$ 是自然邻点 p_i 所占的权重系数。

把待插值点 x 作为新节点，加入已经生成的 Voronoi 图中，得到一个与新节点相对应的新 Voronoi 图。假设待插值点 x 所在 Voronoi Cell 的总面积为 S_x ，则新节点所在 Voronoi Cell 分割成 M 个部位，每个部分的面积分别为 $s_1, s_2, \dots, s_M$ ，权重系数 w_i 由各个部分的面积总面积相除求得，即 $w_i = \frac{s_i}{S_x}$ 。

将权重系数代入插值公式，即可得到自然邻点 x 的插值结果 $f(x)$ 。

$$f(x) = \sum_{i=1}^M \frac{s_i}{S_x} f(p_i) \quad (5.6)$$

其算法流程如下图所示：

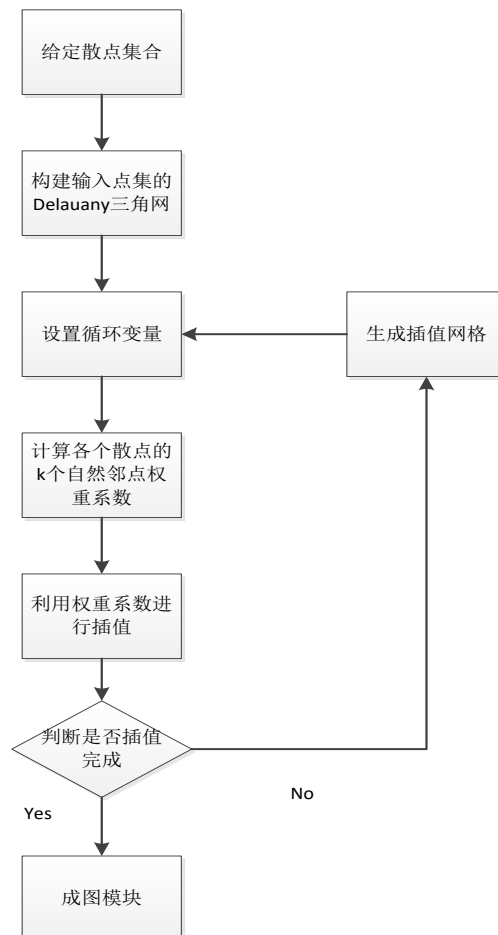


图 39 自然邻近插值算法流程图

5.2.3 线性插值模型

在 Delaunay 三角网中，对于划分的空间三角形区域内的点 $p(x, y)$ ，可以用

下面的公式进行插值计算。

$$p(x, y) = \sum_{i=1}^3 w_i f(x_i, y_i) \quad (5.7)$$

其中， w_i 为三角形中第 i 个点的权重， $f(x_i, y_i)$ 为第 i 个观测点的属性。上

式中 w_i 可以通过下式进行表示：

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{(x_2 - x)(y_3 - y) - (x_3 - x)(y_2 - y)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)} \\ w_2 &= \frac{(x_3 - x)(y_1 - y) - (x_1 - x)(y_3 - y)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)} \\ w_3 &= \frac{(x_1 - x)(y_2 - y) - (x_2 - x)(y_1 - y)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)} \end{aligned} \quad (5.8)$$

模型求解与自然邻点插值方法相同，仅权重系数不同。

5.3 模型求解

5.3.1 基于坐标系变换的多项式拟合模型的求解

基于坐标系变换的多项式拟合模型，求得 M_2 分潮的同潮图如下图所示。其中图 40(a)为振幅等值图与观潮站实测数据的对比，图 40(b)为迟角的等值图与观潮站实测数据的对比，图 40(c)为拟合得到的 M_2 分潮的同潮图。本文利用题目提供的水深数据，确定了陆地的范围，在图中作出，避免陆地范围的拟合值的影响。

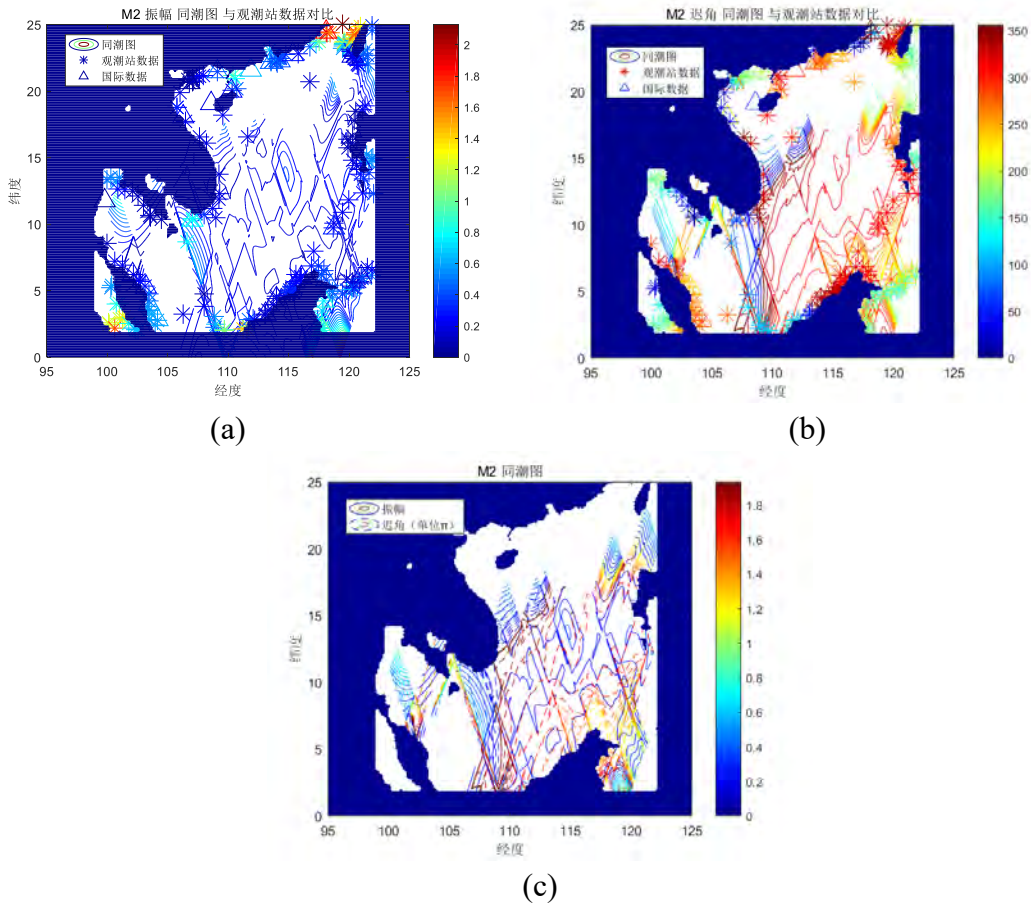


图 40 基于坐标系变换的多项式拟合模型的求解结果

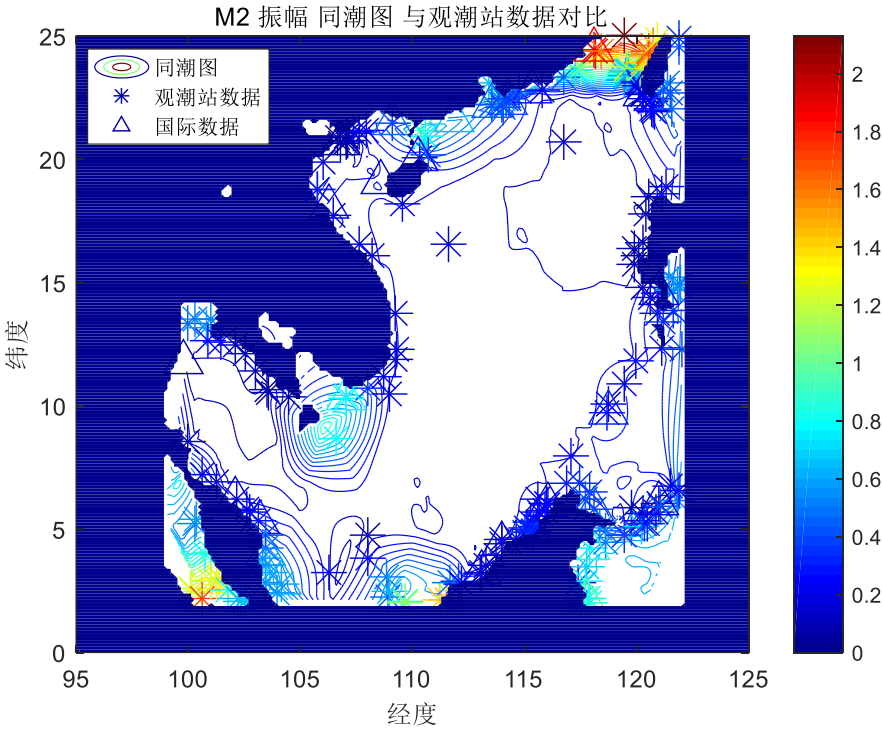
从计算结果可以看出,基于坐标系变换的多项式拟合模型求得的振幅和迟角具有一定准确性,但不可否认误差较大。这主要是因为该片海域较为复杂,受陆地干扰大。从问题二的结果就可知道,有很多卫星轨道数据被迫分为了多段进行处理,这使得能够用于数据拟合的数据点减少了,降低了计算的准确性;同时也可以看出,陆地的影响缩小了能够拟合的坐标范围,有些位置没有成功求得调和参数。如果是在无陆地影响的连续大面积海域,该方法的性能会得到大幅度提升。文献[3]提到这种方法更适用于开阔海域,对于本问题求解的目标海域,同潮图失真的主要原因是陆地带来的干扰。

5.3.2 自然邻近插值模型的求解

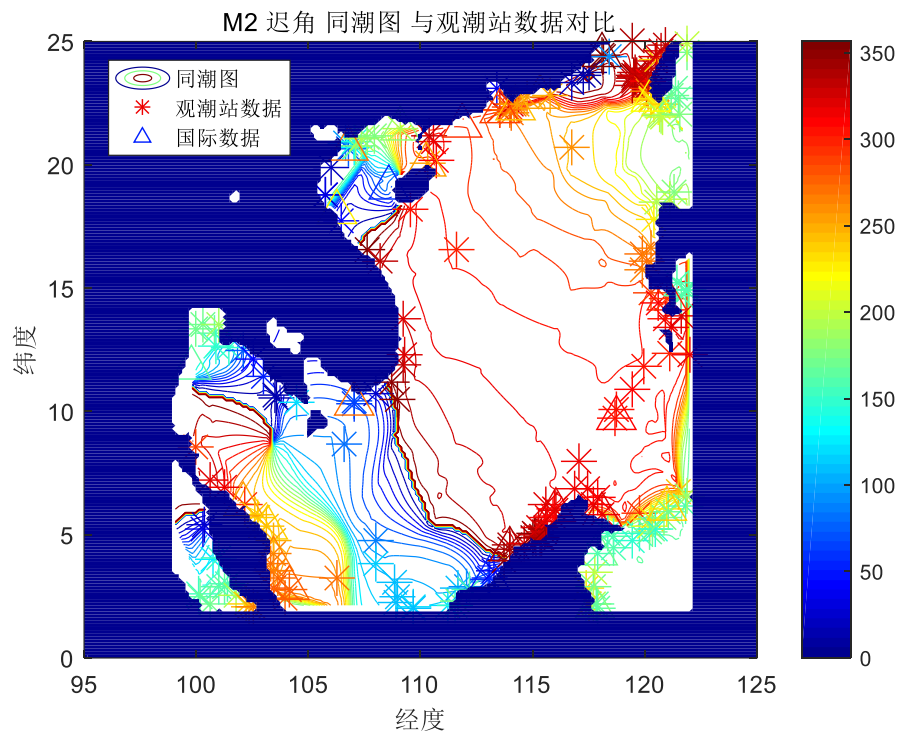
利用自然邻近插值模型,求得的 M_2 等 9 个分潮的同潮图分别如图 41~49 所示。同样,每个图中的(a)为振幅的等值图与观潮站实测数据的对比,(b)为迟角的等值图与观潮站实测数据的对比,(c)为插值得到的同潮图。利用题目提供的水深数据,确定了陆地的范围,将陆地范围内的插值剔除,避免陆地范围插值的影响。注意,为了保证同潮图中振幅和迟角的大小都能体现充分,本文在作同潮图时将迟角的单位转换为 π 。

从各个分潮振幅的等值图、迟角的等值图与观潮站实测数据的对比可以看出,自然邻近插值模型的准确性明显高于多项式拟合模型。在观测站附近的振幅和迟角的插值结果与实测结果符合程度非常高,并且振幅和迟角的变化趋势也符合实际。

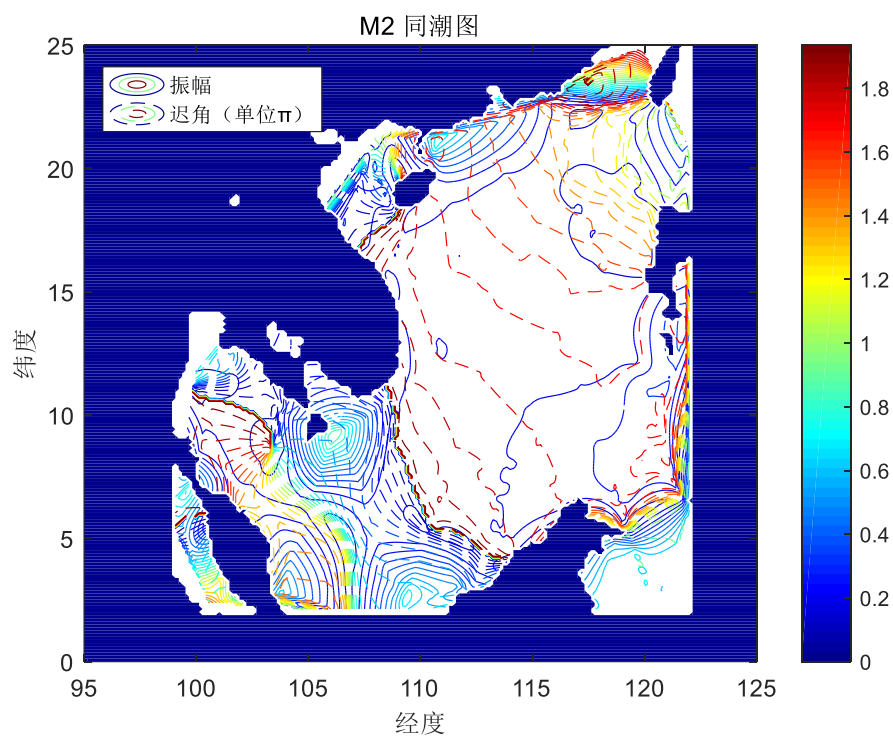
从这一结果可以看出,即使存在复杂陆地、海岸线的影响,自然邻近插值模型仍然可以很准确地进行插值,说明该模型适合于在这种情况下使用,计算同潮图,是一种很好的插值方法。



(a)

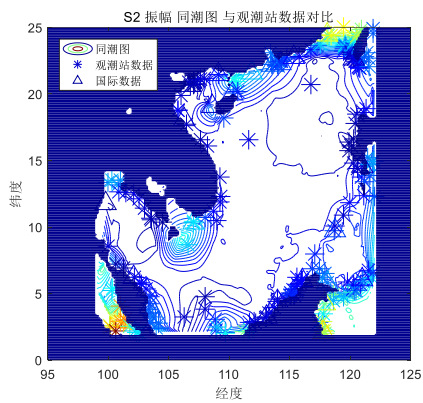


(b)

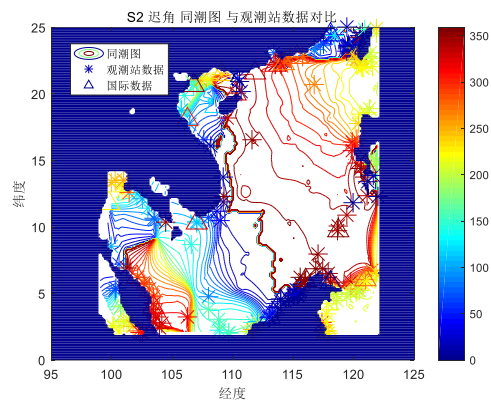


(c)

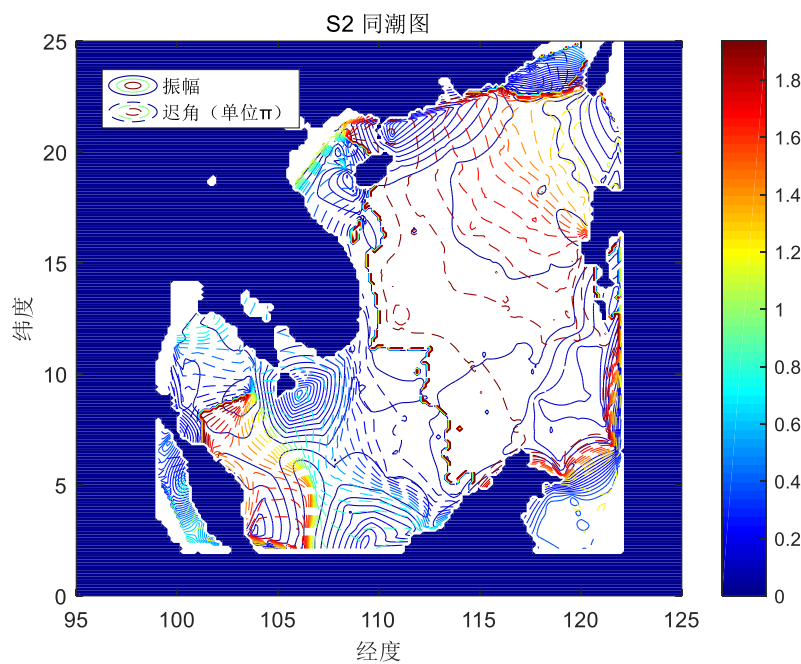
图 41 自然邻近插值求得的 M₂ 分潮同潮图



(a)

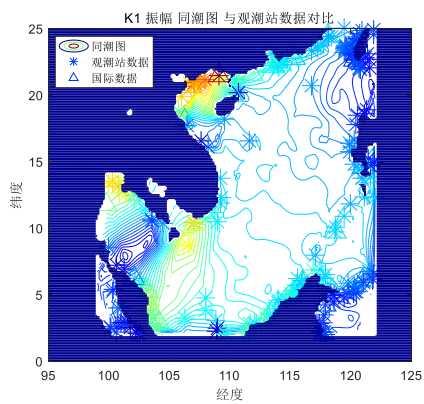


(b)

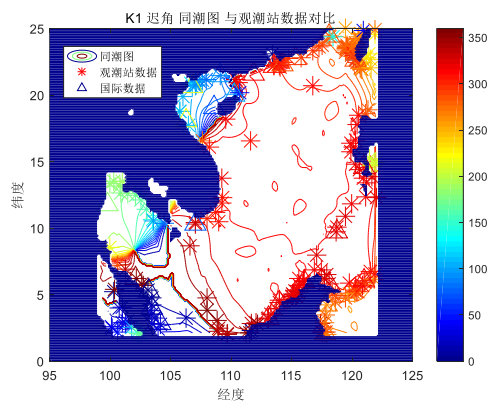


(c)

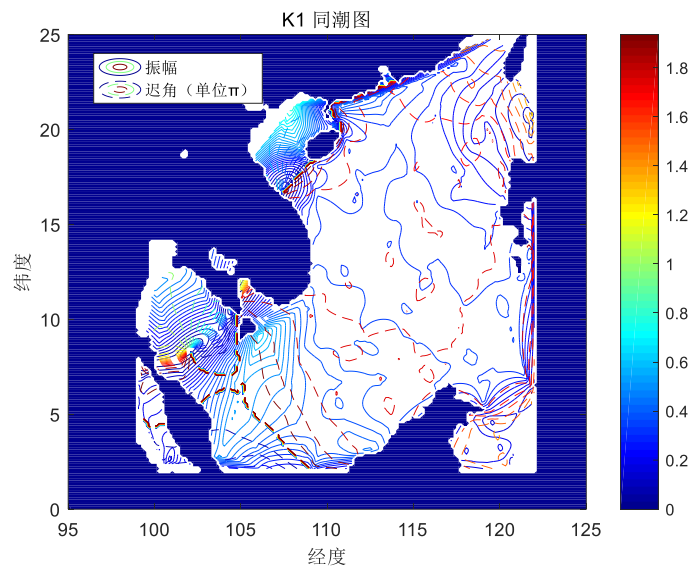
图 42 自然邻近插值求得的 S₂ 分潮同潮图



(a)

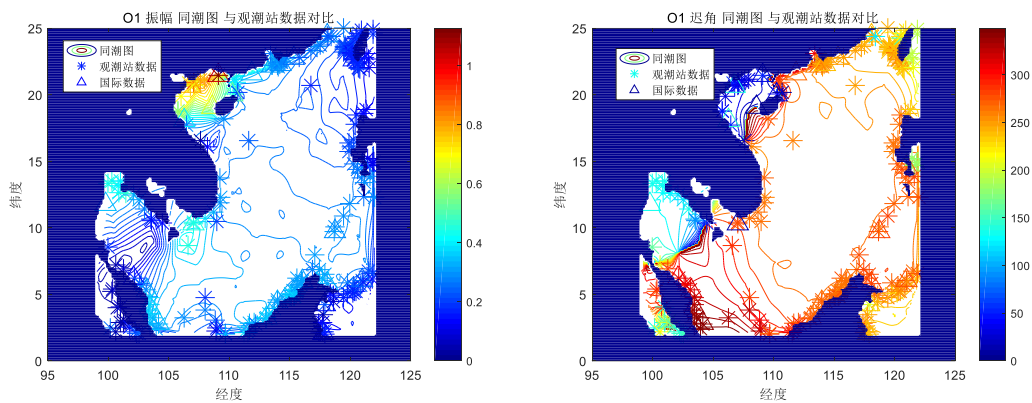


(b)



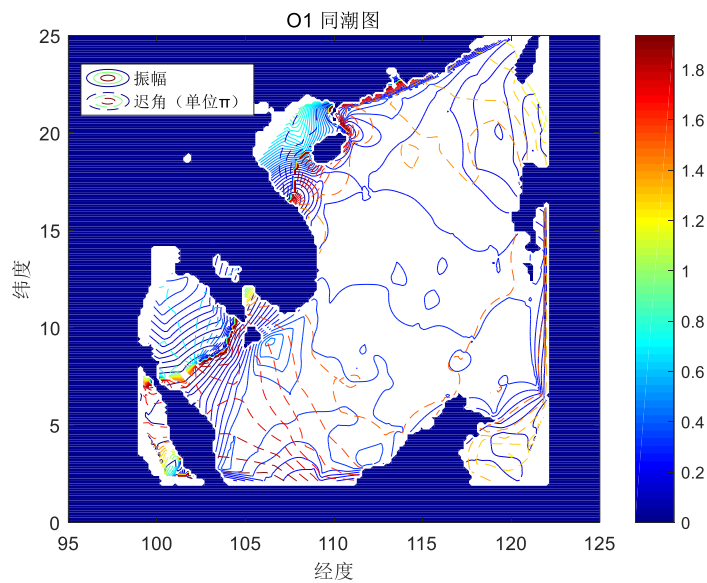
(c)

图 43 自然邻近插值求得的 K2 分潮同潮图



(a)

(b)



(c)

图 44 自然邻近插值求得的 O1 分潮同潮图

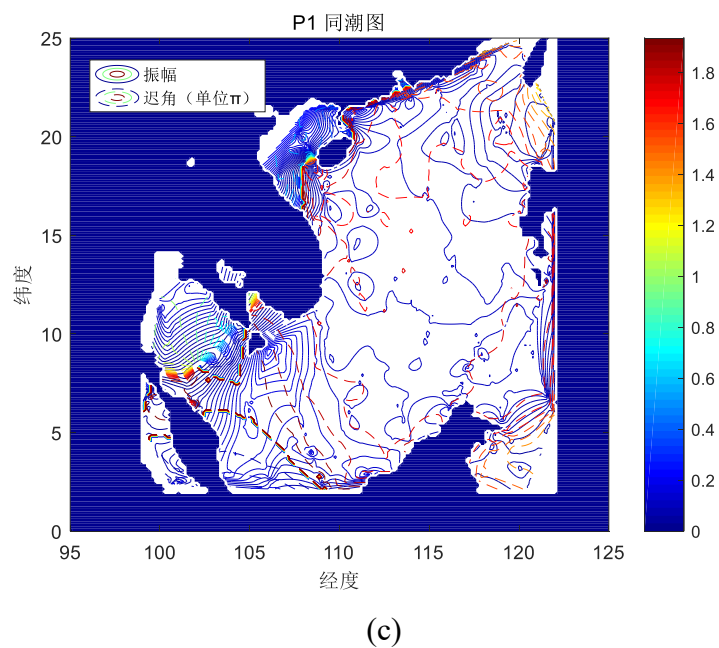
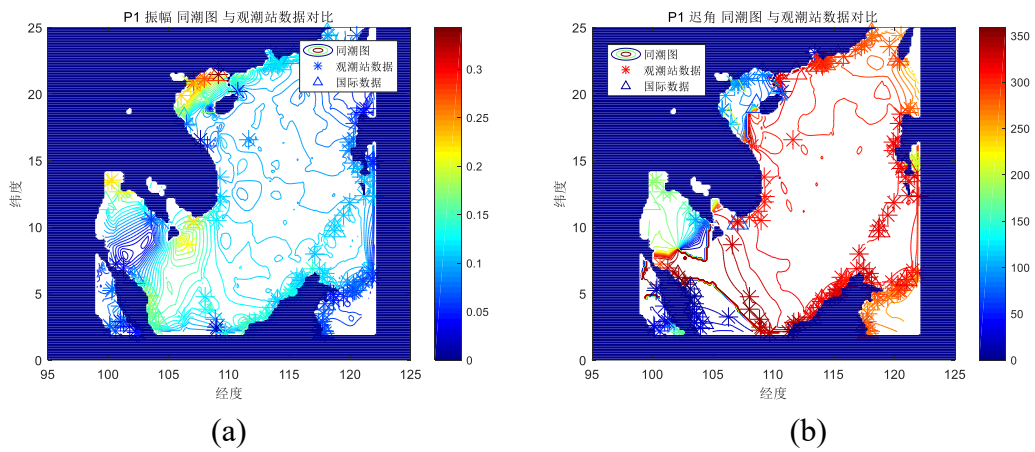
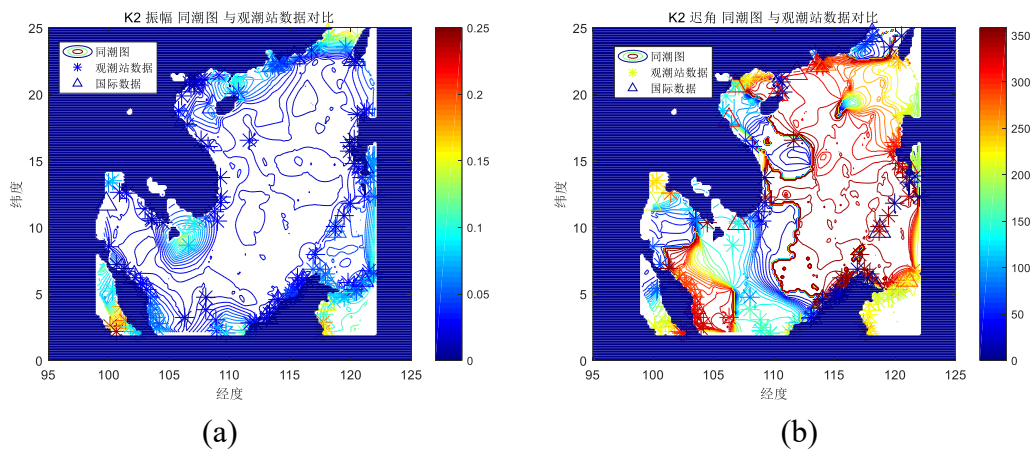


图 45 自然邻近插值求得的 P1 分潮同潮图



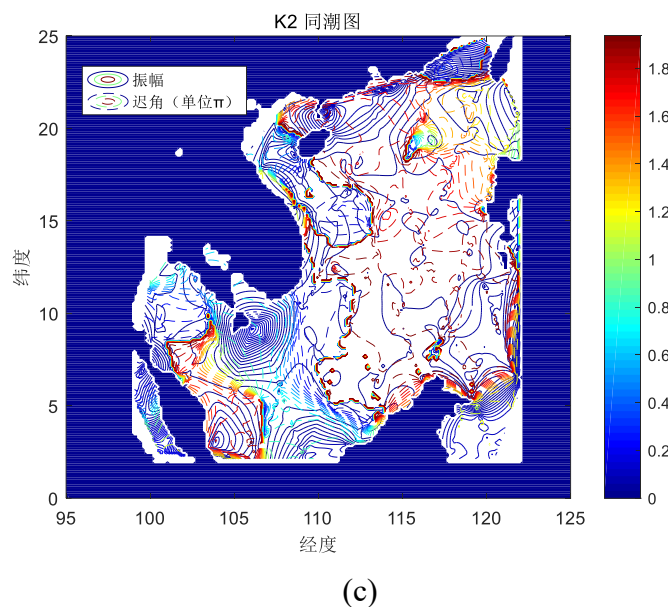


图 46 自然邻近插值求得的 K2 分潮同潮图

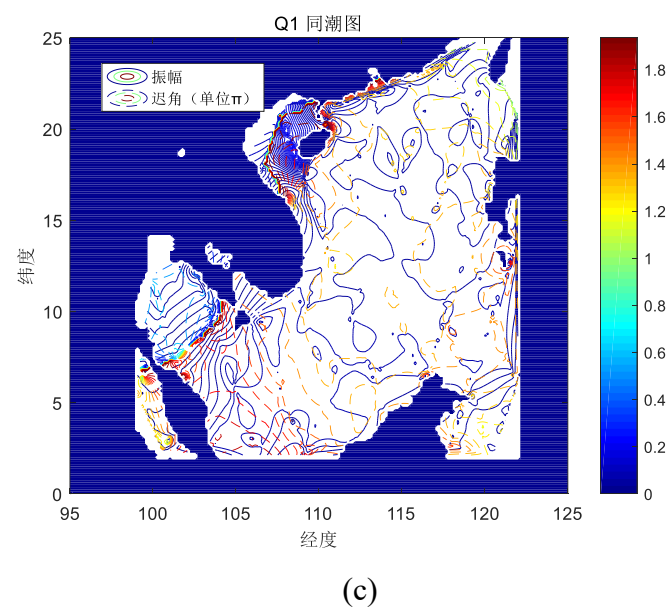
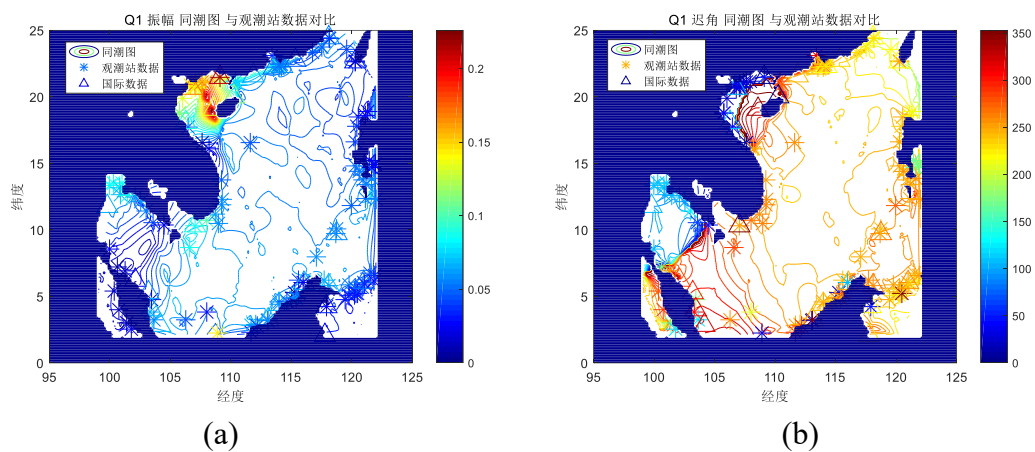


图 47 自然邻近插值求得的 Q1 分潮同潮图

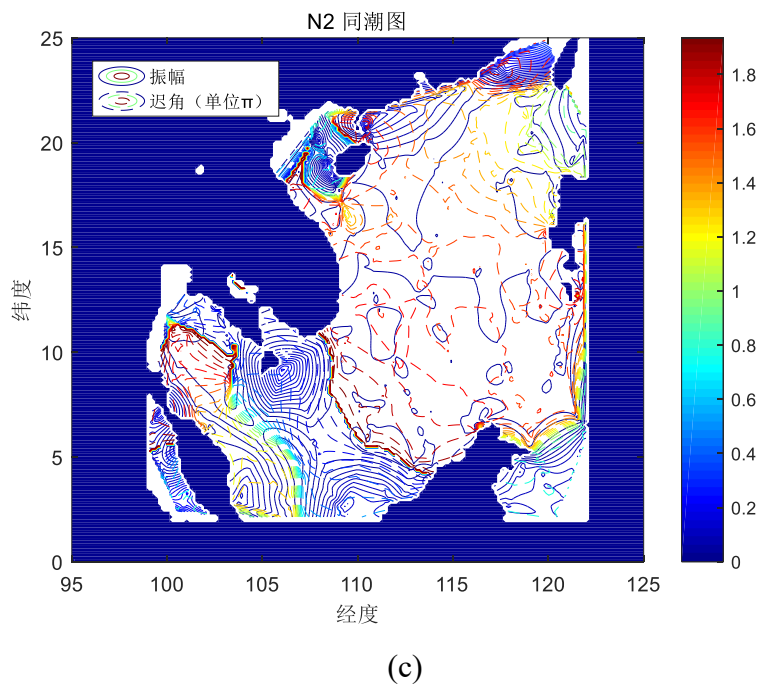
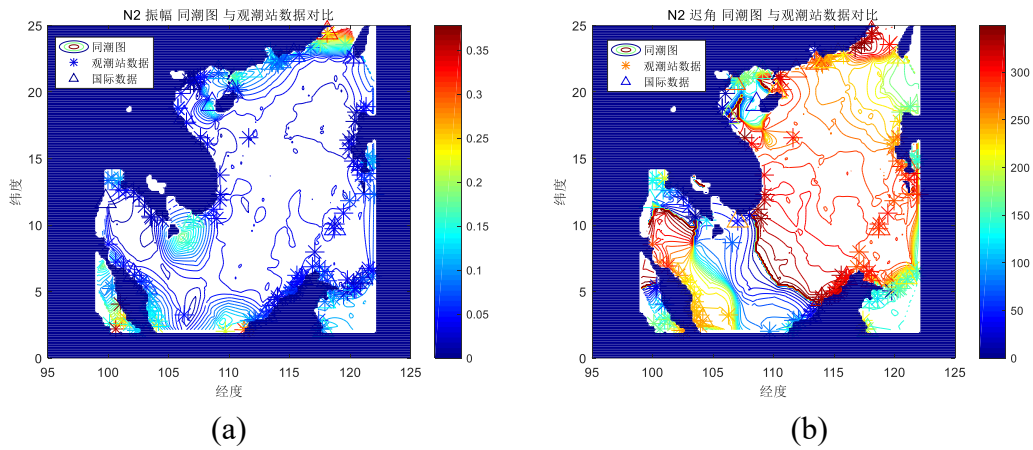
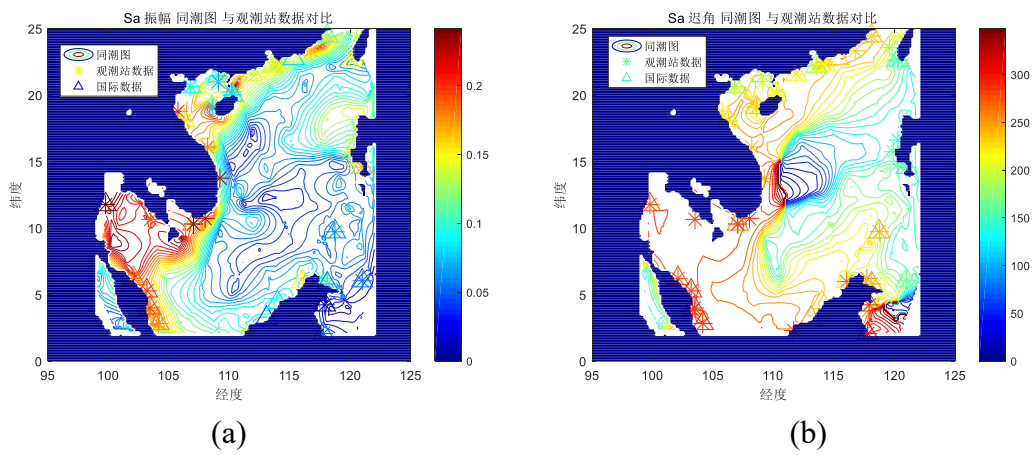
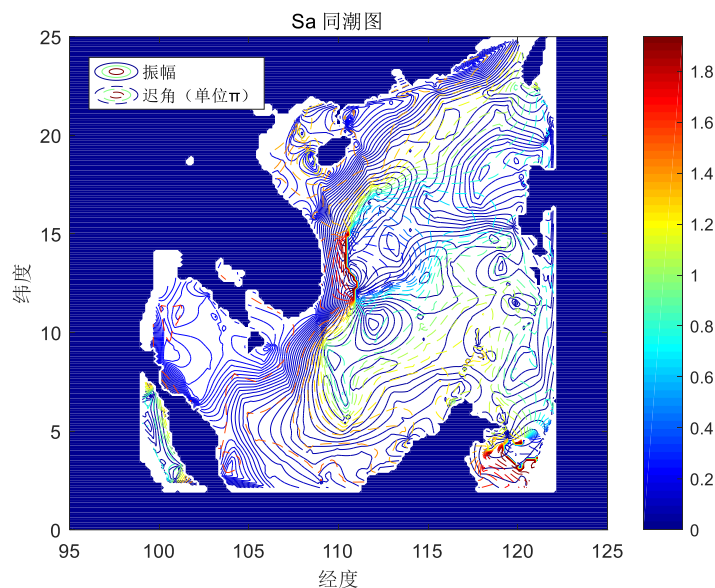


图 48 自然邻近插值求得的 N2 分潮同潮图





(c)

图 49 自然邻近插值求得的 Sa 分潮同潮图

5.4 结果分析

将绘制出的等潮图与文献^[6]中提供的等潮图进行观察对比,发现具有高度一致性。为了更直观地对模型进行评价,本文计算了不同分潮个数下,基于三角剖析的自然邻近插值法和线性插值法的插值结果与观潮站实测值的振幅 H 的 RMSE 和 Δ 的 RMS 值,如表 10 所示。从表中可以看出,采用 9 个分潮计算时,两种插值方法的插值结果与实测结果一致性较好,除了主分潮 M_2 和 K_1 之外,其余 7 个分潮的振幅 RMSE 均低于 0.1 米,而 K_1 的 RMSE 值也只是略高于 0.1 米。要知道,高度计系统测量海面高度的误差已经达到 0.05 米,而插值结果能达到如此之小的误差已经是十分不易。这说明自然邻近插值法的确能够有效进行潮汐调和参数的插值。

同时可以看出,采用 9 个分潮和 21 个分潮时求解的误差明显比采用 4 个分潮时要小,而采用 9 个分潮和 21 个分潮两者之间的差别则不大,这与问题一中的结论一致。

表 12 自然邻近插值法估计结果与观潮站实测值的误差

分潮\计算矩阵	振幅 RMSE/米			Δ RMS/米		
	4 分潮	9 分潮	21 分潮	4 分潮	9 分潮	21 分潮
M2	0.416408	0.251549	0.256938	0.622173	0.490294	0.494427
S2	0.181126	0.092742	0.091717	0.264118	0.196485	0.195911
K1	0.204534	0.103313	0.103668	0.385464	0.170567	0.178977
O1	0.122225	0.079986	0.089379	0.308396	0.147597	0.158364
P1	---	0.039967	0.040478	---	0.067727	0.068206
K1	---	0.038781	0.030796	---	0.064148	0.055672
Q1	---	0.028941	0.022125	---	0.070021	0.04562
N2	---	0.059016	0.05065	---	0.09015	0.083042
Sa	---	0.060503	0.043904	---	0.08054	0.067375

表 13 9 分潮线性插值法估计结果与观潮站实测值的误差

分潮	振幅 RMSE/米	Δ RMS/米
M2	0.2521	0.4899
S2	0.0922	0.1948
K1	0.1062	0.1728
O1	0.0804	0.1484
P1	0.0405	0.0686
K1	0.0389	0.0643
Q1	0.0298	0.0709
N2	0.0591	0.0910
Sa	0.0613	0.0825

5.5 小结

采用了基于坐标系变换的多项式拟合模型和基于三角剖分的自然邻近插值、线性插值模型等三种模型完成了各分潮同潮图的绘制。在基于坐标系变换的多项式拟合模型中，首先通过拉伸和旋转进行坐标系变换，将星下观测点的轨道转换为与坐标轴平行或者垂直。然后，在新的坐标系下，利用与待拟合点横纵坐标相同的观测点数据，进行多项式拟合，再将新坐标反转换。该模型与直接拟合法相比，大大减小空间几何运算的复杂程度。利用拟合结果，作出同潮图可知，拟合得到的振幅和迟角较为准确，但由于本题研究的海域存在陆地、海岸线等，使得拟合精度和拟合范围受到影响，作出的同潮图还有改进的空间。这也说明该方法更适用于开阔海域。然后，本文采用基于三角剖分的自然邻近插值、线性插值两种模型，作出 9 个分潮的同潮图。同时利用题目提供的水深数据，确定了陆地的范围，将陆地范围内的插值剔除，避免陆地范围插值的影响。从各个分潮振幅和迟角的等值图与观潮站实测数据的对比可知，两种插值模型的准确性明显高于多项式拟合模型。在观测站附近的振幅和迟角的插值结果与实测结果符合程度非常高，并且振幅和迟角的变化趋势也符合实际，即使存在复杂陆地、海岸线的影响，两种插值模型仍然较为准确。最后计算了不同分潮个数下，自然邻近插值法的计算结果与观潮站实测振幅的 RMSE 和 Δ 的 RMS，可知，采用 9 个分潮计算时，自然邻近插值法的计算结果与实测结果一致性较好，除了主分潮 M2 之外，其余 8 个分潮的振幅 RMSE 均低于 0.11 米，说明插值精度较高。

六、问题四的模型建立与求解

6.1 问题分析

在问题二对沿轨道的潮汐调和常数分离的研究过程中，采用了 11 阶多项式拟合的方法，本问题将探讨多项式拟合的最佳次数，并基于分析结论探讨对问题三求解的启示与帮助。

6.2 模型建立

6.2.1 基于 RMSE 的均值的多项式拟合阶数分析模型

对一条轨道上的 i 个星下观测点的 $H_{sta,i} \cos g_{sta,i}$ 和 $H_{sta,i} \sin g_{sta,i}$ 进行 K 阶多项式拟合，在相同位置的拟合计算值 $H_{fit,i,K} \cos g_{fit,i,K}$ 和 $H_{fit,i,K} \sin g_{fit,i,K}$ 可通过代入该 K 阶多项式计算得到，那么有

$$H_{fit,i,K} = \left[\left(H_{fit,i,K} \cos g_{fit,i,K} \right)^2 + \left(H_{fit,i,K} \sin g_{fit,i,K} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.1)$$

$\Delta H_{i,K}$ 代表 K 阶拟合计算得到的振幅与星下观测点的振幅之差，即：

$$\Delta H_{i,K} = |H_{sta,i} - H_{fit,i,K}| \quad (6.2)$$

$\Delta_{i,K}$ 代表 K 阶拟合计算得到的矢量与星下观测点的矢量之差，即：

$$\Delta_{i,K} = \left[\left(H_{sta,i} \cos g_{sta,i} - H_{fit,i,K} \cos g_{fit,i,K} \right)^2 + \left(H_{sta,i} \sin g_{sta,i} - H_{fit,i,K} \sin g_{fit,i,K} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.3)$$

则可以利用以下两个参数来评价 K 阶多项式拟合的结果：

$$\begin{aligned} \Delta H_{RMS,K} &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta H_{i,K}^2} \\ \Delta_{RMS,K} &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta_{i,K}^2} \end{aligned} \quad (6.4)$$

式中： $\Delta H_{RMS,K}$ 和 $\Delta_{RMS,K}$ 分别代表 $\Delta H_{i,K}$ 与 $\Delta_{i,K}$ 的均方根。两个值越小，说明拟合结果越好。

因为一组数据的拟合结果没有代表性，所以本文使用在前面题目中分好的 25 段轨道数据，对每段数据进行拟合，求 $\Delta H_{RMS,K}$ 和 $\Delta_{RMS,K}$ 的平均值来代表拟合的好坏。

采用多组数据求平均值的方法，好处是结果更具有普适性，更有说服力。避免了单组数据出现异常个例的情况。

6.3 模型求解

图 50 是 25 段数据的 $\Delta H_{RMS,K}$ 随拟合阶数的变化情况。由图可知，随着拟合阶数的增加振幅的误差 $\Delta H_{RMS,K}$ 首先呈下降趋势，并趋于平缓（8 阶附近）；但是当拟合阶数达到一定值时（超过 14 阶），误差 $\Delta H_{RMS,K}$ 会出现“震荡”的现象，

则误差 $\Delta H_{RMS,K}$ 时大时小，此时的拟合结果已经不可靠。

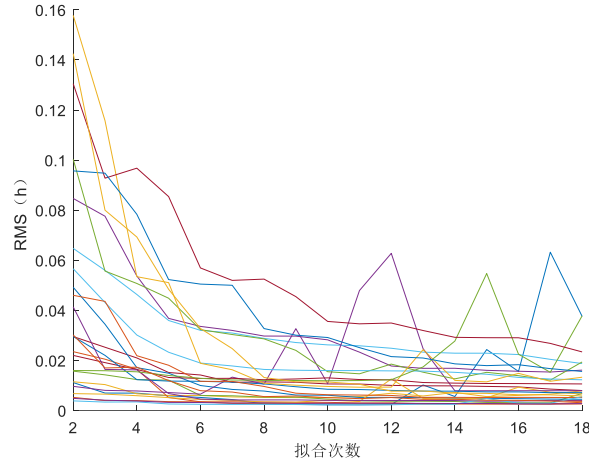


图 50 25 段数据振幅误差随拟合阶数的变化情况

图 51 是 25 段数据的 $\Delta_{RMS,K}$ 随拟合阶数的变化情况。由图可知，与 $\Delta H_{RMS,K}$ 的变化情况不同，每段数据的 $\Delta_{RMS,K}$ 随着拟合次数的增加变化并不明显，但是不同段数据的 $\Delta_{RMS,K}$ 的值差别较大。这一结果也验证了本文采用均值模型的合理性：不同数据段之间的 $\Delta_{RMS,K}$ 差别较大，仅仅使用一段数据是不够的，而采用多段数据的均值则可以有效解决这一问题。

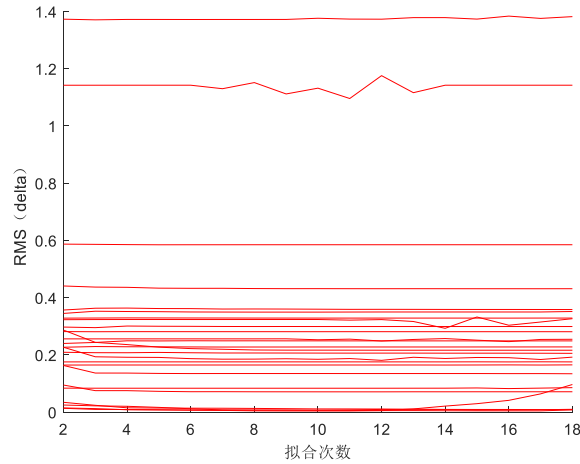


图 51 25 段数据的矢量差随拟合阶数的变化情况

图 52 是 25 段数据的 $\Delta H_{RMS,K}$ 的均值随拟合阶数的变化情况。由图可知，随着拟合阶数的增大， $\Delta H_{RMS,K}$ 均值逐渐减小；当阶数达到 10 以上时， $\Delta H_{RMS,K}$ 均值趋于平稳，下降不再明显。

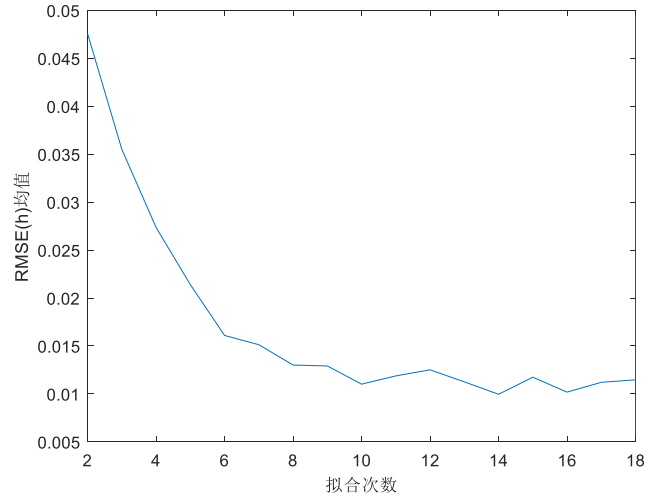


图 52 25 段数据的 $\Delta H_{RMS,K}$ 的均值随拟合阶数的变化情况

图 53 是 25 段数据的 $\Delta_{RMS,K}$ 的均值随拟合阶数的变化情况。由图可知，随着拟合阶数的增大， $\Delta_{RMS,K}$ 均值呈现出先减小后增大的趋势；当阶数达到 11 时， $\Delta_{RMS,K}$ 达到最低点。

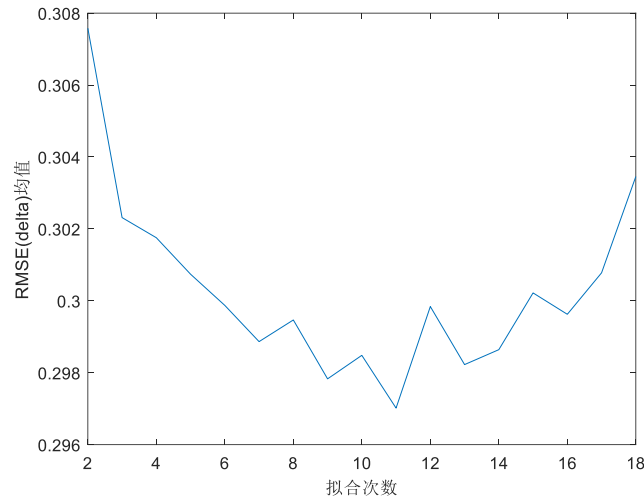


图 53 25 段数据的 $\Delta_{RMS,K}$ 的均值随拟合阶数的变化情况

结合以上 $\Delta H_{RMS,K}$ 和 $\Delta_{RMS,K}$ 均值的两组实验结果，本文认为在题目提供的数据下，采用 11 阶多项式拟合是最优的。理由如下：一是阶数为 11 时， $\Delta_{RMS,K}$ 均值达到最小；二是阶数大于 10 时， $\Delta H_{RMS,K}$ 值趋于平稳，下降不再明显，此时如果再增大拟合阶数， $\Delta H_{RMS,K}$ 下降的收益不再明显。

6.4 对问题三的启示

多项式拟合阶数越高，拟合结果并不一定越好，而是存在最优阶数。多项式拟合的效果与具体数据有关，特别是数据的点数。在数据点少时，不宜使用过高的阶数。这对于问题三的解答是有帮助的：问题三中基于坐标系变换的多项式拟合模型，在实际拟合时，能够使用的数据量很小，基本上在 2~7 个点。因为点数较少，本文根据数据数目，相应调整拟合阶数，3 个点及以下采用 1 阶，4 个点采用 2 阶，5 个点及以上则采用 3 阶多项式拟合。另外，本文计算出的最佳阶数 11 不是一成不变的，针对不同的数据，不同的情况，应该重新评估和计算最佳拟合阶数。

6.5 小结

首先建立了潮汐调和常数多项式拟合优度的评价模型：对于单独一段数据，采用振幅的 $\text{RMSE}(\Delta H_{\text{RMS},K})$ 和 Δ 的 $\text{RMS}(\Delta_{\text{RMS},K})$ 两个参数表征拟合优度，两个参数越小，则认为拟合越优。而对于多段数据，则采用所有轨道上数据拟合结果的 $\Delta H_{\text{RMS},K}$ 和 $\Delta_{\text{RMS},K}$ 的**平均值**来表征拟合的优劣。计算结果表明：随着拟合阶数的增大， $\Delta H_{\text{RMS},K}$ 均值逐渐减小；当阶数达到 10 以上时， $\Delta H_{\text{RMS},K}$ 值趋于平稳，下降不再明显；随着拟合阶数的增大， $\Delta_{\text{RMS},K}$ 均值呈现出先减小后增大的趋势；当阶数达到 11 时， $\Delta_{\text{RMS},K}$ 达到最低点。结合 $\Delta H_{\text{RMS},K}$ 和 $\Delta_{\text{RMS},K}$ 均值的两组计算结果，本文认为，**采用 11 阶多项式拟合是最优的**。

多项式拟合阶数越高，拟合结果并不一定越好，而是存在最优阶数。问题三中基于坐标系变换的多项式拟合模型，在实际拟合时，能够使用的数据量很小，基本上在 2~7 个点。本文根据数据数目，相应调整拟合阶数。另外，本文计算出的最佳阶数 11 不是一成不变的，针对不同的数据，不同的情况，应该重新评估和计算最佳拟合阶数。

七、参考文献

- [1]陈宗镛. 潮汐学[M]. 科学出版社, 1980.
- [2]王斌, 张晓爽, 吕咸青,等. 高度计资料提取内潮信号的方法[J]. 解放军理工大学学报(自然科学版), 2015(3):266-272.
- [3]范丽丽. 风暴潮数值同化研究和高度计资料拟合方法研究[D]. 中国海洋大学, 2011.
- [4]Lawson C L. Software for C 1, Surface Interpolation[J]. Mathematical Software, 1977:161-194.
- [5]张伟, 覃庆炎, 简兴祥. 自然邻点插值算法及其在二维不规则数据网格化中的应用[J]. 物探化探计算技术, 2011, 33(3):291-295.
- [6]Fang G, Wang Y, Wei Z, et al. Empirical cotidal charts of the Bohai, Yellow, and East China Seas from 10 years of TOPEX/Poseidon altimetry[J]. Journal of Geophysical Research Oceans, 2004, 109(C11):-.