

中国研究生创新实践系列大赛
“华为杯”第十七届中国研究生
数学建模竞赛

学 校 空军工程大学

参赛队号 20910240065

队员姓名 1.姜龙亭

 2.董泽洪

 3.王俊迪

中国研究生创新实践系列大赛 “华为杯”第十七届中国研究生 数学建模竞赛

题目 无人机集群协同对抗

摘 要：

随着智能化技术和航空装备的发展，无人机作战平台已经由传统的“单打独斗”向“集群”作战方向发展。多架无人机协同侦察、协同探测、协同跟踪、协同攻击、协同拦截等，能够实现单架无人机的任务拓展，提升无人机集群整体的作战效能。此外，无人机自主能力的提升，将极大的促进未来战场的转型，催生新型作战力量，颠覆传统的战争模式。因此，无人机集群协同作战受到各军事强国的广泛关注。本文主要针对红蓝双方无人机集群在平面内的协同对抗问题进行研究。

针对问题一，为了确定无论红方无人机采取何种拦截策略，蓝方无人机都能成功突防的初始位置。本文首先分析了蓝方无人机成功突防的条件，然后分析了无人机编队构形、编队拦截策略等因素对拦截成功率的影响，最后基于可达集概念，将红蓝双方的对抗过程看作一个可控系统，采用反向可达集求解方法，逆时间求解红方无人机编队的拦截区域，对不同仿真时刻的初始安全状态集合求并集，即为蓝方无人机实现成功突防的初始状态集合。在此基础上，问题一要求提出最优的蓝方无人机突防策略。本文提出的突防策略基本思路为：当蓝方无人机与红方的无人机距离较远时，由于红方无人机的机动能力较弱，蓝方不必采取较大的机动；当蓝方无人机与红方的无人机距离较近时，则应根据所处的位置，动态调整飞行航向，选择机动规避的机动方式。问题一中构建的模型通过对各种影响因素的分析，简化了问题复杂度；基于可达集的问题求解方法不需过多考虑红蓝双方无人机的动态对抗性，便于问题求解，而且问题计算量较小，相较于穷举搜索法，采用本文建立的模型计算效率更高。

针对问题二，为了确定红方无人机编队中心未确定情况下，蓝方能够成功突防的通道宽度下限。本文首先分析讨论了红方无人机编队三种不同初始位置分布下的拦截区域大小，通过比较可以得出，当两个无人机拦截范围无交集，且各无人机编队的拦截区域不会超出C点或D点时可达到最大拦截区域。综合考虑飞行速度和最小转弯半径计算最短变轨时间，进而通过比较红蓝双方无人机的最短变轨时间得出，蓝方无人机可以借助较好地机动性对红方无人机进行摆脱。根据构建的数学模型，仿真分析可知，当实际通道带宽 M 比通道下限 $M_{\min}=80\text{km}$ 大时，蓝方无人机一定能突破红方无人机集群的拦截。最后，给出蓝方无人机时间最短的突防策略。由仿真结果可知，蓝方无人机时间最短的突防策略为：蓝方无人机在与红方无人机编队对抗过程中做三次转弯机动，三次的转弯角度分别为 45° 、 90° 以及 45° 。

针对问题三，首先通过图解法分析确定两个波次无人机的最佳数目分配，当每架红方运载体两个波次各发射5架无人机时，可实现最优拦截效果。进而通过仿真，对比分析了

两种不同排布方式（并行相切式排布、分散对称式排布）下的拦截效率。同时，基于可达集方法对两种排布下的无人机集群编队拦截区域进行分析，要实现对无人机突防边界的有效覆盖，并行相切式排布需要耗时 120s，当选择分散对称分布式时，需要耗时 $t=105.2632s$ 。对比可知，分散对称式排布能实现更大的拦截效果。最后，根据两者之间的几何关系求解得出：红方的每架运载机在初始时刻发射第一波次无人机后，朝着 EF 方向进行机动，在与 GH 距离 $\frac{11.9}{2}$ km 时发射第二波次的无人机，此时第一、二波次无人机集群的中心位置和红方运载机在同一直线上，且这条直线与 CD 平行，从而实现最优的拦截效果。

针对问题四，分别构建拦截效果等效模型、目标分配模型确定红方无人机编队的最优策略和蓝方无人机的最优策略。在问题三基础上，将问题四的求解等效为五架无人机共计 10 个编队与 3 架无人机的目标分配过程。首先分析了红方无人机编队针对蓝方无人机的拦截方案，建立了拦截目标分配网络。在双方的突防和拦截过程中，双方的态势在不断变化，目标分配网络根据各无人机态势的变化在不断地重新规划着拦截方案。为了实现拦截区域最大化，采用了分散对称式排布阵型。最后，给出了红方第二波次无人机编队的发射时机。在问题四的求解过程中，建立以有效拦截或成功突防为目标的威胁因子，构建威胁评估模型，基于纳什均衡的博弈论理论，求解确定红方无人机编队的目标分配。纳什均衡理论的应用，充分考虑了红蓝双方的动态博弈性；此外，威胁因子模型的构建为目标分配提供了依据，使得目标分配结果更具客观性。

目 录

目 录	3
一、问题重述	4
1.1 研究背景	4
1.2 已知信息	4
1.3 问题描述	5
二、模型假设	8
三、符号说明	9
四、问题分析	10
五、模型的建立与求解	12
5.1 问题一模型建立与求解	12
5.1.1 问题一模型构建	12
5.1.2 问题一模型求解	15
5.1.3 问题一结果分析	20
5.2 问题二模型建立与求解	21
5.2.1 问题二模型构建	21
5.2.2 问题二模型求解	25
5.2.3 问题二结果分析	26
5.3 问题三模型建立与求解	27
5.3.1 问题三模型构建	27
5.3.2 问题三模型求解	30
5.3.3 问题三结果分析	30
5.4 问题四模型建立与求解	31
5.4.1 问题四模型构建	31
5.4.2 问题四模型求解	32
5.4.3 问题四结果分析	34
六、参考文献	36
附录	38

一、问题重述

1.1 研究背景

随着人工智能技术和航空装备的发展，无人机正朝着智能化、集群化发展。以集群协同作战^{[1][2][3]}为代表的作战形态开启了无人化、集群化战场的大门。相比单架无人机，无人机集群可以遂行多样化军事任务，具备强大的战场生存力、环境适应力、毁伤自修复能力，并且具有鲁棒性强、去中心化、自主协同等特点。尤其是集群“化整为零”以及集群协作的效益倍增特性受到广泛关注。在未来战争中具备情报优势、速度优势、协同优势、数量优势以及成本优势。多架无人机通过协同侦察、协同探测、协同跟踪、协同攻击、协同拦截等，可以互相协作共同完成较为复杂的作战任务。此外，无人机在多场局部战争中大量使用，展现出不可或缺的独特优势，已经逐渐成为各国新型作战力量建设的重点。美国国防高级研究计划局（DARPA）早在 2000 年就曾对无人机集群协同作战进行了仿真研究。2019 年胡塞武装采用无人机集群协同作战，成功使沙特炼油厂瘫痪^[4]。这一成功案例再一次引发各军事强国对无人机集群的关注，集群协同作战作为一种新的作战形态正成为战争形态演变的重要推手。

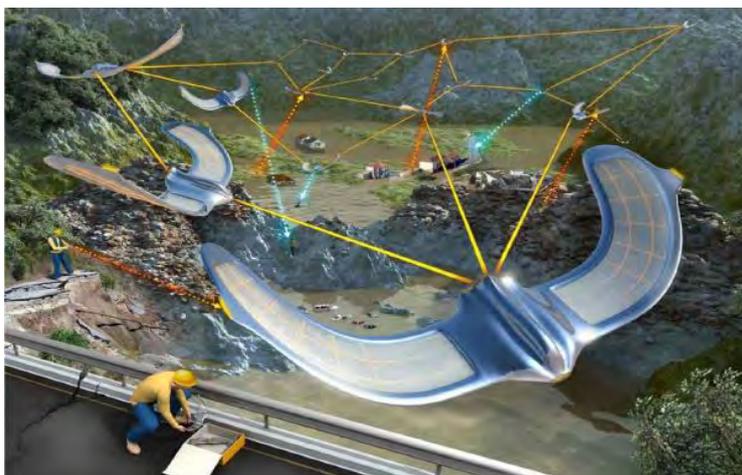


图 1 多无人机协同作战

1.2 已知信息

无人机集群协同作战可以分为目标搜索、机动决策和机动拦截^{[5][6][7]}三个阶段。目标搜索是机动拦截的前提，机动决策是机动拦截的关键，无人机集群在飞行过程中主要通过机载设备以及数据链等实时获取敌我双方的相对位置，并实时判断双方距离是否满足拦截距离。当蓝方判断出红方有拦截的可能时，应立即进行机动决策，机动规避至红方无人机集群的有效拦截区域之外。通常情况下，在距离红方无人机集群较远，有充足的机动规避时间规避红方拦截。而当距离无人机集群较近时，则蓝方需要以无人机的最大转弯半径机动至红方无人机集群的拦截距离之外；而红方无人机集群和蓝方接近到一定程度时，无论蓝方采取何种机动，都无法规避过红方的拦截，造成蓝方的突防失败。

本文以平面区域的无人机集群对抗问题进行研究。对抗区域如图 2 所示矩形区域 $ABCD$ ，攻击纵深为 $L=50\text{km}$ 。红方的无人机集群由运载机携至攻击位置，然后组成无人机编队对蓝方实施拦截。红方运载机与所属的无人机集群中至少一架无人机的距离不超过 10km ，与任何一架无人机距离需大于 100m ，同时，与蓝方的突防无人机距离需大于 5km 。

红方运载机的速度为 $V_{\text{红}} = 300\text{m/s}$ ，转弯半径^[8]不小于 1000m 。为了满足无人机编队之间的控制、通信以及防碰撞控制的需要，编队内任意两架无人机的间距需大于 30m ，并且每一架无人机与集群中至少两架无人机的距离不超过 200m 。红蓝对抗过程中，已知蓝方限制在攻击通道内对红方实施突防行动，成功突防的条件是需要在 360s 内越过边界 CD ，并且在突防过程中需要机动规避红方的拦截行动。当蓝方突防的无人机与红方至少 2 架无人机的距离均小于 $R=300\text{m}$ 时，则认为红方成功对蓝方实施了拦截。其中，蓝方无人机的速度为 $V_E = 250\text{m/s}$ ，最小转弯半径为 $R_E = 500\text{m}$ ；红方无人机的速度为 $V_p = 200\text{m/s}$ ，最小转弯半径为 $R_p = 350\text{m}$ ；红蓝双方无人机的速度保持不变，运动的方向可根据机动策略的需要随时改变，但受转弯半径的限制。红蓝双方的位置信息均可以通过机载设备和数据链等实时获取。此外，红蓝双方对抗过程中，红方无人机集群编队可以根据需要动态调整。

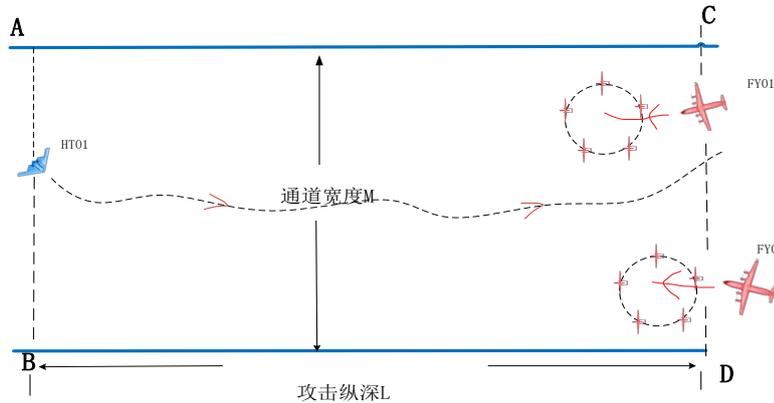


图 2 红蓝双方对抗示意图

1.3 问题描述

问题一：为了对蓝方的突防飞机实施拦截，红方无人机集群在 CD 边上以 $G1$ 和 $G2$ 分别为圆心布势，编队的圆周半径为 100m ，其中， $G1$ 到边界 AD 的距离 $DG1$ 为 20km ，两个圆心之间的距离为 30km ， $G2$ 到边界 BC 的距离为 20km 。红蓝双方对抗过程中均采用恒定速度飞行。分析当红方无论采取何种策略进行拦截，蓝方均能成功突防的起始位置区域。任务背景如图 3 所示。研究分析在该起始位置区域中，蓝方无人机的最优突防策略。

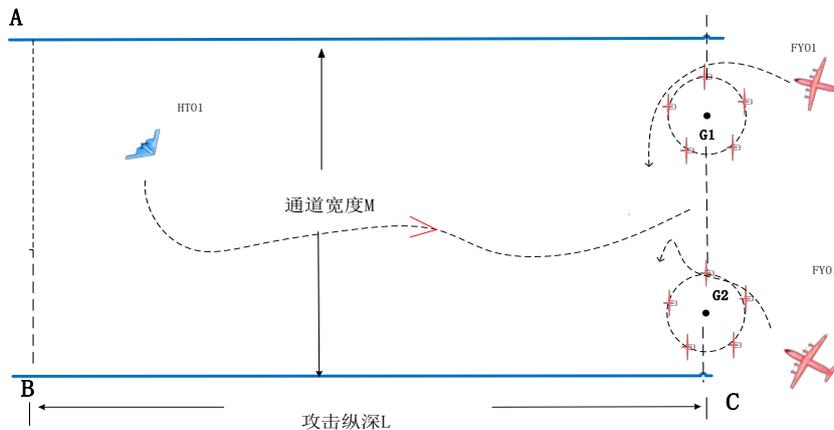


图 3 红方无人机集群初始中心位置示意图

问题二：当红方两个无人机集群的初始位置在边界 BD 上，但是集群中心 $G1$ 和 $G2$ 的相对位置未知，编队的圆周半径为 100m ，蓝方的初始位置位于 AB 中心点。在突防通道^[9]的约束下，是否存在一个通道带宽 M 的下限 M_{\min} ，使得当突防通道的带宽大于通道带宽下限时，蓝方无人机均能够实现突防，对红方无人机集群的拦截完成规避，求解此任务背景下的蓝方无人机的最短突防策略。任务背景如图 4 所示。

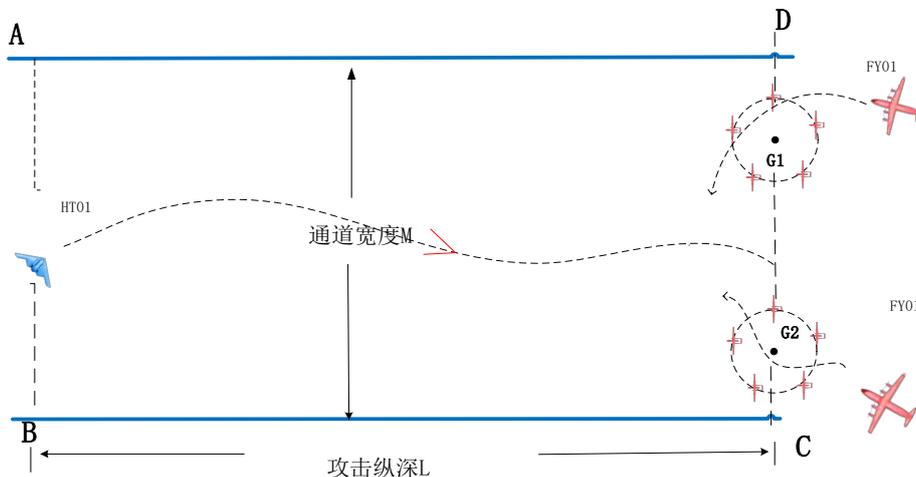


图 4 红蓝双方无人机对抗初始位置示意图

问题三：当红方的每架运载机各携带 10 架无人机分两个波次发射，组成无人机集群遂行拦截任务，每波次发射的无人机不少于 3 架。每波次发射的无人机初始队形均为圆形编队，编队中心距离红方运载机的距离为 2km ，随着战场态势变化，编队构形在满足距离约束的情况下动态调整。对抗伊始，蓝方无人机位于边界 AB 的中心，通道带宽 $M = 70\text{km}$ ；红方两架运载机分别位于边界 CD 上 $G1$ 点和 $G2$ 点，并开始发射第一波次的无人机集群，运载机与集群的编队中心初始位置未知。第二次发射无人机时，需满足运载机与第一波次发射的无人机距离约束。任务背景如图 5 所示。建模分析红方两架运载机两个波次发射的无人机数量、每架运载机第二波次发射的时刻和位置以及第二波次发射的无人机集群的中心位置，以实现最优的拦截效果；进一步讨论分析突防通道带宽 M 的上限 M_{\max} 的存在性，当实际通道带宽 M 小于 M_{\max} 时，无论蓝方无人机采用何种突防策略，红方无人机集群均存在相应的拦截策略，在区域 $ABCD$ 内成功阻止蓝方无人机的突防。

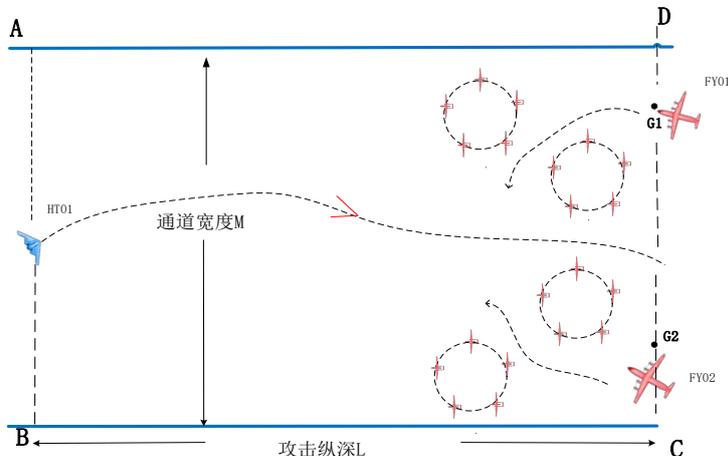


图 5 红方运载机发射两个波次无人机集群拦截示意图

问题四：假设蓝方无人机的突防通道带宽 $M = 100\text{km}$ ，蓝方 3 架突防无人机组成突防集群从矩形边界 AB 一侧开始突防（任 2 架突防无人机的间距需大于 30m ），当红方的 5 架运载机各携带 10 架无人机分两个波次发射，组成无人机集群从边界 CD 一侧同时开始遂行协同拦截任务，每波次发射的无人机不少于 3 架。每架运载机第一波次发射无人机的时刻为初始对抗时刻，与所属无人机集群几何构型圆周中心的距离为 2km 。任务背景如图 6 所示。红方运载机初始位置、红方运载机发射的第一个波次的无人机集群中心位置、红方运载机发射第二波次无人机集群的时刻和位置、第二波次发射的无人机集群中心位置、两个波次无人机数量以及蓝方突防无人机初始位置根据需要确定。蓝方希望尽可能多的无人机突防成功，红方则希望成功拦截尽可能多的蓝方无人机。试讨论红方最优拦截策略和蓝方最优突防策略。

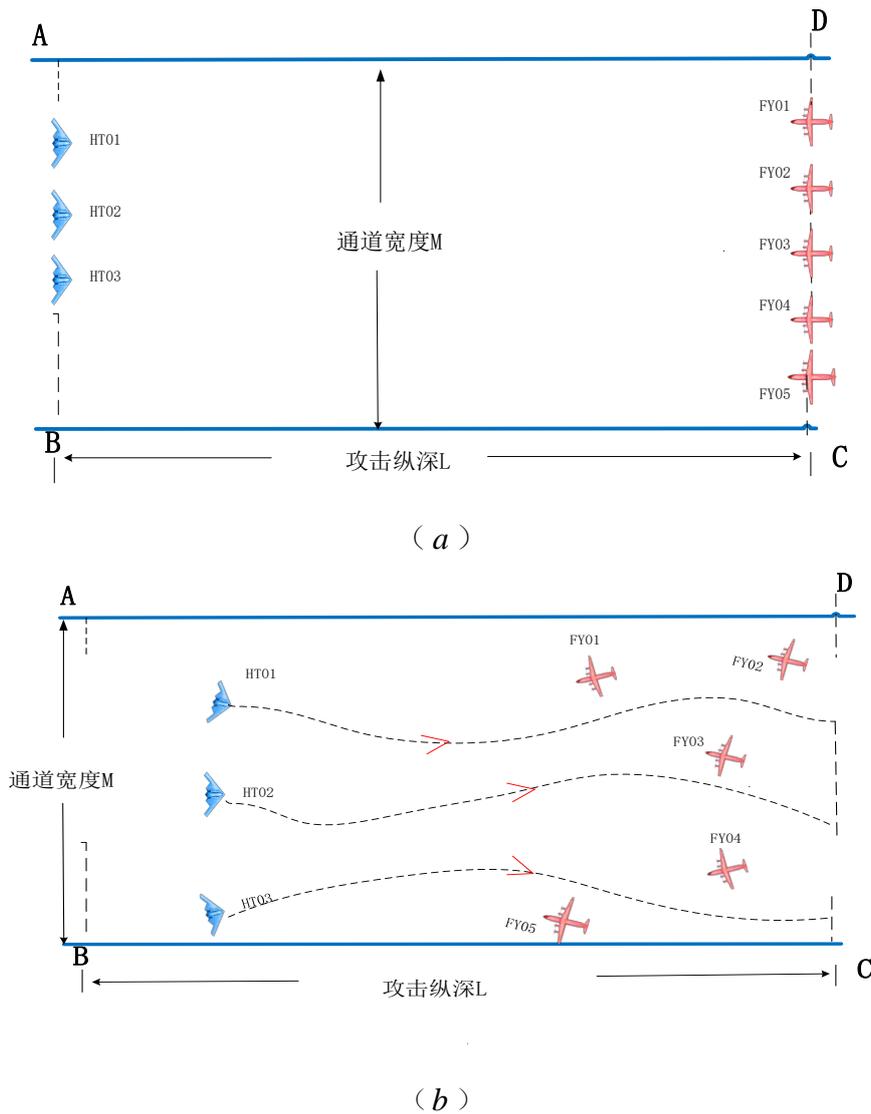


图 6 红方 5 架运载机携带无人机拦截蓝方 3 架无人机对抗示意图

二、模型假设

1. 假设红蓝双方在同一高度飞行，红方无人机与蓝方无人机的遭遇情况，拦截区域为红方无人机质心为圆心，半径为 $R=300\text{m}$ 的圆形区域；
2. 假设为了成功突防，当红方无人机与蓝方无人机对抗突防时，蓝方无人机在水平面内采取直观高效的最小转弯机动进行机动规避（左转或右转）；
3. 假设无人机集群之间无通信延迟；
4. 假设运载机发射后可瞬间完成无人机集群编队；
5. 假设红蓝双方无人机的速度保持不变，运动的方向可根据机动策略的需要随时改变，但受转弯半径的限制；
6. 假设红蓝双方对抗过程中，不会出现无人机故障，各机载设备能精确感知相互之间的位置信息。

三、符号说明

符号	符号说明
L	攻击纵深
M	突防通道带宽
V_E	蓝方无人机速度
R_E	蓝方无人机的最小转弯半径
V_P	红方无人机速度
R_P	红方无人机的最小转弯半径
$V_{\text{红}}$	红方运载机的速度
M_{min}	突防通道带宽下限
M_{max}	突防通道带宽上限
x_1	红蓝双方的横向相对距离
x_2	红蓝双方的纵向相对距离
x_3	红方拦截时相对于初始状态偏转的角度
a	蓝方无人机的角速度
b	红方无人机编队的角速度
$R_{\text{拦截}}$	红方无人机编队拦截区域的半径
$H(x, p)$	哈密尔顿函数值
d_{CR2}	红方第二个无人机编队与点 C 的距离
d_{DR1}	红方第一个无人机编队与点 D 的距离
$t_{\text{最短}}$	突防所需的最短时间
$t_{\text{蓝调}}$	蓝方飞机调整轨道所需的时间
$t_{\text{红调}}$	红方飞机调整轨道所需的时间
d_{AC}	点 A 与点 C 的距离

四、问题分析

问题一求解红蓝双方对抗过程中，当 2 个无人机集群的圆周中心分别位于 CD 边界的 $G1$ 和 $G2$ ，要求确定无论红方无人机采用何种拦截策略，蓝方无人机总能实现成功突防的初始安全区域，并论证分析无人机相应的最优突防策略。求解蓝方无人机能够实现突防的初始安全位置，首先需要明确蓝方成功突防需要满足的约束条件：

- (1) 蓝方突防无人机在 360 秒内越过边界 CD ；
- (2) 红方无人机最多有一架无人机与蓝方无人机的距离小于 $R = 300\text{m}$ 。

其次，确定无论红方采取何种策略，均能实现突防，也即求解确定蓝方无人机到达红方无人机集群的最近点时，集群编队中有两架无人机与蓝方无人机之间的距离恰好等于 $R = 300\text{m}$ 。此时，蓝方无人机恰巧通过边界 CD ，并且由初始位置到边界 CD 上突防位置的时间小于 360 秒。

此外，集群编队中两架无人机与蓝方无人机的距离恰好等于 300m 。满足这一条件的红方无人机有两种机动策略，一种策略是任一无人机集群编队中的两架无人机距离蓝方无人机的距离等于 300m ，另外一种策略是两个无人机集群中各有一架无人机距离蓝方无人机的距离等于 300m 。问题一的求解需要同时针对上述两种不同情况进行分析，最终确定满足条件的蓝方无人机的初始安全位置。在此基础上，讨论分析在初始安全区域内的蓝方无人机最优突防策略。

问题二在对抗伊始时，蓝方位于边界 AB 的中心点，红方两个无人机集群的圆周中心位于 CD 边界上但未确定具体位置，确定蓝方突防通道的下限，使得当通道宽度比通道下限大时，蓝方无人机一定能突破红方无人机集群的拦截。蓝方无人机突破红方的拦截条件同问题一描述。由题意可知，蓝方的成功突防受突防通道的影响较大。

在假设红方位置相对固定的情况下，蓝方的突防通道越宽，则红方无人机拦截成功的几率越小；当蓝方的突防通道的在一定范围内相对越窄，则红方无人机实施拦截的成功率越大。题目中要求蓝方无人机一定能突破红方无人机集群的拦截，即在红方拦截成功率最大的情况下对蓝方无人机进行拦截，蓝方无人机依旧可以成功突防，此时的通道宽度即为所求突防通道带宽的下限。

因此，求解问题二的关键在于确定何种情况下红方的拦截成功率最大，也就是说两个红方无人机集群如何确定初始的编队中心位置使得红方的拦截成功率最大。与此同时，红方无人机集群也应充分考虑同一编队 and 不同编队的两架无人机满足拦截条件的任务情景。在具体的求解过程中，编队构形以及红蓝双方的机动策略都需要详细论证。

问题三中的每架红方运载机可分两个批次共发射 10 架无人机，组成两个无人机集群遂行拦截任务，运载机与圆形无人机集群编队中心的距离为 2km ，对抗伊始，蓝方无人机位于边界 AB 的中心，红方运载机的初始位置位于边界 CD 上 $G1$ 点和 $G2$ 点，并且开始发射第一波次的无人机集群。问题三要求在编队距离、编队无人机数目、以及运载机的初始位置等的约束下，求解确定红方实现最优拦截效果时两个批次无人机的数量、第二次发射无人机的时刻以及位置，以及无人机集群的中心位置。并且要求求解确定蓝方无人机突防通道的上限，使得通道宽度小于带宽上限时，无论蓝方采取何种突防策略，红方无人机均能实现拦截，阻止蓝方无人机的突防。

首先问题三的求解需要对两个波次的无人机数量进行求解、并且确定第二批次发射无人机的时间、位置和以及无人机集群的中心位置，使得拦截效果最优。因此，问题可以转化为三个部分：一是两个批次无人机数量合理分配使得拦截效果最优；两个批次无人机发射间隔时间优化使得拦截效果最优；两个批次无人机集群位置协同使得拦截效果最优。当三部分均为最优时，红方无人机集群可以实现对蓝方无人机的最优拦截。

其次，问题三要求确定蓝方的突防通道上限使得蓝方无论采取何种策略，红方无人机集群均存在相应的拦截策略。由于蓝方无人机无论采取何种措施红方无人机均能成功拦截，因此，该问题的求解关键在于如何使得蓝方无人机的突防策略使得蓝方成功突防的概率最大。

综上，问题三的求解需要分别确定两个波次无人机的数目分配、发射时间协同和发射位置协同以及求解确定蓝方的最优突防策略。

问题四由题意可知，在突防通道带宽为100km，3架蓝方无人机从边界AB一侧开始突防，三架蓝方无人机的为初始位置未知，5架红方运载机各携带10架无人机从CD一侧开始拦截。每架运载机可以分两波次发射无人机，然后分别组成无人机集群。求解确定红方运载机初始位置、红方运载机发射的第一个波次的无人机集群中心位置、红方运载机发射第二波次无人机集群的时刻和位置、第二波次发射的无人机集群中心位置、两个波次无人机数量以及蓝方突防无人机初始位置根据需要确定。讨论确定红方最优拦截策略和蓝方最优突防策略。

分析可知，求解确定红方的最优策略就是确定红方运载机发射无人机的针对蓝方无人机的目标分配^{[10][11][12]}过程，其次需要确定红方各运载机的时间和位置协同问题、以及红方运载机不同波次之间的时间和位置协同问题；最后求解蓝方无人机的初始位置，使得蓝方无人机的突防策略最优。

在红蓝双方对抗过程中，蓝方希望尽可能多的无人机突防成功，红方则希望成功拦截尽可能多的蓝方无人机。红蓝双方的对抗过程实际上是红蓝双方博弈的过程，求解确定红方最优拦截策略和蓝方的最优突防策略实际上是一个纳什均衡^{[13][14][15]}问题。当红蓝双方满足纳什均衡时，此时两者的策略均最优。

五、模型的建立与求解

5.1 问题一模型建立与求解

5.1.1 问题一模型构建

近年来,为了对系统安全进行分析研究,可达集^{[16][17]}作为一种新的数值分析方法被广泛应用于飞行安全分析。可达集确定系统安全状态的方法是将安全状态的范围看作由水平集函数描述的状态轨迹的集合,然后转化为求解哈密顿-雅克比方程^[18]的终值问题,用水平集计算可达集的方法称为可达集方法。利用可达集方法作为分析系统特性和验证系统功能的有效工具,已经在工程领域取得了广泛地应用。根据目标集的状态和输入控制所得的反向可达集,能够有效地对飞行系统的安全性进行验证。从目标集出发考虑的可达集方法为系统的控制的研究提供了很好的思路,它能够很清晰的将系统状态所处的安全状态范围进行展示,从而提供简单的方法判断系统的可靠性。目标集一般选择安全的、可控的状态集合,它是一个最优的状态集合。

反向可达集^{[19][20]}指可以到达目标集的状态的集合,满足反向可达集要求的状态存在某个或者某些输入可以在给定时间范围内使之到达目标集。反向可达集又可以被视为状态可救的包线,这是因为在系统遇到损伤或者扰动时,如果状态偏移至反向可达集包含的范围内时,系统状态可以通过正确控制回到目标集状态。

问题一需要确定红方无人机无论采取何种策略,蓝方无人机总能实现成功突防的初始位置区域。分析可知,初始安全位置的边界条件为:当蓝方无人机恰巧通过边界 CD ,红方无人机集群编队中有两架无人机与蓝方无人机之间的距离恰好等于 $R = 300\text{m}$,并且由初始位置到边界 CD 上突防位置的时间小于 360s 。经计算推导,直接求解确定安全区域计算量大,且需分情况论述,模型求解复杂。因此,本文将初始安全位置的求解换为对红方拦截区域的求解。红方未能实现拦截的区域即为所求蓝方的初始安全区域。已知红方无人机集群中心的初始位置分别位于 CD 边界上 G_1 和 G_2 ,且满足 $DG_1 = 20\text{km}$, $G_1G_2 = 30\text{km}$ 。红方无人机能实施有效拦截的条件是编队内至少有两架无人机与蓝方无人机的距离小于 300m 。在红方无人机集群的目标状态已知的情况下,反向求解满足反向可达集要求的状态使得在给定时间约束条件下,系统到达目标状态集,从而红方无人机成功拦截蓝方无人机。因此,确定蓝方的无人机初始安全位置可以转化为关于红方无人机成功拦截状态的反向可达集求解。

为了对蓝方成功拦截,红方应该采取其最优拦截策略,此时求解的蓝方初始安全区域才能保证无论红方采取何种拦截策略,蓝方无人机在 360s 均能成功突防。因此,问题一的求解需要分析讨论红方的最优拦截策略。由于红方无人机的速度小于蓝方无人机的速度,所以红方无人机主要通过数量上的优势部分弥补性能上的劣势,以提高己方的对抗效果。其次,由题意可知,红方的编队可以随时间动态调整。红方无人机集群可以通过动态调整无人机的编队构形使得红方无人机的拦截包络最大化。不规则形状的无人机编队难以满足无人机机间通信、控制等的距离约束,因此,红方无人机编队应选择规则形状的编队构形。

(1) 编队构形^{[21][22][23]}选择

无人机编队构形主要有均匀分布的圆形编队、规则的楔形编队和梯形编队。如图7所示。

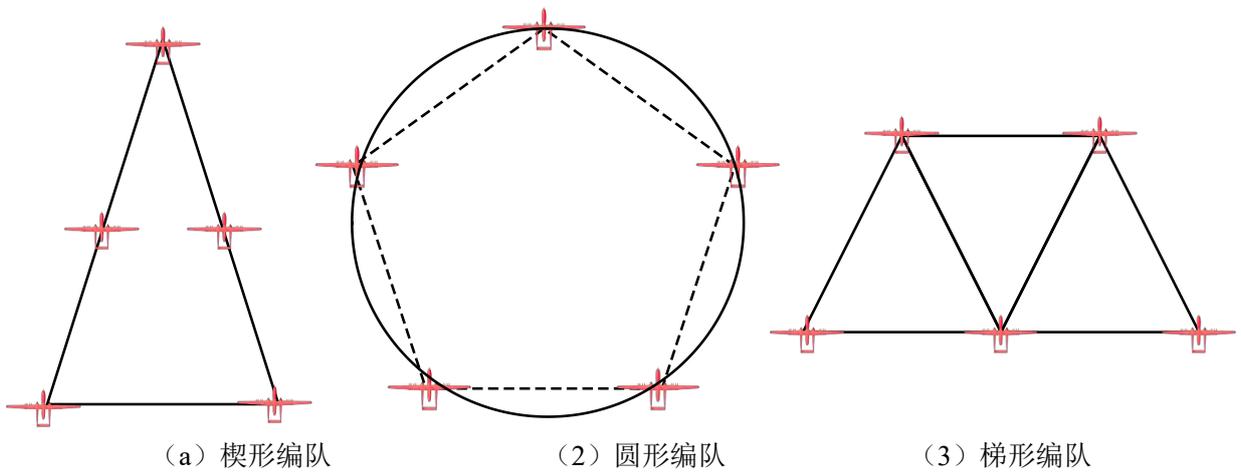


图 7 无人机编队构形

当无人机编队构形选择均匀分布分圆形编队时，如图 8 所示，要使得编队的拦截包络最大，则编队中每架无人机与其距离最近的无人机距离应保持在 200m，也即 $U_a U_b = 200\text{m}$ ，由于 5 架无人机均匀分布于圆周上，则 $\angle U_a O_1 O' = 2\pi/10 = \frac{\pi}{5}$ ，红方编队无人机拦截蓝方无人机的临界距离为 $U_a T = U_b T = 300\text{m}$ ，根据三角关系可以确定存在以下关系如式 (1)、(2)：

$$O_1 O' = \frac{U_a O'}{\tan(\pi/5)} = 137.64\text{m} \quad (1)$$

$$O' T = \sqrt{U_a T^2 - U_a O'^2} = \sqrt{300^2 - 100^2} = 282.84\text{m} \quad (2)$$

因此，外接圆半径 $O_1 T$ 为

$$O_1 T = O' T + O' O_1 = 282.84 + 137.64 = 420.48\text{m} \quad (3)$$

根据式 (1) 可知红方无人机编队的最大拦截包络为以每架无人机为圆心，以 $r = 300\text{m}$ 为半径的圆的交集。记以 U_a 和 U_b 为圆心，半径 $r = 300\text{m}$ 的圆的交集为 S_1 。圆形编队的半径为 170.13m。

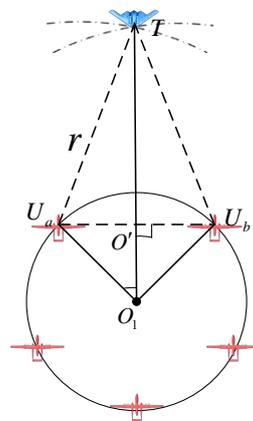


图 8 红蓝双方无人机对抗临界示意图

当无人机编队构形选择楔形编队时，要使得编队的拦截包络最大，则编队中每架无人

机与其距离最近的无人机距离应保持在 200 m，也即 $U_a U_b = 200\text{m}$ ，如图 9 所示。

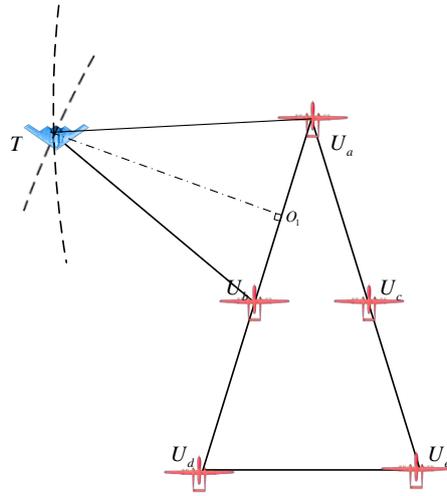


图 9 楔形编队红蓝双方对抗临界示意图

根据红蓝双方的无人机几何关系，可知，当蓝方的无人机与两架红方无人机都相距 300 m 时，即 $TU_a = TU_b = 300\text{m}$ ，在由蓝方无人机 T 、红方无人机 U_a 和红方无人机 U_b 构成的等腰三角形中， $U_a O_1 = U_b O_1 = 100\text{m}$ ，因此，蓝方无人机和编队的边界 $U_a U_b$ 的距离为

$$TO_1 = \sqrt{TU_b^2 - U_b O_1^2} = \sqrt{300^2 - 100^2} = 282.84\text{m} \quad (4)$$

当无人机编队构形为 5 架无人机组成的梯形时，要使得编队的拦截包络最大，则编队中每架无人机与其距离最近的无人机距离应保持在 200 m，梯形各边的距离满足公式 (5)，编队构形如图 10 所示。

$$U_a U_b = U_a U_c = U_c U_d = U_d U_e = U_b U_e = 200\text{m} \quad (5)$$

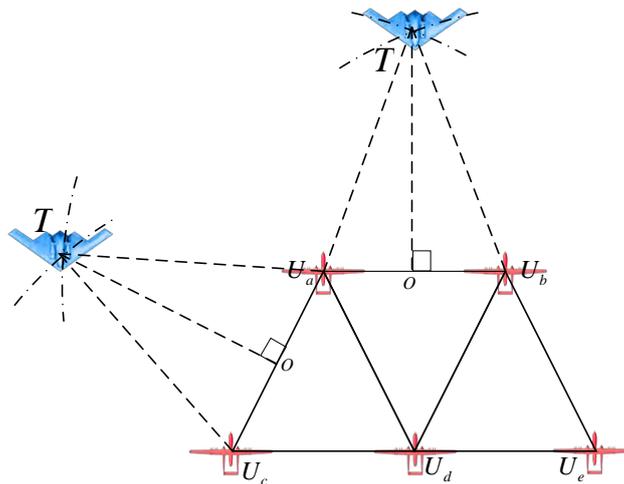


图 10 梯形编队红蓝双方对抗临界示意图

根据无人机编队的几何关系可以确定蓝方无人机距离编队中两架红方无人机连线 $U_a U_b$ 的距离为 282.84 m。

比较分析可知，红方无人机集群单一编队的最优拦截策略应选择均匀分布的圆形编队，才能使得编队的拦截包络线最大。

(2) 编队拦截策略

红方无人机集群成功拦截有两种机动策略：一种策略是任一无人机集群编队中的两架无人机距离蓝方无人机的距离等于 300m，另外一种策略是两个无人机集群中各有一架无人机距离蓝方无人机的距离等于 300m。

在（1）中着重不同编队构形的两架无人机进行有效拦截进行了研究，求解确定均匀分布的圆形编队具有最大的拦截包络。本小节着重对不同编队各有一架无人机对蓝方无人机构成拦截条件进行分析。同一编队的两架无人机实施拦截的示意图如图 8 所示，不同编队中各一架无人机构成拦截条件的示意图如图 11 所示：

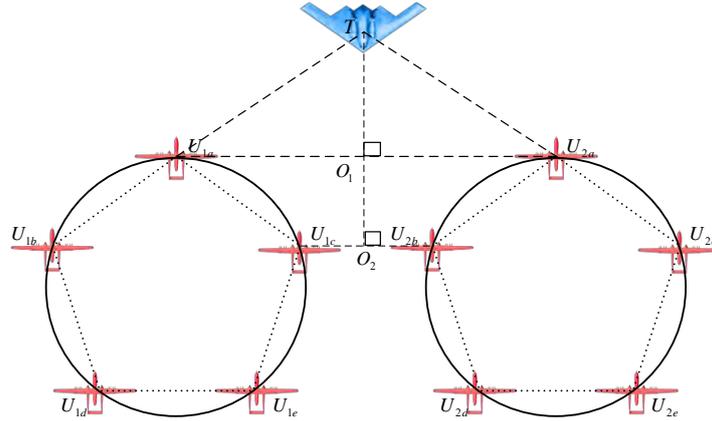


图 11 不同编队构成拦截条件的示意图

不同编队的无人机构成拦截条件时，编队 1 和编队 2 中距离最近的两架无人机的距离应满足距离大于等于 30m 的条件，假设此时编队 1 中的 U_{1a} 和 U_{2a} 两架无人机构成拦截条件，满足 $TU_{1a} = TU_{2a} = 300\text{m}$ 。分别以 U_{1a} 和 U_{2a} 为位置为圆心，以 $r = 300\text{m}$ 为半径作圆，则两个圆的交集为红方集群的拦截有效区域，记为 S_2 。

比较策略 1 中红方无人机拦截的有效区域 S_1 和策略 2 中红方无人机拦截的有效区域 S_2 ，可知， $S_2 \subset S_1$ ，因此，求解红方无人机的有效拦截区域，仅考虑策略 1 的情形。

综上所述，红方无人机集群编队的最优拦截策略是两个编队分别采用均匀分布的圆形编队构形，此时红方的有效拦截包络最大。

为了对红方的有效拦截区域进行求解，采用上述可达集理论，利用反向可达集求解方法对问题进行求解。

5.1.2 问题一模型求解

分析可知，红方的有效拦截区域等效于单一编队有效拦截区域的并集。因此，以单一编队无人机拦截区域为例进行求解。无人机集群编队红蓝双方的对抗过程示意图如图 12 所示。由于红方无人机圆形编队的半径为 170.13m，假设当红方的无人机编队与蓝方无人机的距离远大于无人机圆形编队的半径时，无人机的圆形编队可以近似为一质点。此时，红方无人机编队不需要外出拦截，只需在边界 CD 上对蓝方的无人机位置进行实时监测，在达到临界距离时，红方无人机根据蓝方无人机的突防方向动态调整航向，对蓝方无人机实施拦截。因此，只有当蓝方无人机与红方无人机编队的距离较近时，才具体分析编队内各无人机对蓝方无人机的拦截作用。

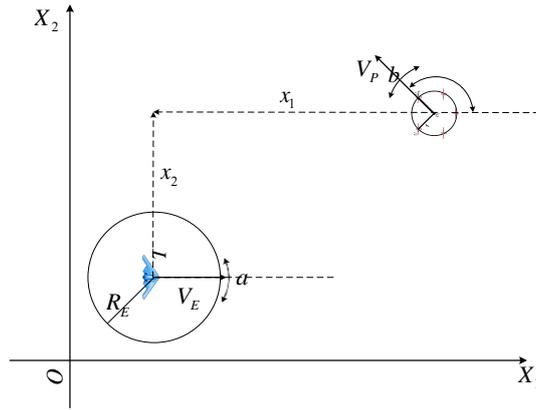


图 12 红蓝双方无人机对抗过程示意图

假设红蓝双方无人机在同一高度飞行，两者的变化量是平面内的位置参数和航向；由题意可知，红蓝双方无人机的速度恒定，保持定速飞行，但是无人机的角速度是可以动态调整的，但是受到最小转弯半径的限制。红蓝双方对抗过程中，红方的目的是通过编队协同对来袭的蓝方无人机进行拦截；蓝方的目的是在规定时间内完成突防任务，并且保证不被红方飞机的拦截。红方编队无人机对蓝方拦截的定义是红方无人机编队中有至少两架无人机与蓝方无人机的距离小于等于 300 m，由于红方无人机可以简化为一质点，因此实施拦截的条件是指红蓝双方无人机的质心距离小于 300 m，因此，红方能对蓝方实施拦截的依据仅仅由红蓝双方无人机的直线距离决定。

根据问题分析，以红蓝双方无人机作为系统研究对象，建立系统的动力学模型如式 (6)：

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_E + V_P \cos x_3 + ax_2 \\ V_P \sin x_3 - ax_1 \\ b - a \end{bmatrix} = f(x, a, b) \quad (6)$$

其中， x_1 为红蓝双方的横向相对距离， x_2 为两者的纵向相对距离， x_3 为红方拦截时相对于初始状态偏转的角度，也即此时的临界角状态。 V_E 为蓝方无人机的速度，它是一个标量，并且速度保持恒定； V_P 为红方无人机编队的速度，同样为标量。式中的 a 为蓝方无人机的角速度， $a \leq \frac{V_a}{r_a}$ 是该系统的控制输入量，其作用是机动规避红方拦截，成功实现突防； b 是

红方无人机编队的角速度， $b \leq \frac{V_b}{r_b}$ 也是该系统的控制输入量，其作用是发挥最大的机动能力对蓝方无人机实施拦截，迫使蓝方任务失败。

由题目可知， $V_E = 250\text{m/s} > 0$ ， $V_P = 200\text{m/s} > 0$ ， $a \in [-a_{\max}, a_{\max}]$ ， $a_{\max} > 0$ ， $b \in [-b_{\max}, b_{\max}]$ ， $b_{\max} > 0$ 。可以看出蓝方无人机在机动速度上具有优势，红方的机动速度相对较小，因此红方主要依靠多无人机的协同，通过数量上的优势弥补机动性能上的劣势，以提高红方对蓝方无人机的拦截概率。

基于可达集方法，红方无人机能够进行有效拦截的目标集应该为状态量 (x_1, x_2, x_3) 组成的一个区域。通过控制输入变量 a ，使得蓝方无人机可以机动规避，实现对红方的成功突防，并且不受红方无人机编队的拦截。而 b 则使红方无人机的航向是发挥己方无人机的最大性能，使得状态变量进入目标集。

利用微分方程，对可达集进行求解的流程图如图 13 所示：

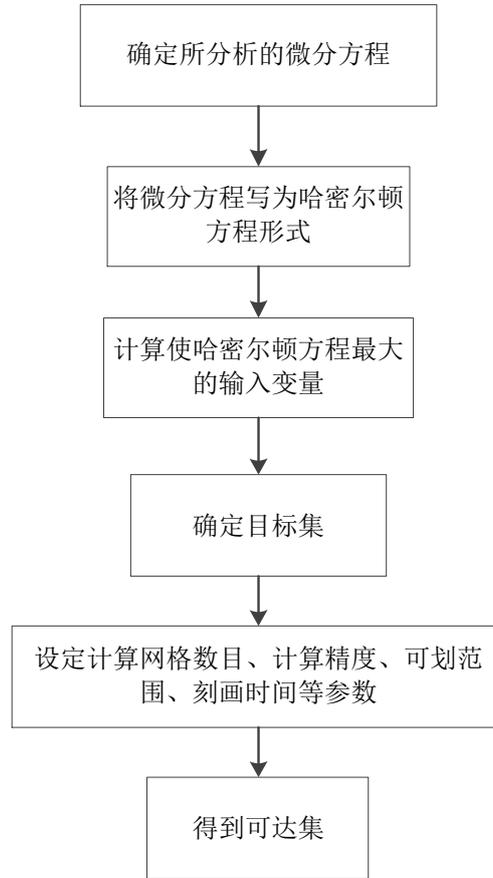


图 13 可达集计算流程图

具体的解算流程如下：

(1) 确定待分析的微分方程，一般情况下，改为分方程描述的是一个自治的动力学系统；

(2) 根据状态量的性质以及输入控制的作用确定代求解的哈密顿方程；

(3) 求解最优的控制输入使得哈密顿的方程得到最大值；

(4) 根据题目已知约束条件，确定红方拦截区域的目标集范围，合理确定仿真步长，计算网格数目、计算精度、以及刻画的时间变量等参数，最终求解确定所需的红方无人机实施有效拦截的可达集结果。

基于可达集方法，对红方无人机编队的有效拦截区域进行求解，详细的计算过程如下所示：

(1) 首先将红蓝双方的无人机看作一个动力学系统，该系统的动力学状态方程可以分解为形式 (7)：

$$f(x, a, b) = f^x(x) + F^a(x)a + F^b(x)b \quad (7)$$

根据上述分解形式对系统的动力学状态方程进行分解，可得 (8)：

$$f^x(x) = \begin{bmatrix} -V_E + V_P \cos x_3 \\ V_P \sin x_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F^E(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad F^P(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

为了使哈密顿方程满足 (9) 式的条件

$$H(x, p) = \max_{a \in [-a_{\max}, a_{\max}]} \min_{b \in [-b_{\max}, b_{\max}]} p^T \cdot f(x, a, b) \quad (9)$$

为了实现对控制变量的最优取值，最优值 a^* ， b^* 的取值方法可以依据以下法则进行判断：

$$a_i^*(x, p) = \begin{cases} -a_{\max}, \sum_{j=1}^n p_j F_{ji}^a(x) \leq 0 \\ a_{\max}, \sum_{j=1}^n p_j F_{ji}^a(x) > 0 \end{cases}$$

$$b_i^*(x, p) = \begin{cases} -b_{\max}, \sum_{j=1}^n p_j F_{ji}^b(x) \leq 0 \\ b_{\max}, \sum_{j=1}^n p_j F_{ji}^b(x) > 0 \end{cases} \quad (10)$$

根据上述的运算法则，求解计算可以得到 (11)：

$$a^*(x, p) = a_{\max} \text{sign}(p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3)$$

$$b^*(x, p) = -b_{\max} \text{sign}(p_3) \quad (11)$$

因此，可以得到该系统动力学模型的哈密顿方程如式 (12)：

$$H(x, p) = -p_1 V_E + p_1 V_p \cos x_3 + p_2 V_p \sin x_3 + a_{\max} |p_1 x_2 - p_2 x_1 - p_3| - b_{\max} |p_3| \quad (12)$$

综上，对上述的哈密顿方程进行计算，即可求得红方无人机编队对蓝方无人机实施有效拦截的可达集，其可达集表示为。

根据上述分析可知，红方两个无人机编队可以简化为对称的两个无人机编队分别计算可达集，最后再对所有可达集求并集，该并集就是红方无人机编队能够成功拦截的可达集。根据题意，设无人机编队的初始位置为 $DG1=CG2=20\text{km}$ ，两个无人机编队中心相距 $G1G1=30\text{km}$ ，在此基础上，由 5.1.2 节分析可知，无人机编队初始位置的有效拦截区域为 $G1$ 为圆心，以 $R_{\text{拦截}} = 420.48\text{m}$ 为半径的圆形区域，应用可达集理论对系统仿真分析，不同时刻的仿真结果如下图所示。图 14 为 $t = 72\text{s}$ 时的可达集仿真图。

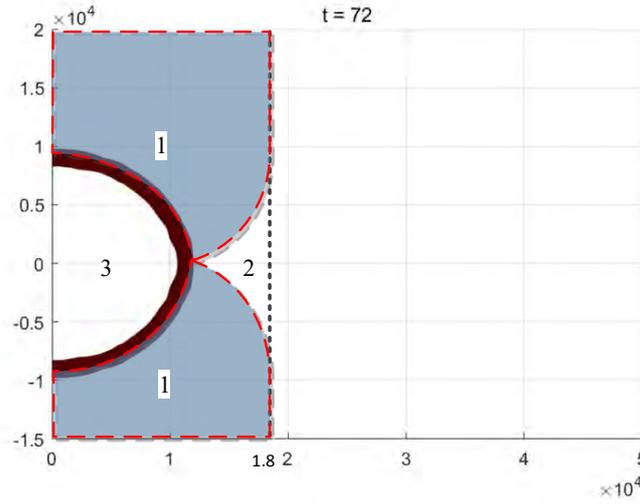


图 14 $t = 72\text{s}$ 时的可达集仿真图

其中，灰色区域表示当前时刻蓝方无人机能够成功突防的状态集合，棕色条带表示为当前时刻的状态可达集，其含义是在可达集范围内的任一状态都能够某一控制输入的调节下在给定的时间范围内到达目标集内，也即红方无人机在初始状态下，通过对系统航向角的控制，在给定的时间步长内到达对目标实施有效拦截的状态区域。

在图 14 中曲线包围的区域 3 表示的是红方无人机编队对突防的蓝方无人机进行有效拦截的状态可达集，其含义是用公式表示为 (13)：

$$R(t, K) = \{x \in R^n \mid \exists u \in U_{[t, T]}, \exists \tau \in [t, T], \phi(\tau, t, x, u(\cdot)) \in K\} \quad (13)$$

其中 K 表示的是求解的目标集，存在控制输入使得在某一时间范围内，状态能够到达目标集。

求解确定红方无人机编队的有效拦截区域后，可以确定当前时刻蓝方成功突防的初始状态集合。以 $t = 72s$ 时刻的系统状态为例进行分析，此时蓝方能够成功突防的最大区域为以 $V_E = 250m/s$ 为速度，时间 $t = 72s$ 的计算的矩形区域，矩形的长为 $1.8km$ ，宽为 $35km$ 。由于初始位置在区域 2 内的蓝方无人机成功突防的最短距离为 $L_{min} = 250 \times 72 = 18000m$ ，受转弯半径、通道宽度等的限制，处于该区域的无人机无法在 $72s$ 内成功突防。因此，蓝方能够成功突防的区域为蓝方最大的可能状态集与红方无人机拦截区域的状态集之差，用灰色表示成功突防区域 1。

同理，仿真分析可得不同时刻蓝方能够成功突防的区域。图 15 为 $t = 113.1429s$ 时的可达集仿真图；图 16 为 $t = 114s$ 的可达集仿真图。将不同时刻能够成功突防的区域的并集即为所求的蓝方能够成功突防的初始状态集。如图 17 所示。

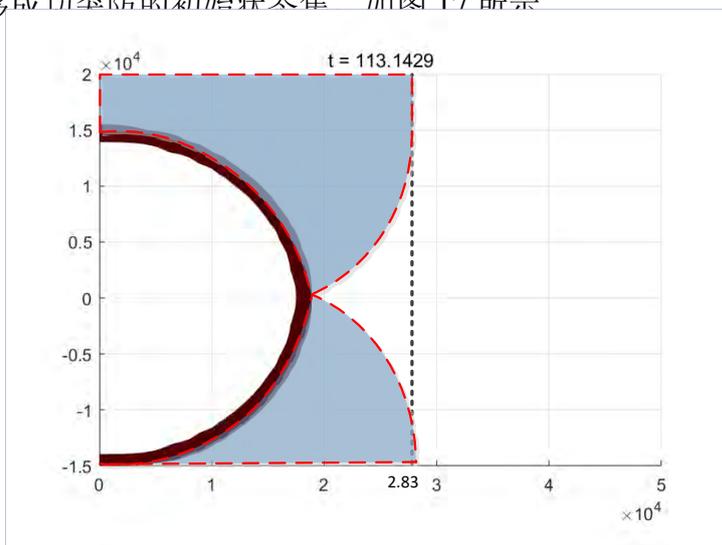


图 15 $t = 113.1429s$ 时的可达集仿真图

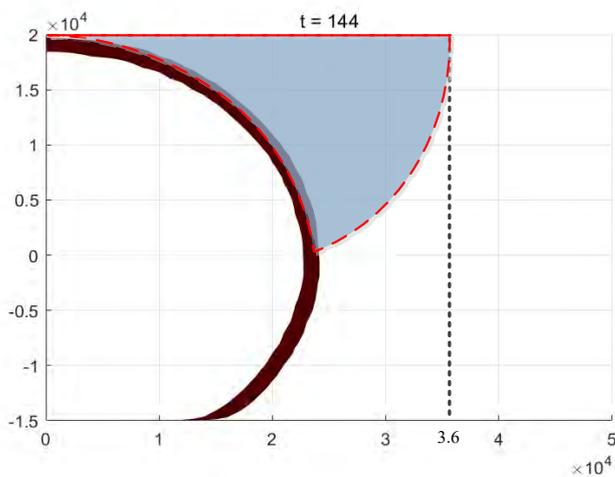


图 16 $t = 114s$ 的可达集仿真图

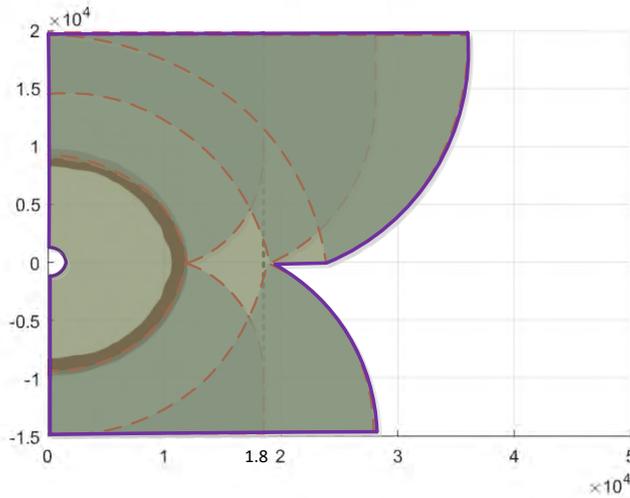


图 17 蓝方无人机成功突防单个无人机编队拦截的初始状态集

对蓝方无人机成功突防两个红方无人机编队拦截的初始状态集求并集，即为求解的蓝方无人机能够成功突防的初始状态集合，如图 18 所示，在该区域内，无论红方无人机采取何种机动策略，都无法对蓝方无人机成功实施拦截。

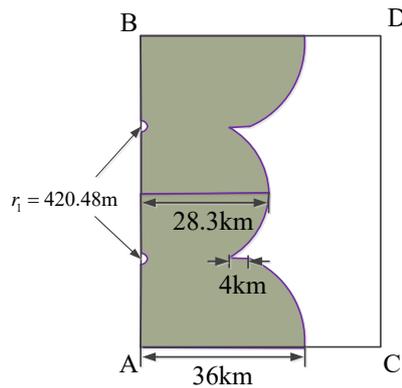


图 18 蓝方无人机成功突防的初始状态集

5.1.3 问题一结果分析

根据 5.1.1 节和 5.1.2 节分析结果可得蓝方无人机能够成功突防的初始状态集为图 18 所示。上述分析可知，无人机的相对速度、无人机的机动能力以及有效拦截距离是影响蓝方成功突防的关键影响因素。由于无人机的速度恒定，因此，在设计蓝方成功突防策略时应主要考虑对无人机航向角的控制。

蓝方无人机过早、过晚或者机动失误都容易造成突防任务的失败。因此，成功突防不仅与机动的时机有关，而且与蓝方无人机采取的机动有关。当蓝方无人机与红方的无人机距离较远时，由于红方无人机的机动能力较弱，蓝方不必采取较大的机动；当蓝方无人机与红方的无人机距离较近时，则应根据所处的位置，动态调整飞行航向，选择机动规避的机动方式。

根据红蓝双方无人机的机动能力、红方无人机的有效拦截距离等因素，设定蓝方无人机的逃逸距离和最小逃逸距离，用以蓝方无人机机动决策，选择机动规避的时间和方式。

因此，根据分析结果，将无人机的航向作为成功突防的一个控制量，提出基于成功突防的初始状态集的无人机成功突防策略，具体的突防策略如图 19 所示：

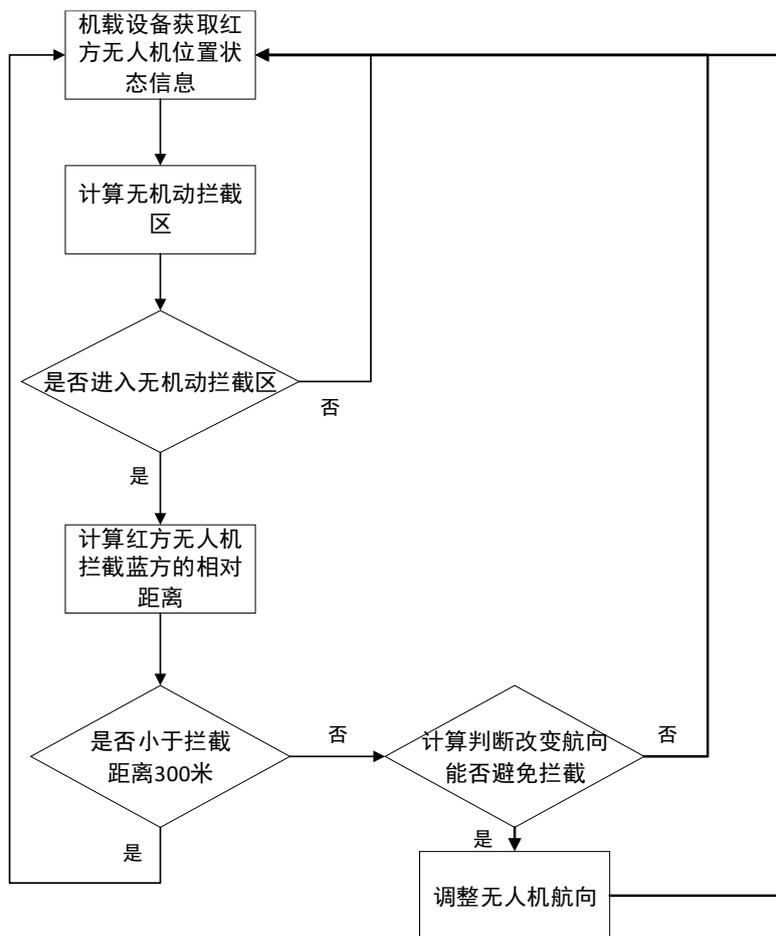


图 19 蓝方无人机成功突防的策略图

问题一针对任意初始位置的蓝方无人机，分析了求解了蓝方无人机能够成功突防的初始状态集。通过理论分析和计算，确定了编队构形和红方编队拦截策略对红方拦截区域的影响，证明了圆形编队有效拦截面积的最大性，并且单个无人机编队的拦截区域之并集大于两个编队协同拦截的拦截区域。此外，本节创新性的提出了可达集理论。并且将红蓝双方的对抗问题等效为一个系统控制问题，根据可达集的求解方法最终确定蓝方能够成功突防的初始状态集。采用可达集理论对问题一进行求解，简化了问题求解思路，并且不用拘泥于红蓝双方的动态对抗过程，使得问题便于求解。虽然在求解过程，做了近似处理，但是求解结果在接受范围内，达到了预期目的。

5.2 问题二模型建立与求解

5.2.1 问题二模型构建

根据上述问题分析可知，问题二需要求解确定蓝方无人机的突防通道的下限，此时红方无人机集群在边界 CD 上的初始位置未确定的情形下，对突防的蓝方无人机进行拦截。即在红方拦截成功率最大的情况下对蓝方无人机进行拦截，蓝方无人机依旧可以成功突防，此时的通道宽度即为所求突防通道带宽的下限。

问题二的求解和问题一的求解类似，区别在于问题一是蓝方无人机的初始位置未知，求解蓝方的初始位置，而问题二是在蓝方无人机初始位置确定的情况下，红方无人机编队的初始位置，求解确定蓝方无人机能够成功突防的突防通道带宽下限。因此，问题二仍旧选择问题一中所建立的拦截模型。考虑到红方两个无人机编队的初始位置可选在 CD 边上的任意位置，首先本文讨论红方两个无人机编队选在何位置时能达到最大拦截成功率。由问题一的分析可知，问题一求解的是蓝方无人机与红方无人机集群编队的相对距离，建立绝对坐标系，问题一中的纵向相对距离 x_2 在绝对坐标系中距离为 y ，当纵向拦截范围在 y 轴上的投影能将整个 CD 覆盖时，蓝方飞机无论采取何种突防策略都无法突破红方无人机的拦截。

由问题一的分析 and 计算可知，红方无人机的拦截范围在 y 轴上的投影是关于红方无人机的初始位置对称的。因此，要获得最大拦截成功率，即在最短的时间内使得拦截范围在 y 轴上的投影覆盖整个 CD 边。对于红方无人机初始位置的选择可分为三种情形讨论：

情形 1: $d_{DR1} > \frac{M}{4}, d_{CR2} > \frac{M}{4}$;

情形 2: $d_{DR1} < \frac{M}{4}, d_{CR2} \geq \frac{M}{4}$ 或 $d_{DR1} \geq \frac{M}{4}, d_{CR2} < \frac{M}{4}$;

情形 3: $d_{DR1} = \frac{M}{4}, d_{CR2} = \frac{M}{4}$ 。

当红方无人机的初始位置处于情形 1 时，在 CD 边未被完全覆盖之前，两个无人机拦截范围有交集，各无人机编队的拦截区域不会超出 C 点或 D 点。如图 20 所示，蓝色区域为两个红方无人机编队的拦截范围，红色区域为两个范围的交集。由图可知，这种情形会造成拦截效果的降低，不能达到最大拦截成功率。

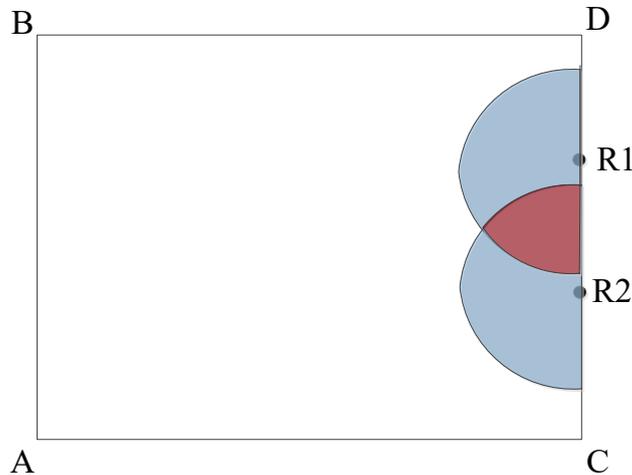


图 20 情形 1 的拦截范围示意图

当红方无人机的初始位置处于情形 2 时，在 CD 边未被完全覆盖之前，两个无人机拦截范围无交集，但无人机编队的拦截区域会超出 C 点或 D 点。以 $d_{DR1} \geq \frac{M}{4}, d_{CR2} < \frac{M}{4}$ 的情形为例，如图 21 所示，蓝色区域为两个红方无人机编队的拦截范围。由图可知，这种情形会造成拦截效果的降低，不能达到最大拦截成功率。

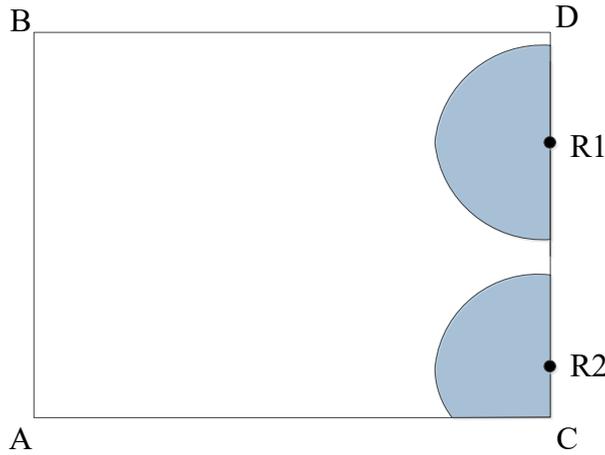


图 21 情形 2 的拦截范围示意图

对于情形 3: 在 CD 边未被完全覆盖之前, 两个无人机拦截范围无交集, 且各无人机编队的拦截区域不会超出 C 点或 D 点。如图 22 所示, 蓝色区域为两个红方无人机编队的拦截范围。由图可知, 这种情形的拦截效果最好, 能达到最大拦截成功率。

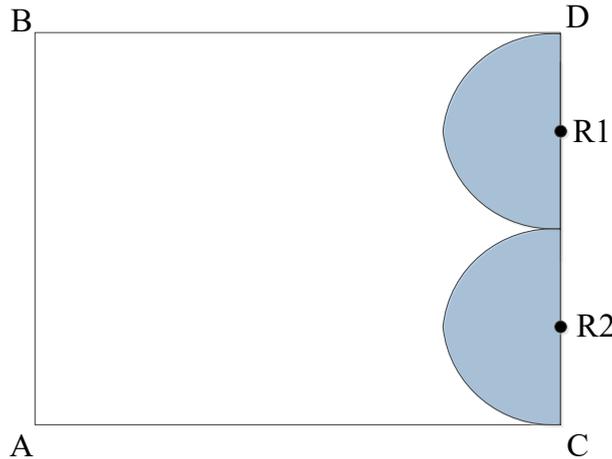


图 22 情形 3 的拦截范围示意图

因此, 为达到最大的拦截成功率, 本文选择情形 3 中的位置 ($d_{DR1} = \frac{M}{4}, d_{CR2} = \frac{M}{4}$) 作为两个红方无人机编队的初始位置。

由于蓝方无人机的初始位置确定在 AB 的中点, 且飞行速度大小不变, 故其突防的时间存在下限:

$$t_{\text{突防}} \geq \frac{d_{AC}}{V_b} = \frac{50000}{250} = 200\text{s} \quad (14)$$

由题意可知, 双方无人机均装载有探测装置和数据链, 能够准确探测对方无人机和己方无人机的实时位置。蓝方无人机若从 AB 的中点沿直线从 CD 的中点突防, 记 AB 中点为 E , CD 中点为 F , 则红方无人机能在时间 $t_{\text{红调}}$ 内调整轨道至 FE , 时间 $t_{\text{红调}}$ 与蓝方无人机的初始航向角有关, 以最短时间调整飞行轨道的过程可由图 23 表示。

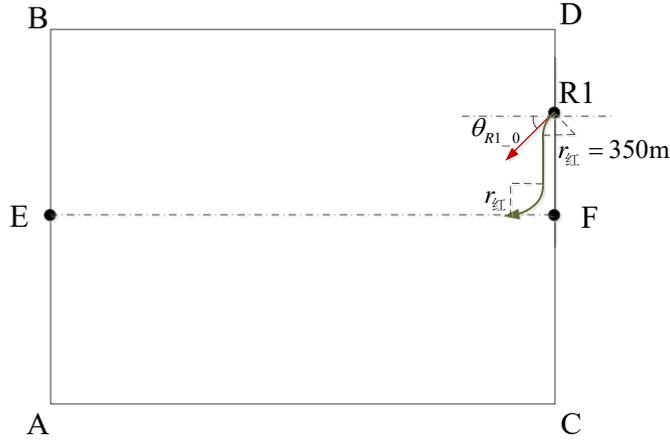


图 23 红方无人机以最短时间调整飞行轨道示意图

图 23 中，红色箭头表示红方无人机编队 1 的初始航向角，红方无人机首先以最小转弯半径 $R_p = 350\text{m}$ 转弯使其速度与 CD 平行，沿直线飞行至与 EF 距离 $R_p = 350\text{m}$ 处，再以最小转弯半径 $R_p = 350\text{m}$ 转弯使其速度与 EF 平行。从开始调整飞行轨道至调整结束所用时间为：

$$\begin{aligned}
 t_{\text{红调}} &= \frac{2\pi R_p}{4 \times 200} \frac{\frac{\pi}{2} - \theta_{R1_0}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{d_{R1F} - R_p \cos \theta_{R1_0} - R_p}{200} + \frac{2\pi R_p}{4 \times 200} \\
 &= -\frac{7}{4} \cos \theta_{R1_0} - \frac{7\theta_{R1_0}}{4} + \frac{7\pi}{4} - \frac{7}{4} + \frac{d_{R1F}}{200}
 \end{aligned} \tag{15}$$

考虑到实际，这里 $0 \leq \theta_{R1_0} \leq \frac{\pi}{2}$ 。由问题一的分析可知，当 $d_{R1F} \leq 15000\text{m}$ 红方无人机从 E 点出发不可能实现突防，所以 d_{R1F} 应大于 15000m ，当 $d_{R1F} = 15000\text{m}$ 时， $t_{\text{红调}} = 76\text{s}$ ，故 $t_{\text{红调}}$ 可被估计为：

$$76 \leq 1 + \frac{d_{R1F}}{200} \leq t_{\text{红调}} \leq 2 + \frac{d_{R1F}}{200} \tag{16}$$

显然这一时间远小于 200s ，因此蓝方应采取其他突防策略。

要实现最大的拦截效果，红方无人机应使其与蓝方无人机的距离在 y 轴方向的投影尽可能小。取极限情况进行分析，不妨假设某一时刻红方无人机编队的中心与蓝方无人机的连线位于 GH 上（ G 为 BE 的中点， H 为 DF 的中点），蓝方无人机的航向角为 0° 。蓝方无人机首先以最小转弯半径 $R_E = 500\text{m}$ 向 BD 侧转弯使其速度与 CD 平行，沿直线飞行至与 BD 距离 $R_E = 500\text{m}$ 处，再以最小转弯半径 $R_E = 500\text{m}$ 转弯使其速度与 BD 平行。所用时间可表示为：

$$t_{\text{蓝调}} = \frac{2\pi R_E}{2 \times 250} + \frac{d_{BG} - 2R_E}{250} \tag{17}$$

同样地，本文可以得到蓝方 GH 变轨至 BD 的最短时间 72.28s 。蓝方与红方变轨的时间差乘以蓝方的速度是大于认定的拦截距离 $d_{\text{拦截}} = 200\text{m}$ 的。由此可知，综合考虑飞行速度和转弯半径，蓝方无人机能以更快的速度变轨，从而实现突防。

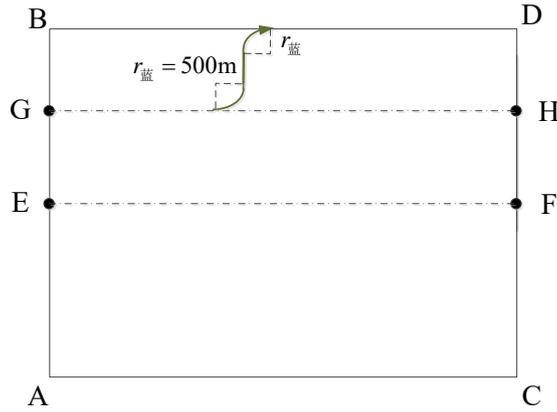


图 24 蓝方无人机以最短时间调整飞行轨道示意图

综合上述分析可知，蓝方采取的时间最短的突防策略为：首先沿 EF 飞行，在距离 F 点 d_1 处开始以最小转弯半径向上转弯 45° ，然后沿着 45° 角斜向上飞行，在距离 GH 为 d_2 处以最小转弯半径向下转弯 90° ，然后沿着 45° 角斜向下飞行，最后在距离 EF 为 d_2 处转弯 45° 后从 F 点处突防。

5.2.2 问题二模型求解

根据 5.2.1 分析确定了蓝方的最优突防策略。为了确定蓝方的无人机的突防通道下限，需要求解 d_1 和 d_2 ，如式 (18)：

$$\begin{cases} d_{FH} = \frac{M}{4} \\ d_1 = 2(d_{FH} - R_E) + R_E \end{cases} \quad (18)$$

$$d_2 = R_E \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (19)$$

其中， R_E 表示为蓝方无人机的最小的转弯半径。

突防所需的最短时间为蓝方无人机沿直线 EF 直接飞至 F 点的时间+机动后相对的时间增量，可表示为：

$$\begin{aligned} t_{\text{最短}} &= t_{EF} + t_{\text{增}} = \frac{d_{EF}}{V_{\text{蓝}}} + \frac{d_{\text{增}}}{V_{\text{蓝}}} \\ &= 200 + \frac{\left[R_E(\pi - 2) + 2(\sqrt{2} - 1)(d_{FH} - R_E) \right]}{250} \\ &= 200 + \frac{\left[R_E(\pi - 2) + 2(\sqrt{2} - 1) \left(\frac{M}{4} - R_E \right) \right]}{250} \end{aligned} \quad (20)$$

利用问题一中所建立的动力学模型，可求解时间 t 内在 x 轴和 y 轴上拦截的最大初始距离，从而可推导出 M 。显然，求解 M 的过程中需要预知 $t_{\text{最短}}$ ，又由式 (20) 可知，求解 $t_{\text{最短}}$ 需要预知 M ，故需要经过迭代运算才能得到结果。以问题 1 中的 $M_0 = 70\text{m}$ 为初始值，增补递增进行迭代计算。至 M 与 $t_{\text{最短}}$ 相互吻合即停止计算，通过迭代计算得到：

$$\begin{cases} M = 80\text{km} \\ t_{\text{最短}} = 267\text{s} \end{cases} \quad (21)$$

将 (21) 代入式 (19) 和式 (20) 可得:

$$\begin{cases} d_1 = 39500\text{m} \\ d_2 = 146.45\text{m} \end{cases} \quad (22)$$

在 $t_{\text{最短}}$ 时间内, 红方无人机编队 1 的拦截区域如图 25 所示, 红色弧形内部为编队 1 的拦截范围, 其在 y 轴上的投影的跨度为 40km , 两个编队协同拦截的范围为 80km 。当实际通道带宽 M 比 80km 大时, 蓝方无人机一定能突破红方无人机集群的拦截。

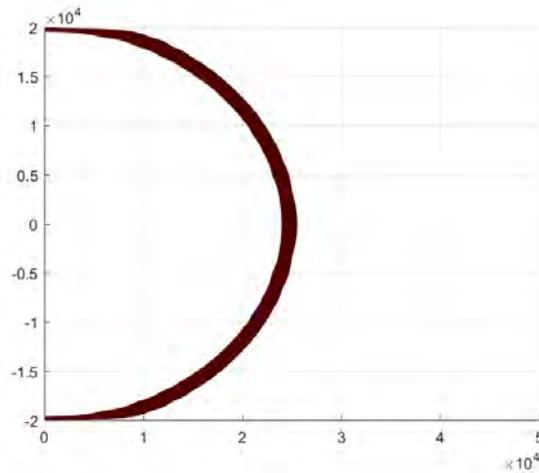


图 25 $t_{\text{最短}}$ 时间内红方无人机编队 1 的拦截区域

蓝方无人机时间最短的突防策略如图 26 所示, 具体突防策略为: 首先沿 EF 飞行, 在距离 F 点 39.5km 处开始以最小转弯半径向上转弯 45° , 然后沿着 45° 角斜向上飞行, 在距离 GH 为 146.45m 处以最小转弯半径向下转弯 90° , 然后沿着 45° 角斜向下飞行, 最后在距离 EF 为 d_2 处转弯 45° 后从 F 点处突防。

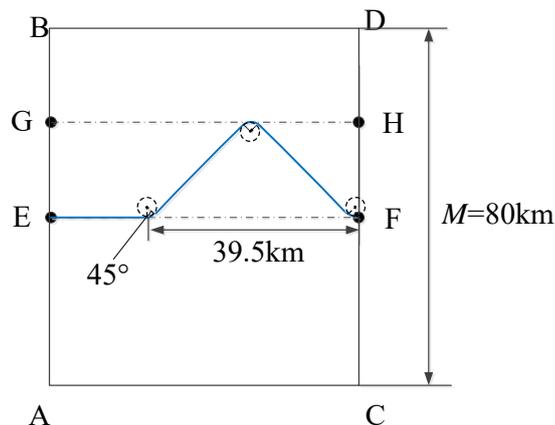


图 26 蓝方无人机时间最短的突防策略

5.2.3 问题二结果分析

由 5.2.1 节的分析可知, 当两个无人机编队的拦截区域无交集, 且各无人机编队的拦

截区域不会超出 C 点或 D 点时，其拦截成功率最大，因此本文选择如图 21（情形 3）中的无人机编队位置作为初始位置。

通过式（15）和式（17）的分析可知，综合考虑飞行速度和最小转弯半径，蓝方无人机相比于红方可实现更快地变轨，因此蓝方无人机可借助这一优势进行突防。但存在一个最小的通道宽度才可成功突防，当通道宽度小于这一宽度时，无论蓝方无人机怎么改变策略，都无法成功突防。依靠红蓝双方无人机的机动能力间的差异，本文能够得出最小通道宽度、突防所需的最短时间以及该情形下的突防策略。

从图 25 中的蓝方突防策略可以看出，蓝方无人机并不是沿着直线飞出突防区域，而是选择向上绕了一下，当蓝方向上飞行时，红方由于速度不及红方，只能以更大的航向偏转角实现对蓝方的跟随，而在蓝方无人机到达 GH 时，其速度突然转为向下，红方无人机因为转弯半径的限制被蓝方无人机甩开，蓝方无人机借此实现突防。

5.3 问题三模型建立与求解

5.3.1 问题三模型构建

根据第四节问题分析可知，问题三可以转化为分别确定两个波次无人机的数目分配、发射时间协同和发射位置协同问题以及求解确定蓝方的最优突防策略。

首先需要对两个波次的无人机数目分配进行求解。

由问题一分析可知，当任意数量的无人飞行编队为正多边形时，所拦截覆盖面积最大。由于无人机可以做圆周运动，实际的拦截覆盖面积可以近似为圆形，如图 5 所示，蓝色圆为近似的覆盖区域。

当红方无人机的数目为 3 时，无人机拦截区域如图 27（a）所示；当红方无人机的数目为 4 时，无人机拦截区域如图 27（b）所示；当红方无人机的数目为 5 时，无人机拦截区域如图 27（c）所示；

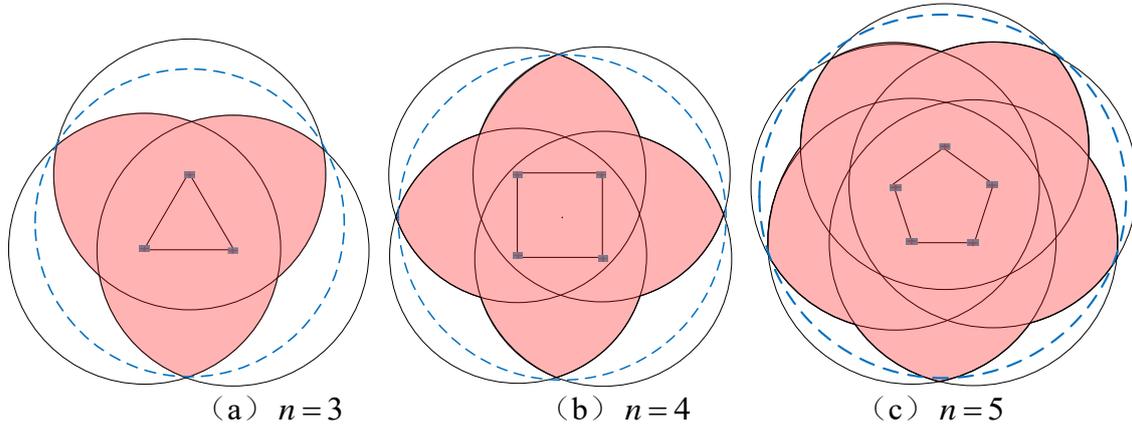


图 27 不同数量无人机的拦截区域示意图

由题意可知，每架红方运载机共携带 10 架无人机，假设无人机第一波次的发射数量为 n ，则另一波次的无人机数量为 $10-n$ ，其中 $n \in A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ 。任意的正多边形的拦截区域半径计算如式（23）：

$$R_{\text{拦截}} = \sqrt{R^2 - r^2} + r \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) + \sqrt{R^2 - r^2} + r \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10-n}\right) \quad (23)$$

要使得拦截区域最大，也即拦截区域的半径最大，因此，当 R 和 r 已知的情况下，（23）式的最大值也即求解式（24）的最大值。

令 $f(n) = r \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) + r \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10-n}\right)$, 则

$$f(n) = r \cdot \left[\cot\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{10-n}\right) \right] \quad (24)$$

因此, 两个波次的无人机数目分配问题转化为使两个编队拦截面积最大的优化问题, 即求解式 (25):

$$\begin{cases} \max f(n) = \max \left\{ r \cdot \left[\cot\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{10-n}\right) \right] \right\} \\ \text{s.t. } n \in A = \{3, 4, 5, 6, 7\} \end{cases} \quad (25)$$

求解上式可知, 当两波次无人机的数目都为 $n=5$ 时, 两个编队形成的有效拦截面积最大。因此, 在编队数目的分配上选择每波次 5 架无人机进行拦截。

其次, 确定红方运载机两个波次的无人机的位置协同和时间协同。

由问题一分析可知, 对单个运载机的无人机集群进行分析, 已经将两架运载机发射无人机的情况包含在内, 因此, 本节继续沿用上述思路, 以单架运载机发射无人机为例进行研究分析。

以红方运载机 1 发射的无人机编队为例, 若两个波次的无人机编队并行相切排布 (如图 28 所示), 在红蓝双方对抗过程中一直保持相切, 则可将其简化为一个编队。由问题 1 可知, 红方每个波次无人机编队的拦截半径为 420.47 m, 当无人机均匀分布于圆形边界上时, 可以在保持编队队形的前提下, 5 架无人机动态调整圆上位置, 此时的无人机拦截区域可以近似为 1 个圆形。故若两圆形编队一直保持相切, 则其拦截半径为: $420.47 \times 2 = 840.94\text{m}$ 。

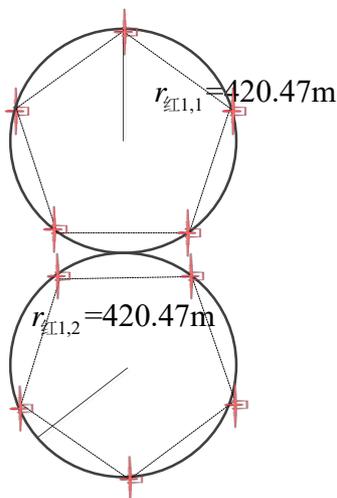


图 28 两个波次无人机编队协同并行相切式排布示意图

由于两个编队中距离最近的无人机之间的距离大于 30 m, 满足编队之间无人机距离约束。这时, 可将区域 $ABCD$ 以中线 EF 为界划分为形状相同的两部分, 为简化计算, 本文只取 EF 以上的部分进行计算, 另一部分同理计算可得。由题可知, CD 总长为 70km, 则 FD 为 35km。采用并行相切式无人机编队的位置协同策略, 以 $G1$ 为原点, CA 为 x 轴, CD 为 y 轴, 以 840.94m 作为拦截半径, 基于可达集理论对其拦截范围进行仿真求解, 经仿真计算可得其拦截范围 (如图 29 所示)。

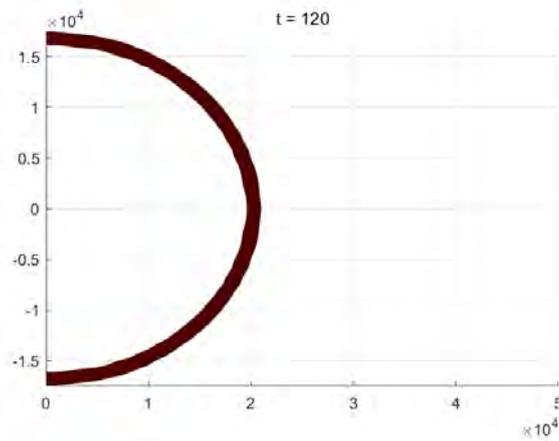


图 29 并行相切式排布的拦截范围仿真图

由图 29 可知，当 $t = 120\text{s}$ 时，并行相切式排布的红方无人机可以实现突防通道 70km 的横向全覆盖。

若两个波次的无人机编队分散排布（如图 30 所示），讨论一种特殊情形：红方运载机 1 发射的两波无人机编队关于 GH 对称（ G 为 BE 中点， H 为 DF 中点），简称分散对称式排布。由问题一可知，红方每个波次无人机编队的拦截半径为 420.47m 。

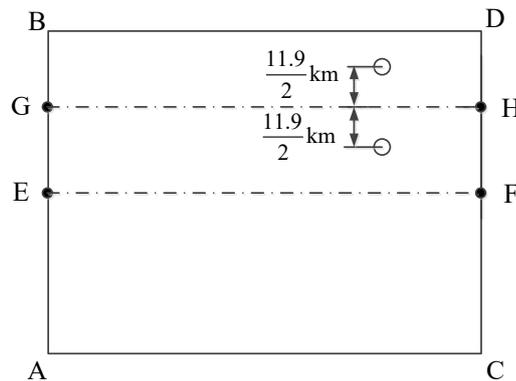
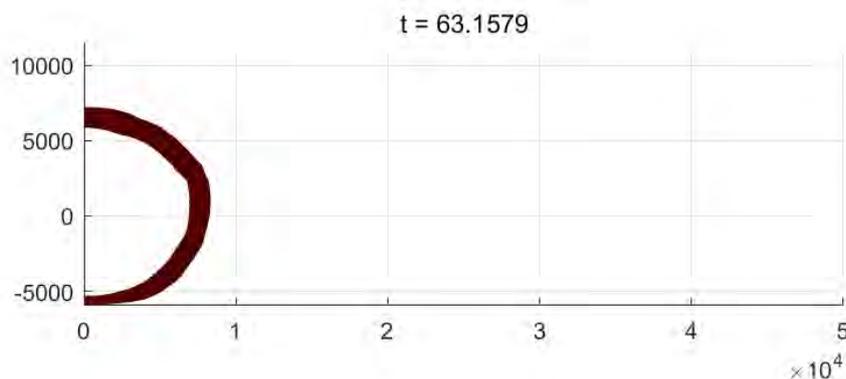


图 30 分散对称式排布

基于可达集方法对采用分散对称式排布的无人机编队进行分析，仿真计算可得其拦截范围（如图 31 所示），当时间 $t = 105.2632\text{s}$ 时，若红方运载机 1 发射的两波无人机采用分散对称式排布，其在 y 轴上的拦截区域为 35km 。



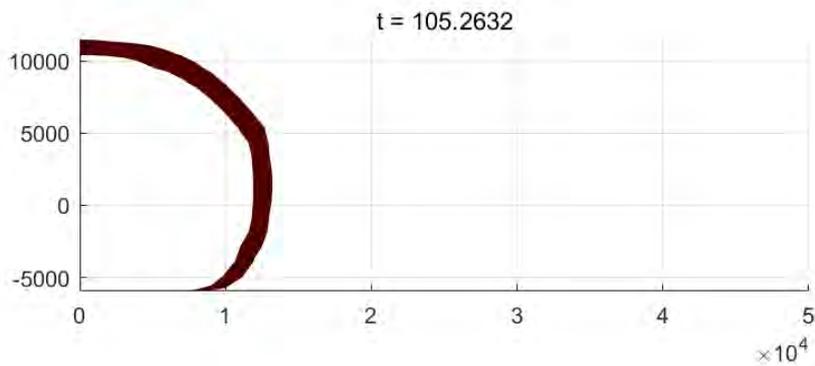


图 31 红方两个波次的无人机分散对称式排布的拦截范围

经比较可知，采用两种不同的位置协同策略拦截 35km 的边界范围时，分散对称式排布的位置协同策略用时 $t = 105.2632\text{s}$ ，小于采用并行相切式排布位置协同策略耗时 $t = 120\text{s}$ 。因此，采用图 31 所示的分散对称式排布，可以实现最优的拦截效果。由题意可知，红方运载机与无人机编队中任意一架无人机的距离不能超过 10km ，因此采用圆形编队飞行时，运载机与无人机编队的中心位置不能超过 $10\text{km} - 0.1\text{km} = 9.9\text{km}$ 。

5.3.2 问题三模型求解

根据 5.3.1 节构建的模型，对问题三进行求解。

首先对于两个波次的无人机数量分配问题，求解得到当两个波次的无人机均配置为 5 架时，形成的拦截面积最大，能够最大限度的实现对蓝方无人机的拦截。

其次，对于两个波次的无人机编队位置协同问题，根据 5.3.1 构建的模型分析可知，红方的每架运载机在初始时刻发射第一波次无人机后，朝着 EF 方向进行机动，在与 GH 距离 $\frac{11.9}{2}\text{km}$ 时发射第二波次的无人机，此时第一波次、第二波次无人机集群的中心位置和红方运载机 1 在同一直线上，且这条直线与 CD 平行（发射示意图如图 32 所示），从而实现最优的拦截效果。

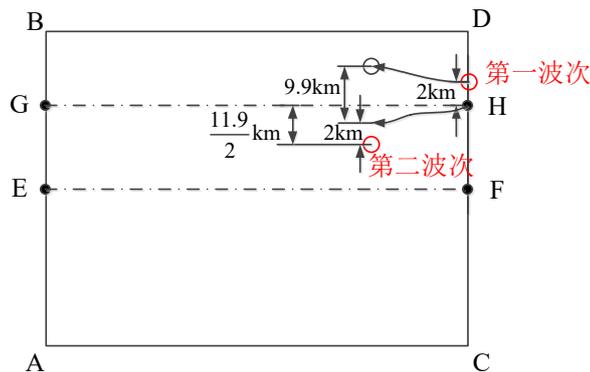


图 32 红方运载机 1 的发射时机与发射位置示意图

5.3.3 问题三结果分析

在图 26 中，本文分析了不同数量组成的无人机编队的最大拦截半径，每波次 5 架无

人机时的有效拦截面积最大，因此本文采用 5 架次飞机编队作为研究对象。

进而本文讨论了每个编队之间距离多大时，可获得最大拦截成功率。在满足运载机与任一架所属无人机的距离不能大于 10km 的约束下，本文选择了如图 29 所示的分散对称式排布阵型。利用这样的排布，能够得到最大的拦截成功率。

在选择红方第二波次无人机编队的发射时机时，应注意运载机与无人机编队中心的位置的最大距离为:10km-无人机排布的圆周半径。由于题中没给出运载机的最小转弯半径值，无法精确求出其机动飞行所耗的时间，因此本文以运载机与 GH 的距离来确定发射时机(如图 31 所示)。

5.4 问题四模型建立与求解

5.4.1 问题四模型构建

在红蓝双方对抗过程中，蓝方希望尽可能多的无人机突防成功，红方则希望成功拦截尽可能多的蓝方无人机。红蓝双方的对抗过程实际上是红蓝双方博弈的过程，求解确定红方最优拦截策略和蓝方的最优突防策略实际上是一个纳什均衡问题。当红蓝双方满足纳什均衡时，此时两者的策略均最优。

故问题转换为求解红蓝双方处于纳什均衡时，红方运载机初始位置、红方运载机发射的第一个波次的无人机集群中心位置、红方运载机发射第二波次无人机集群的时刻和位置、第二波次发射的无人机集群中心位置、两个波次无人机数量以及蓝方突防无人机初始位置。

根据问题三分析可知，红方不同运载机两个波次的拦截效果可以等效为两架相互独立的运载机各有两个编队对蓝方实施拦截。拦截效果等效于两架运载机发射的无人机编队直接对蓝方无人机的拦截。因此在问题四中，可以将问题等效为五架具有一定拦截能力的运载机对三架蓝方无人机之间的对抗过程。求解无人机的数量问题也即求解运载机发射的无人机编队与蓝方无人机之间的目标分配问题。

假设红方运载机对蓝方的突击无人机进行目标分配， $x_{ij} = 1$ 或 0 表示蓝方突击无人机 j 是否分配到红方运载机编队 i ，如表 1 所示。

表 1 目标分配矩阵

红方运载机 蓝方突击无人机	HT01	HT02	HT03
FY01-1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
FY01-2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
FY02-1	x_{31}	x_{32}	x_{33}
FY02-1	x_{41}	x_{42}	x_{43}
FY03-1	x_{51}	x_{52}	x_{53}
FY03-2	x_{61}	x_{62}	x_{63}
FY04-1	x_{71}	x_{72}	x_{73}
FY04-2	x_{81}	x_{82}	x_{83}
FY05-1	x_{91}	x_{92}	x_{93}
FY05-1	x_{01}	x_{02}	x_{03}

本题中红方有 5 架运载机共可发射 10 个波次共 50 架无人机，蓝方有 3 架无人机执行突防任务。为便于叙述，本文记红方由上至下第一架运载机第一个波次的无人机编队为红 1、以后以此类推分别为红 2，红 3……，蓝方突防机由上至下分别为蓝 1，蓝 2，蓝 3。从红方的角度来看，有以下几种目标分配情形：

- (1) 红 1 拦截蓝 1，红 2 拦截蓝 2，红 3-10 拦截蓝 3；
- (2) 红 1 拦截蓝 1，红 2-3 拦截蓝 2，红 4-10 拦截蓝 3；
-
- (3) 红 1-8 拦截蓝 1，红 9 拦截蓝 2，红 10 拦截蓝 3。

上述拦截方案可由如图 33 所示的拦截网络表示。

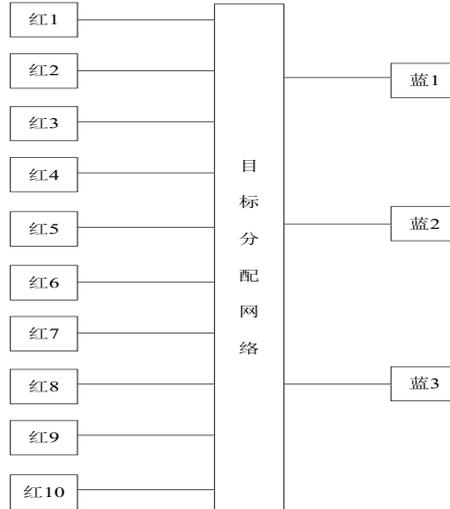


图 33 拦截网络目标分配示意图

5.4.2 问题四模型求解

红方的拦截方案根据蓝方的突防策略实时调整，而蓝方也在根据红方的拦截方案不断地改变突防策略，双方的突防与拦截是一个博弈的过程。双方都在追求自己的最优策略，当对抗的双方满足纳什均衡时，此时的策略对红蓝双方而言均为最优。

进行目标分配之前，要根据红蓝对抗要素衡量敌我双方的威胁指数，得出敌我态势威胁矩阵系数，如式 (26) 所示。主要包括无人机的速度、角度、距离、高度和自身的空战效能，在本文中主要考虑红方无人机编队和蓝方无人机的速度、角度、距离三个因素。具体的态势图见 34 所示。

其中， P_j 为红方运载机编队， P_i 为蓝方突防无人机， v_j 红方运载机的编队速度， v_i 蓝方突防无人机， a_j 为红方运载机编队的航向角， a_i 为蓝方突防无人机的航向角。 rm_i 为蓝方突击无人机最大突防距离， rm_j 为红方运载机最大拦截距离。

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix} \quad (26)$$

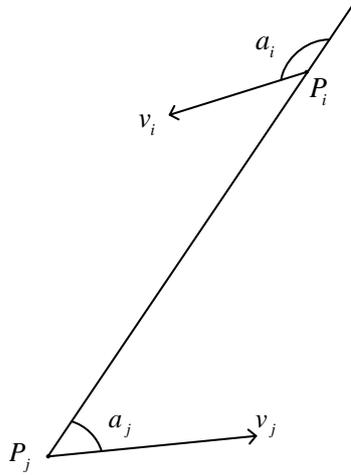


图 34 红方无人机编队和蓝方无人机的对抗态势图

则速度威胁指数为:

$$Tv_i = \begin{cases} 0.1 & v_i < 0.6v_j \\ -0.5 + v_i / v_j & 0.6v_j \leq v_i \leq 1.5v_j \\ 1 & v_i > 1.5v_j \end{cases} \quad (27)$$

距离威胁指数为:

$$Tr_i = \begin{cases} 0.5 & r \leq rm_i, r \leq rm_j \\ 0.5 - 0.2 \times \left(\frac{rm_i}{rm_j} \right) & rm_i < r < rm_j \\ 1 & rm_i > r > rm_j \end{cases} \quad (28)$$

角度威胁指标为:

$$T\partial_i = \frac{\alpha_i + \alpha_j}{2\pi} \quad (29)$$

最终的威胁指标为:

$$c_{ij} = a_1 Tv_i + a_2 Tr_i + a_3 T\partial_i \quad (30)$$

其中, a_1 , a_2 , a_3 由层次分析法进行确定权重。

根据系数矩阵可以直观的反映战场态势情况, 了解到红方突防无人机对于蓝方运载机每一架战机的威胁程度, 为目标分配提供依据。

根据上述的威胁评估得出战场态势的威胁指数矩阵 C 。在红蓝对抗中, 为了提升拦截有效率, 要对威胁指数最大的目标进行优先处理。对于红方运载飞机 i , 在 m 个目标中, 其中 $c_{ij} > c_{i1} > c_{i2} > \dots > c_{ij-1} > c_{ij+1} > \dots > c_{im}$, 首先将第 j 个蓝方突击飞机分配到红方运载机 i 进行拦截, 即首先将矩阵 C 中每一行的最大值选出来, 进行一一配对。这样的基本分配方式可以保证每个蓝方突击飞机都有红方运载机的一个编队进行拦截, 不会漏掉目标, 而且可以更好地完成拦截任务。

此外, AD 和 BC 边缘的区域对于蓝方来说是较容易突防的, 因为这部分区域受到的拦截风险小 (拦截机编队数量相对少), 对于红方来说这部分区域也是相对薄弱的。因此, 红方在对蓝 1 和蓝 3 突防无人机进行拦截时, 会分配更多数量的无人机编队。

对于蓝方而言, 分散的突围方式成功率更高, 因为当队形比较集中进行突围时, 红方可以对拦截无人机编队进行更为突出重点的部署。不妨假设蓝方无人机的初始位置均匀分

布在 AB 上，蓝 1 重点从 D 点附近突围，蓝 2 重点从 CD 的中点附近突围，蓝 3 重点从 C 点附近突围。

对于红方而言，同问题 1 中所述，当各个编队的拦截区域之间不存在交集时，可实现拦截成功率最大化，故红方运载机的初始位置均匀分布在 CD 上，在初始时刻红方运载机在其正前方 2km 处布置第一波次的拦截无人机编队。从问题三中的分析可知，每个波次 5 架无人机的圆形排布可达到最大的拦截半径，因此本题中采用每波次 5 架无人机的圆形排布阵型。

蓝方突防无人机的初始位置、红方运载机初始位置、红方运载机发射的第一个波次的无人机集群中心位置如图 35 所示。

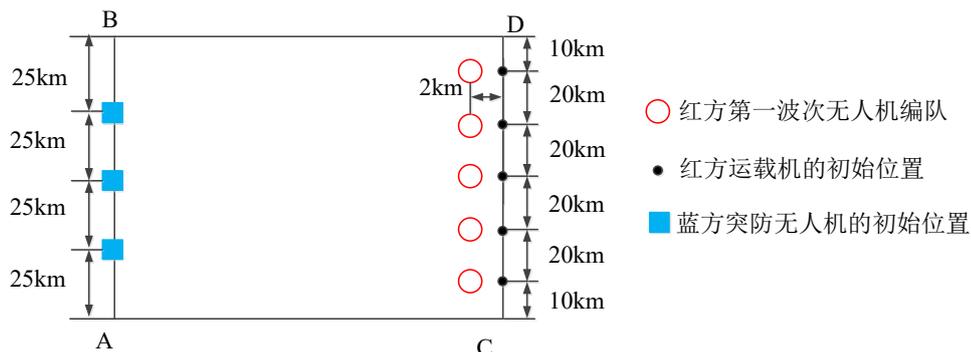


图 35 蓝方突防无人机的初始位置、红方运载机初始位置、红方第一个波次无人机位置示意图

在确定红方运载机发射第二波次无人机集群的时刻和位置、第二波次发射的无人机集群中心位置时，本文选择如图 36 所示的分散对称式排布阵型，以实现拦截区域最大化。

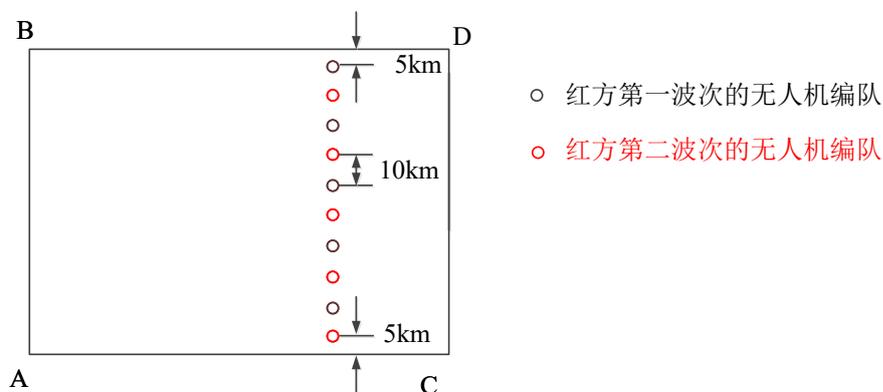


图 36 红方第二波次的无人机编队位置

红方第二波次无人机编队的发射时机为：当运载机处于图 36 中第一波次和第二波次连线的中点时，此时第一架运载机与 BD 的距离为 10km ，第二架运载机与第一架运载机的距离为 20km ，第三架运载机与第二架运载机的距离为 20km ，第四架运载机与第三架运载机的距离为 20km ，第五架运载机与 AC 的距离为 10km 。

5.4.3 问题四结果分析

为确定问题四中红蓝双方各自的最优策略，本节以拦截效果或突防效果为目标构建威胁评估模型，基于纳什均衡思想，构建红方无人机编队与蓝方突防无人机之间的目标分配网络模型。此外，结合编队的约束条件，最终求解确定了红方运载机初始位置、红方运载

机发射的第一个波次的无人机集群中心位置、红方运载机发射第二波次无人机集群的时刻和位置、第二波次发射的无人机集群中心位置、两个波次无人机数量以及蓝方突防无人机初始位置。在问题的求解过程中，本文基于拦截效果等效的方法对问题进行简化，并且创新性地提出威胁评价因子，最终确定 10 个无人机编队对 3 架蓝方无人机的目标分配关系。

六、参考文献

- [1].张阳,司光亚,王艳正.无人集群作战建模与仿真综述[J].电子信息对抗技术,2018,33(03):30-36.
- [2].侯进永,刘传文.无人机集群协同作战发展现状及关键技术分析(英文)[J].现代雷达,2020,42(06):30-40+47.
- [3].韩月明,方丹,张红艳,张智杰.智能无人机集群协同作战效能评估综述[J/OL].飞航导弹:1-6[2020-09-18].<https://doi.org/10.16338/j.issn.1009-1319.20200035>.
- [4].姜龙亭,魏瑞轩,张启瑞,王栋.基于群智机理的集群防碰撞控制[J/OL].航空学报:1-10[2020-09-18].<http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20200628.1244.012.html>.
- [5].罗德林,张海洋,谢荣增,吴顺祥.基于多 agent 系统的大规模无人机集群对抗[J].控制理论与应用,2015,32(11):1498-1504.
- [6].易娟,杜庆余,张宏江.分布式集群协同作战系统研究及发展设想[A].中国指挥与控制学会空天安全平行系统专业委员会.第二届中国空天安全会议论文集[C].中国指挥与控制学会空天安全平行系统专业委员会:中国指挥与控制学会空天安全平行系统专业委员会,2017:7.
- [7].李志刚.智能化在集群作战中的应用探索[J].飞航导弹,2019(11):1-3+17.
- [8].李星焯.多无人机协同区域搜索关键技术研究[D].电子科技大学,2020.
- [9].李文科,潘哲,董晶.干扰机掩护下的战斗机航路规划分析与计算[J].中国电子科学研究院学报,2019,14(11):1164-1168.
- [10].耿文学,韩云.基于态势分布的多机编队协同目标分配[J].火力与指挥控制,2020,45(06):91-95.
- [11].王厚鹏,曹素芝,闫蕾,吴少俊.多目标跟踪的飞行器集群协同实时任务分配策略[J].导弹与航天运载技术,2020(03):32-37.
- [12].张哲,吴剑,何诚.多无人机多目标协同近距任务分配研究[J/OL].弹箭与制导学报:1-6[2020-09-21].<http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1234.TJ.20200408.1106.002.html>.
- [13].李世豪.复杂空战环境下基于博弈模型的无人机机动决策方法研究[D].南京航空航天大学,2019.
- [14].李世豪,丁勇,高振龙.基于直觉模糊博弈的无人机空战机动决策[J].系统工程与电子技术,2019,41(05):1063-1070.
- [15].王昱,章卫国,傅莉,黄得刚,李勇.基于鲁棒优化的无人机空战博弈决策[J].系统工程与电子技术,2015,37(11):2531-2535.
- [16].曹凯,奉柳,刘秉政,沈鹏,杨旭.动态路径规划形式化集成建模方法[J].山东理工大学学报(自然科学版),2020,34(03):5-10+16.
- [17].丛斌,孟祥瑞,张迪.飞翼飞机新型操纵舵面故障效能影响分析[J].战术导弹技术,2020(02):29-33.
- [18].曹玉松.哈密尔顿-雅克比-贝尔曼方程下的最优再保险策略[J].河南理工大学学报(自然科学版),2016,35(02):285-288.
- [19].禹志龙,李颖晖,周驰,徐文丰,徐浩军.基于可达集的故障飞机着陆阶段安全包线研究[J].飞行力学,2019,37(05):35-39.
- [20].徐文丰,李颖晖,禹志龙,郑无计,董泽洪.结冰飞机的包线保护与控制裕度研究[J/OL].控制与决策:1-10[2020-09-21].<https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1221>.

- [21]. 郟航. 紧密编队摄动稳定性分析及控制方法[D].哈尔滨工业大学,2017.
- [22]. 张毅,方国伟,杨秀霞.基于图 Laplacian 的多机编队目标跟踪方法[J/OL].系统工程与电子技术:1-13[2020-09-21].<http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2422.TN.20200821.1050.002.html>.
- [23]. 左剑凯,吴杰宏,陈嘉彤,刘泽源,李忠智.异构无人机编队防御及评估策略研究[J/OL].计算机科学与工程:1-16[2020-09-21].<http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1075.TP.20200826.1622.002.html>.

附录

```
%% 红方拦截时间
theta_R1_0=pi/2*1; %红方初始航向角设置
d_R1F_min=15000; %R1F 间的最小距离

t_tiao_min = -7/4*cos(theta_R1_0) -7/4*theta_R1_0 + 7/4*pi - 7/4 + d_R1F_min/200; %红
方变轨最短时间

%% 蓝方突防时间
theta_R1_0=pi/2*1; %蓝方初始航向角设置
d_BG_min=17500; %R1F 间的最小距离

t_tiao_min = 2*pi*500/2/250 + (d_BG_min - 2*500)/250 %蓝方变轨最短时间

%% 关于 d1 与 d2 的计算
r_lan=500;
M=80000;
d_FH=M/4;
d1=2*(d_FH-r_lan)+r_lan;
d2=r_lan*(1-2^0.5/2);

%% 关于最短时间突围的计算
M=80000;
t=200+(500*(pi-2)+2*(2^0.5-1)*(M/4-500))/250

%% 关于拦截区域的仿真程序（该程序是在 Ian Mitchell 于 3/26/04 编写的程序的基础
上改写的）注：该段程序为主程序，运行该段程序还需调用其他子程序，这里由于篇幅原
因没有一一给出。
function [ data, g, data0 ] = air3D(accuracy)
run('addPathToKernel');

%-----
% Integration parameters.
tMax = 120; % End time.
plotSteps = 12; % How many intermediate plots to produce?
t0 = 0; % Start time.
singleStep = 0; % Plot at each timestep (overrides tPlot).

% Period at which intermediate plots should be produced.
tPlot = (tMax - t0) / (plotSteps - 1);

% How close (relative) do we need to get to tMax to be considered finished?
small = 100 * eps;

% What kind of dissipation?
dissType = 'global';
```

```

%-----
% Problem Parameters.
%   targetRadius  Radius of target circle (positive).
%   velocityA     Speed of the evader (positive constant).
%   velocityB     Speed of the pursuer (positive constant).
%   inputA        Maximum turn rate of the evader (positive).
%   inputB        Maximum turn rate of the pursuer (positive).
targetRadius = 840.47;%420.48
velocityA = 250;
velocityB = 200;
inputA = 1/2;
inputB = 4/7;

%-----
% What level set should we view?
level = 0;

% Visualize the 3D reachable set.
displayType = 'surface';

% Pause after each plot?
pauseAfterPlot = 0;

% Delete previous plot before showing next?
deleteLastPlot = 1;

% Visualize the angular dimension a little bigger.
aspectRatio = [ 1 1 0.4 ];

% Plot in separate subplots (set deleteLastPlot = 0 in this case)?
useSubplots = 0;

%-----
% Approximately how many grid cells?
%   (Slightly different grid cell counts will be chosen for each dimension.)
Nx = 61;

% Create the grid.
g.dim = 3;
g.min = [ 0; -17500; 0 ];
g.max = [ +50000; 17500; +2*pi ];
g.bdry = { @addGhostExtrapolate; @addGhostExtrapolate; @addGhostPeriodic };
% Roughly equal dx in x and y (so different N).
g.N = [ Nx; ceil(Nx * (g.max(2) - g.min(2)) / (g.max(1) - g.min(1))); Nx-1 ];
% Need to trim max bound in \psi (since the BC are periodic in this dimension).
g.max(3) = g.max(3) * (1 - 1 / g.N(3));
g = processGrid(g);

```

```

%-----
% Create initial conditions (cylinder centered on origin).
data = shapeCylinder(g, 3, [ 0; 0; 0 ], targetRadius);
data0 = data;

%-----
% Set up spatial approximation scheme.
schemeFunc = @termLaxFriedrichs;
schemeData.hamFunc = @air3DHamFunc;
schemeData.partialFunc = @air3DPartialFunc;
schemeData.grid = g;

% The Hamiltonian and partial functions need problem parameters.
schemeData.velocityA = velocityA;
schemeData.velocityB = velocityB;
schemeData.inputA = inputA;
schemeData.inputB = inputB;

%-----
% Choose degree of dissipation.

switch(dissType)
  case 'global'
    schemeData.dissFunc = @artificialDissipationGLF;
  case 'local'
    schemeData.dissFunc = @artificialDissipationLLF;
  case 'locallocal'
    schemeData.dissFunc = @artificialDissipationLLLF;
  otherwise
    error('Unknown dissipation function %s', dissFunc);
end

%-----
if(nargin < 1)
  accuracy = 'medium';
end

% Set up time approximation scheme.
integratorOptions = odeCFLset('factorCFL', 0.75, 'stats', 'on');

% Choose approximations at appropriate level of accuracy.
switch(accuracy)
  case 'low'
    schemeData.derivFunc = @upwindFirstFirst;
    integratorFunc = @odeCFL1;
  case 'medium'
    schemeData.derivFunc = @upwindFirstENO2;
    integratorFunc = @odeCFL2;
  case 'high'

```

```

    schemeData.derivFunc = @upwindFirstENO3;
    integratorFunc = @odeCFL3;
case 'veryHigh'
    schemeData.derivFunc = @upwindFirstWENO5;
    integratorFunc = @odeCFL3;
otherwise
    error('Unknown accuracy level %s', accuracy);
end

if(singleStep)
    integratorOptions = odeCFLset(integratorOptions, 'singleStep', 'on');
end

%-----
% Restrict the Hamiltonian so that reachable set only grows.
% The Lax-Friedrichs approximation scheme MUST already be completely set up.
innerFunc = schemeFunc;
innerData = schemeData;
clear schemeFunc schemeData;

% Wrap the true Hamiltonian inside the term approximation restriction routine.
schemeFunc = @termRestrictUpdate;
schemeData.innerFunc = innerFunc;
schemeData.innerData = innerData;
schemeData.positive = 0;

%-----
% Initialize Display
f = figure;

% Set up subplot parameters if necessary.
if(useSubplots)
    rows = ceil(sqrt(plotSteps));
    cols = ceil(plotSteps / rows);
    plotNum = 1;
    subplot(rows, cols, plotNum);
end

h = visualizeLevelSet(g, data, displayType, level, [ 't = ' num2str(t0) ]);

camlight right; camlight left;
hold on;
axis(g.axis);
daspect(aspectRatio);
drawnow;

%-----
% Loop until tMax (subject to a little roundoff).
tNow = t0;

```

```

startTime = cputime;
while(tMax - tNow > small * tMax)

    % Reshape data array into column vector for ode solver call.
    y0 = data(:);

    % How far to step?
    tSpan = [ tNow, min(tMax, tNow + tPlot) ];

    % Take a timestep.
    [ t y ] = feval(integratorFunc, schemeFunc, tSpan, y0,...
                    integratorOptions, schemeData);
    tNow = t(end);

    % Get back the correctly shaped data array
    data = reshape(y, g.shape);

    if(pauseAfterPlot)
        % Wait for last plot to be digested.
        pause;
    end

    % Get correct figure, and remember its current view.
    figure(f);
    [ view_az, view_el ] = view;

    % Delete last visualization if necessary.
    if(deleteLastPlot)
        delete(h);
    end

    % Move to next subplot if necessary.
    if(useSubplots)
        plotNum = plotNum + 1;
        subplot(rows, cols, plotNum);
    end

    % Create new visualization.
    h = visualizeLevelSet(g, data, displayType, level, [ 't = ' num2str(tNow) ]);

    % Restore view.
    view(view_az, view_el);

end

endTime = cputime;
fprintf('Total execution time %g seconds\n', endTime - startTime);

```

```

%-----
%
%-----
function hamValue = air3DHamFunc(t, data, deriv, schemeData)
% air3DHamFunc: analytic Hamiltonian for 3D collision avoidance example.
%
% hamValue = air3DHamFunc(t, data, deriv, schemeData)
%
% This function implements the hamFunc prototype for the three dimensional
% aircraft collision avoidance example (also called the game of
% two identical vehicles).
%
% It calculates the analytic Hamiltonian for such a flow field.
%
% Parameters:
% t          Time at beginning of timestep (ignored).
% data       Data array.
% deriv      Cell vector of the costate (\grad \phi).
% schemeData A structure (see below).
%
% hamValue   The analytic hamiltonian.
%
% schemeData is a structure containing data specific to this Hamiltonian
% For this function it contains the field(s):
%
% .grid      Grid structure.
% .velocityA Speed of the evader (positive constant).
% .velocityB Speed of the pursuer (positive constant).
% .inputA     Maximum turn rate of the evader (positive).
% .inputB     Maximum turn rate of the pursuer (positive).
%
% Ian Mitchell 3/26/04

checkStructureFields(schemeData, 'grid', 'velocityA', 'velocityB', ...
                    'inputA', 'inputB');

grid = schemeData.grid;

% implements equation (3.3) from my thesis term by term
% with allowances for \script A and \script B \neq [-1, +1 ]
% where deriv{i} is p_i
% x_r is grid.xs{1}, y_r is grid.xs{2}, \psi_r is grid.xs{3}
% v_a is velocityA, v_b is velocityB,
% \script A is inputA and \script B is inputB
hamValue = -(-schemeData.velocityA * deriv{1} ...
            + schemeData.velocityB * cos(grid.xs{3}) .* deriv{1} ...
            + schemeData.velocityB * sin(grid.xs{3}) .* deriv{2} ...
            + schemeData.inputA * abs(grid.xs{2}) .* deriv{1} ...

```



```

                                'inputA', 'inputB');

grid = schemeData.grid;

switch dim
case 1
    alpha = abs(-schemeData.velocityA + ...
                + schemeData.velocityB * cos(grid.xs{3})) ...
            + schemeData.inputA * abs(grid.xs{2});

case 2
    alpha = abs(schemeData.velocityB * sin(grid.xs{3})) ...
            + schemeData.inputA * abs(grid.xs{1});

case 3
    alpha = schemeData.inputA + schemeData.inputB;

otherwise
    error([ 'Partials for the game of two identical vehicles' ...
            ' only exist in dimensions 1-3' ]);
end

```